

## O wchodzeniu pod górę

Stanisław Kobus

Student, Instytut Fizyki UJ

### 1. Wprowadzenie

Zapewne każdy z Czytelników ma jakieś doświadczenia związane z pokonywaniem pieszo wzniesień. Okazuje się, że wchodzenie pod górę jest bardzo ciekawym zjawiskiem z fizycznego punktu widzenia, a jego opis wcale nie jest łatwy. Jedną z przyczyn, dla których tak się dzieje, jest skomplikowana struktura mięśni, stawów itd., które grają decydującą rolę w procesie poruszania się na dwóch nogach. Przeglądając zasoby Internetu można znaleźć wiele prac eksperymentalnych, koncentrujących się na ilościowym opisie chodu i dlatego więcej w nich liczb niż wzorów. Bardziej wnikliwemu poszukiwaczowi nie umkną zaawansowane prace biorące pod uwagę wiele fizjologicznych szczegółów związanych z budową ludzkiego ciała. Jednak te prace są trudne do zrozumienia dla fizyka, bo potrzebna jest specjalistyczna wiedza z zakresu fizjologii ciała ludzkiego. Okazuje się jednak, że istnieją również proste modele chodu, spośród których najpopularniejszy zwany jest modelem odwróconego wahadła (*inverted pendulum model*) [1].

### 2. Model odwróconego wahadła

Na początek warto zwrócić uwagę na definicję słowa krok, gdyż słowo to czasem jest odnoszone do pojedynczego kroku, czyli odległości między śladami stóp różnych nóg, a czasami do kroku podwójnego, czyli odległości między śladami czynionym przez tę samą stopę. Na potrzeby tego artykułu krokiem będę nazywał krok pojedynczy, zaś mówiąc o podwójnym kroku, będę stosował pełną nazwę.

Idea modelu jest bardzo prosta: nogę wędrowca należy potraktować jako wahadło fizyczne. Czas potrzebny na wykonanie podwójnego kroku będzie wtedy równy okresowi wahanja nogi, który oznaczmy przez  $T_s$ . Zakładamy także przybliżenie małych kątów, dzięki czemu wartości funkcji sinus i cosinus będą mogły być przybliżane przez rozwinięcie Taylora do drugiego rzędu włącznie. Założenie takie okazuje się zadziwiająco dobre: długość podwójnego kroku to przeciętnie 85% wysokości człowieka, podczas gdy długość nogi – 50%. Przy takich proporcjach przeciętna amplituda kątowa ruszającej się w stawie biodrowym nogi wynosi 0,43 rad (ok.  $25^\circ$ ). Różnica między okresem drgań dla takiej amplitudy policzonym ściśle a uzyskanym w ramach przybliżenia małych kątów wynosi około 1,5%, co oznacza w praktyce błąd rzędu jednej minuty na jedną godzinę chodzenia.

Wiadomo, że dla wahadła o długości  $L$  i masie  $m_1$  (masa nogi) oraz przyspieszenia grawitacyjnego  $g$  okres drgań dany jest następującym wzorem (zob. np. [2])

$$T_s = 2\pi\sqrt{\frac{I}{m_1gd}}, \quad (1)$$

gdzie  $d$  jest odległością pomiędzy osią obrotu a środkiem masy ciała, zaś  $I$  jest momentem bezwładności. Jeśli założymy, że noga jest prętem, którego środek masy leży dokładnie w połowie jej długości ( $d = L/2$ ), to moment bezwładności będzie równy  $I = m_1L^2/3$ . Wtedy okres drgań wyniesie

$$T_s = 2\pi\sqrt{\frac{m_1L^2}{3m_1g\frac{L}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}. \quad (2)$$

Jeśli założymy, że  $\phi$  jest kątową amplitudą wahającej się nogi, to w czasie  $T_s$  turysta przejdzie odległość podwójnego kroku, a każda z nóg wykona wahnięcie o kąt  $2\phi$  w czasie  $T_s$  i tym samym idący pokona odległość

$$d_s = 4L\sin\phi \approx 4L\phi. \quad (3)$$

Energia zużyta w czasie pokonywania takiego dystansu będzie równa różnicy energii potencjalnej środka masy człowieka o masie  $m$  między najniższą i najwyższą jego pozycją w czasie jednego cyklu. Ponieważ na podwójny krok składają się dwa kroki pojedyncze, środek masy przesunie się dwa razy do góry i dwa razy opadnie. Energia potrzebna do dwukrotnego podniesienia środka masy będzie równa

$$E_s = 2mgL(1 - \cos\phi) \approx 2mgL\left(1 - 1 + \frac{\phi^2}{2}\right) = 2mgL\frac{\phi^2}{2}. \quad (4)$$

Teraz można łatwo policzyć średnią moc wydatkowaną przez turystę

$$P = \frac{E_s}{T_s} = \frac{2mgL}{2\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{g}{L}} \frac{\phi^2}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{mg\sqrt{gL}}{\pi} \frac{\phi^2}{2} \quad (5)$$

oraz jego średnią prędkość

$$v = \frac{d_s}{T_s} = \frac{4L\phi}{2\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{2\phi}{\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{gL}. \quad (6)$$

Jeśli założymy, że okres  $T_s$  jest stały (co jest istotą ruchu wahadła w przybliżeniu małych kątów), to amplituda kątowa nogi jest wprost proporcjonalna do prędkości

$$\phi = \frac{\pi}{2\sqrt{gL}} \sqrt{\frac{2}{3}} v. \quad (7)$$

Wtedy z równania (5) otrzymujemy:

$$P(v) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{mg\sqrt{gL}}{2\pi} \frac{2}{3} \frac{\pi^2}{4gL} v^2 = \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\pi}{12} \sqrt{\frac{g}{L}} \right) mv^2 = \left( \frac{\pi^2}{6T_s} \right) mv^2 = \lambda mv^2. \quad (8)$$

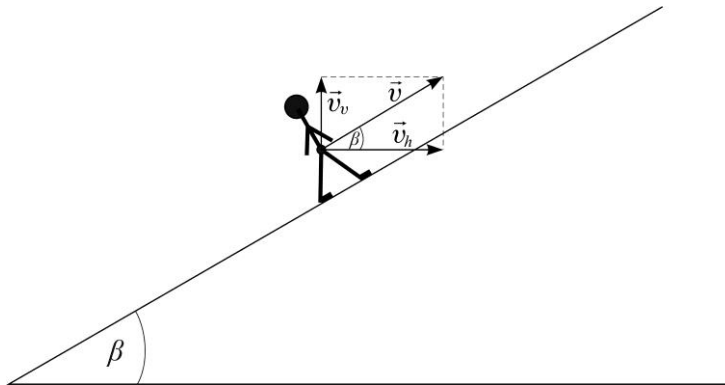
Powyższy wzór został potwierdzony przez liczne eksperymenty, dzięki którym udało się ustalić, że stała  $\lambda$  wynosi około  $4/3 \text{ s}^{-1}$ . Dzięki temu można oszacować czas wykonania podwójnego kroku na  $T_s = 1,24 \text{ s}$ . Ta wartość wydaje się sensowna, pod warunkiem wszakże, że piechur będzie szedł dość szybko. W dalszej części artykułu będziemy używać stałej  $\lambda$  równej  $4/3 \text{ s}^{-1}$ .

### 3. Uogólnienie na nachylone stoki

Model odwróconego wahadła zaprezentowany wyżej można stosować oczywiście tylko przy chodzeniu po poziomej powierzchni. Aby móc użyć go do opisu spacerowania po stokach o różnym nachyleniu, wymaga on drobnej modyfikacji. Prędkość turysty poruszającego się po stoku o nachyleniu  $\beta$  może być zapisana następująco

$$\vec{v} = v \cos \beta \hat{e}_1 + v \sin \beta \hat{e}_2 = \vec{v}_h + \vec{v}_v, \quad (9)$$

gdzie  $\hat{e}_1$  i  $\hat{e}_2$  to wektory jednostkowe – poziomy i pionowy.



Założmy teraz, że moc potrzebna do poruszania się pod górę może być zapisana jako suma dwóch wyrazów

$$P = P_h + P_v. \quad (10)$$

Wyraz związany z ruchem w poziomie jest opisany przez wzór (8). Moc związana z ruchem w pionie będzie równa różnicy energii potencjalnej zdobywanej przez wędrowca na jednostkę czasu

$$P_v = mgv_v. \quad (11)$$

Ostatecznie więc otrzymujemy następujący wzór

$$P = \lambda mv_h^2 + mgv_v = \lambda mv^2 \cos^2 \beta + mgv \sin \beta. \quad (12)$$

#### 4. Efektywność mięśni

W chwili obecnej dysponujemy równaniem, które mówi, ile mocy potrzebuje piechur idący stokiem o nachyleniu  $\beta$  z prędkością  $v$ . Jeśli jednak chcemy powiązać ten wynik z rzeczywistością, musimy rozważyć, jak ta moc jest produkowana w ciele ludzkim. Ogólnie związek pomiędzy mocą a siłą wywieraną na jakiś przedmiot dany jest wyrażeniem

$$P = Fv, \quad (13)$$

gdzie  $v$  jest prędkością nadmienionego przedmiotu. Warto zauważyć, że jeśli rozważamy moc generowaną przez mięśnie, to  $v$  będzie równa prędkości kurczenia się włókien mięśniowych. Jednakże, inaczej niż w powyższym równaniu, moc generowana przez mięsień zależy od siły, która jest wywierana. Można łatwo zobaczyć to na następującym przykładzie: nie jesteśmy w stanie podnieść dowolnie ciężkiego obiektu, poruszając go z małą prędkością. Ludzkie mięśnie mają pewną siłę graniczną  $F_{max}$ , powyżej której nie są w stanie działać. Podobnie dzieje się po drugiej stronie skali – gdy wywierana siła jest za mała, prędkość kurczenia się mięśnia jest zbyt duża i przetwarzanie energii chemicznej w mechaniczną nie jest efektywne. Uzyskane z eksperymentów równanie, które łączy moc  $P$  z siłą  $F$  wywieraną przez ludzki mięsień, jest nazywane *równaniem Hilla* (od nazwiska Archibalda Hilla, jego odkrywcy) i przyjmuje następującą postać

$$P(F) = Fv_{max} \frac{F_{max} - F}{F_{max} + bF}, \quad (14)$$

gdzie  $v_{max}$  to maksymalna prędkość kurczenia się mięśnia,  $F_{max}$  – maksymalna siła, którą mięsień może wyprodukować, zaś  $b$  jest stałą z przedziału od 1 do 4. Powyższa funkcja ma maksimum, które łatwo obliczyć. Rozwińmy więc funkcję  $P(F)$  w pobliżu maksimum  $P_{opt}$ , przy której praca układu mięśniowego jest najefektywniejsza (optymalna moc jest związana z optymalną siłą  $F_{opt}$ ).

Z równania

$$\frac{\partial P(F)}{\partial F} \Big|_{F=F_{opt}} = 0 \quad (15)$$

wynika, że

$$F_{opt} = \frac{F_{max}}{b} (\sqrt{1+b} - 1)$$

oraz

$$P_{opt} = P(F_{opt}) = F_{opt} v_{max} \frac{F_{max} - F_{opt}}{F_{max} + bF_{opt}}. \quad (16)$$

Teraz rozwijamy  $P(F)$  wokół maksimum zachowując wyrazy do drugiego rzędu włącznie

$$P(F) = P_{opt} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P(F)}{\partial F^2} \Big|_{F=F_{opt}} (F - F_{opt})^2. \quad (17)$$

Po pracochłonnych obliczeniach otrzymujemy

$$P(F) = P_{opt} - v_{max} \frac{(F - F_{opt})^2}{F_{max} \sqrt{1+b}}. \quad (18)$$

Porównując powyższy wynik z  $P_{opt}$  można zdefiniować rodzaj mechanicznej wydajności

$$\eta = \frac{P}{P_{opt}} = 1 - \frac{v_{max} (F - F_{opt})^2}{F_{max} \sqrt{1+b}} \frac{1}{P_{opt}} \approx \frac{1}{1 + \frac{v_{max} (F - F_{opt})^2}{F_{max} \sqrt{1+b}} \frac{1}{P_{opt}}} = \frac{1}{1 + a \left( \frac{F - F_{opt}}{mg} \right)^2}, \quad (19)$$

gdzie  $a$  jest bezwymiarową stałą. Warto zauważyć, że odchylenie siły rzeczywistej  $F$  od siły optymalnej  $F_{opt}$  wyskalowane jest w jednostkach ciężaru wędrowca  $mg$ , co może być łatwo wyjaśnione. Po pierwsze, siła  $F$  działa zawsze przeciwko grawitacji podnosząc środek masy wędrowca do góry. Po drugie, jeśli ktoś waży więcej i jest w stanie wygenerować proporcjonalnie większą moc, mechaniczna sprawność powinna pozostać taka sama. Oczywiście stałą  $a$  można wyznaczyć za pomocą  $b$  oraz  $F_{max}$ . Dla  $b = 4$  i  $F_{max} \approx mg$ ,  $a = 4,7$ , co dobrze pasuje do eksperymentu. Oszacowanie  $F_{max}$  jest zgrubne i w praktyce przekłada się na umiejętność zrobienia przysiadu na jednej nodze; jeśli ktoś potrafi zrobić taki przysiad, to zazwyczaj wymaga to użycia pełnej siły mięśni nogi.

## 5. Obliczanie czasu przejścia

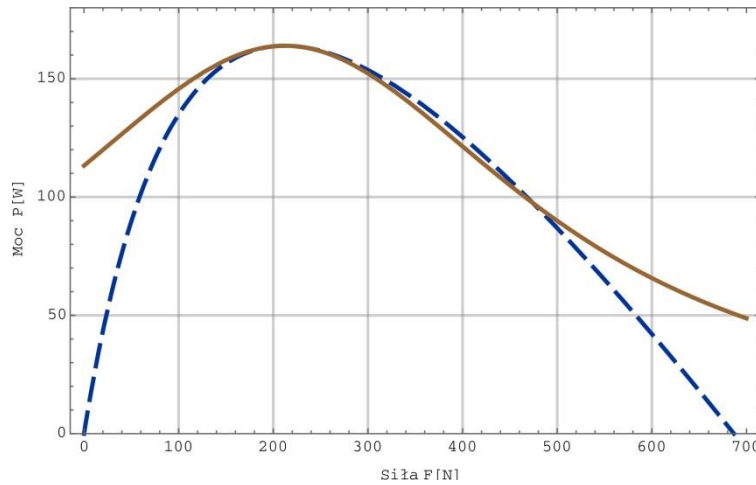
Poprzez połączenie równań (19) oraz (12) otrzymujemy

$$P = \eta P_{opt} = \frac{P_{opt}}{1 + a \left( \frac{F - F_{opt}}{mg} \right)^2} = \lambda m v^2 \cos^2 \beta + mg v \sin \beta.$$

Na potrzeby dalszej dyskusji warto przekształcić powyższe równanie do postaci

$$\frac{P_{opt}}{1 + a \left( \frac{F - F_{opt}}{mg} \right)^2} = (F_v + F_h)v, \quad (20)$$

gdzie  $F_v = \lambda m v \cos^2 \beta$  oraz  $F_h = mg \sin \beta$ . Choć w rzeczywistości  $F_{opt} > F_v$ , możemy dość bezpiecznie założyć, że obydwie te siły są sobie równe. Przybliżenie to jest uprawnione z uwagi na szerokie maksimum funkcji  $P$ , co można zobaczyć na rys. 1.



Rys. 1. Równanie Hilla (linia przerywana). Przybliżenie wokół maksimum (linia ciągła)

Otrzymujemy więc następujące równanie

$$\frac{P_{opt}}{1 + a \left( \frac{mg \sin \beta}{mg} \right)^2} = \lambda m v^2 \cos^2 \beta + mg v \sin \beta. \quad (21)$$

Prędkość  $v = L/T$ , gdzie  $T$  jest czasem przejścia ścieżki o długości  $L$  na stoku nachylonym pod kątem  $\beta$ . Równanie to można rozwiązać ściśle

$$T = \frac{2L(1-x^2)\lambda}{gx \left( \sqrt{1 + \left( \frac{P_{opt}}{m} \right) \frac{4(1-x^2)\lambda}{g^2 x^2 (1+ax^2)} - 1} \right)}, \quad (22)$$

gdzie  $x = \sin\beta = h/L$ , zaś  $h$  stanowi różnicę wzniesień wyrażoną w metrach. To rozwiązanie nazwijmy *ściśle rozwiązaniem modelu*<sup>1</sup>.

Okazuje się, że ściśle rozwiązanie modelu można uprościć. Po pierwsze założmy, że  $\cos\beta = 1$ , ponieważ prędkość i tak mocno zmniejsza się na stromych stokach i  $\cos\beta$  nie będzie miał dużego wpływu na wynik. To daje

$$T = \frac{1}{2\eta P_{opt}} \left( mgh + \sqrt{(mgh)^2 + 4P_{opt}\eta\lambda mL^2} \right). \quad (23)$$

Po drugie, pomijmy sprawność mechaniczną  $\eta$  tam, gdzie znajduje się ona pod pierwiastkiem kwadratowym, ponieważ spodziewamy się, że na ogół będzie bliska 1. Końcowy wzór prezentuje się następująco

$$T = \frac{L(1+ax^2) \left( gx + \sqrt{g^2x^2 + 4\frac{P_{opt}}{m}} \right)}{2\left(\frac{P_{opt}}{m}\right)}. \quad (24)$$

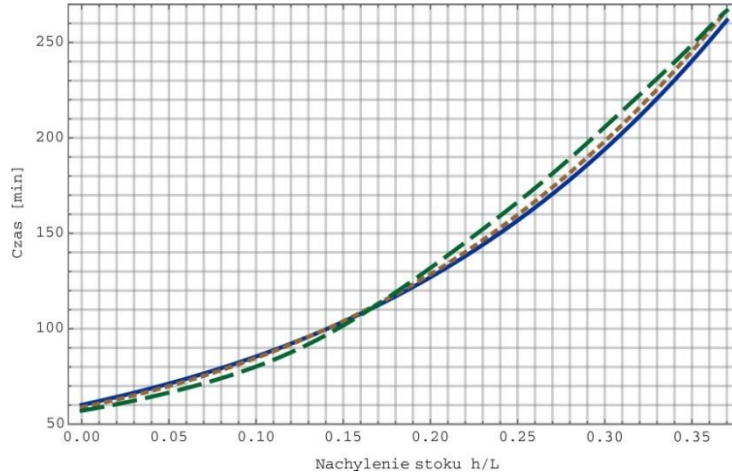
W ten sposób otrzymujemy *przybliżone rozwiązanie modelu*. Warto zwrócić uwagę, że w obydwu modelach pojawia się naturalna jednostka  $P_{opt}/m$ , czyli optymalna moc na kilogram masy ciała.

## 6. Wyniki

W tej części przedstawione zostaną wyniki uzyskane z obu modeli zastosowanych do opisu wędrowki turysty o masie 70 kg. Zostaną one porównane z wynikami otrzymanymi z pomocą tzw. *wzoru szwajcarskiego*, czyli wielomianu 15. stopnia dopasowanego do doświadczalnych danych. Wzór szwajcarski został opracowany, aby obliczać czasy przejść tras turystycznych w Szwajcarskich Alpach [4].

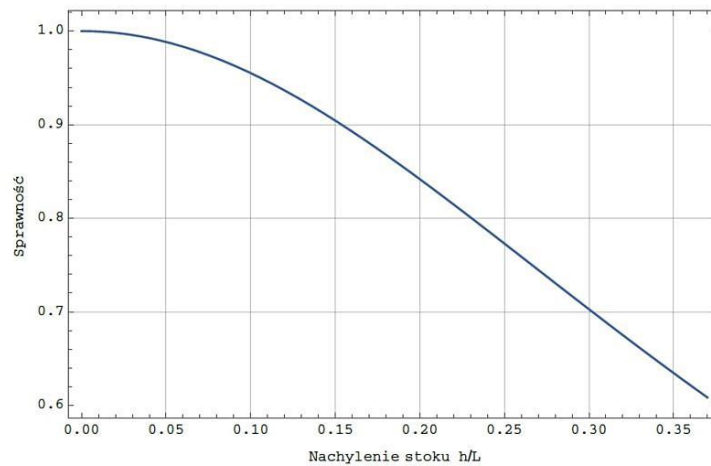
Na rys. 2 można zobaczyć, że obydwa rozwiązania modelowe dają podobne wyniki, a także dobrze przybliżają wzór szwajcarski. Co ciekawe, model przybliżony lepiej zgadza się z modelem opisanym wzorem szwajcarskim, niż ściśle rozwiązanie modelu. Błąd względny obliczonych wielkości stanowi nie więcej niż 5%. Oznacza to, że czas trwania wycieczki jesteśmy w stanie określać z dokładnością nie gorszą niż 3 minuty na każdą godzinę jej trwania. Przypomnijmy sobie, że błąd wynikający z samego przybliżenia małych kątów był rzędu pojedynczej minuty. Zatem zastosowanie prostego modelu, który nie uwzględnia skomplikowanych fizjologicznych szczegółów samego chodu człowieka, pozwala odtworzyć dane doświadczalne z zaskakująco wysoką dokładnością. Dzięki temu modelowi możemy także lepiej zrozumieć zagadnienia natury fizycznej, stojącej za czynnością chodzenia po górach.

<sup>1</sup> Wyprowadziłem je, ponieważ nie dowierzałem przedstawionym dalej przybliżeniom dokonanym przez autora pracy [3], na której opiera się mój artykuł.



Rys. 2. Czas przejścia 1 km w funkcji nachylenia stoku. Ścisłe rozwiązanie modelu – krzywa ciągła, przybliżone – krzywa kropkowana, wzór szwajcarski – krzywa przerywana. Wykres sporządzony przy stałych  $a = 4,7$ ,  $\lambda = 4/3 \text{ s}^{-1}$  dla obydwu rozwiązań modelowych. Moc optymalna została ustalona na 120 W dla modelu przybliżonego oraz na 115 W – dla ścisłego

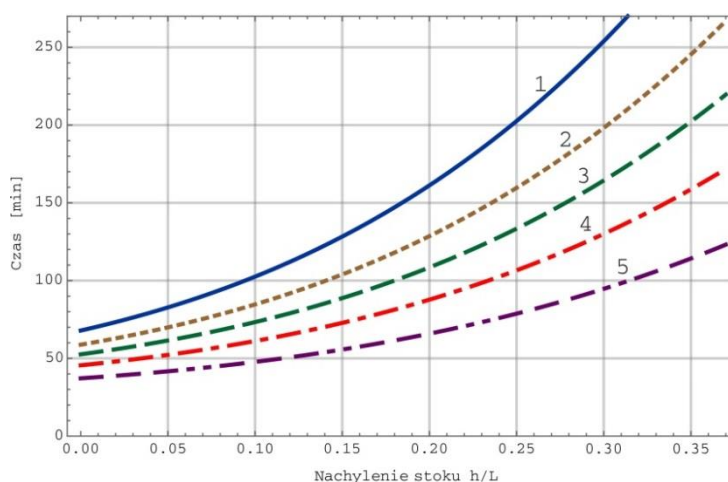
Drugą ciekawą wielkością, którą można obliczyć w ramach przedstawionego modelu jest zużycie energii. Rysunek 3 pokazuje, że sprawność systemu mięśniowego spada ze wzrastającym nachyleniem stoku. To oznacza, że chociaż  $P_{opt}$  jest maksymalną dostępną mocą i odpowiada optymalnej pracy organizmu, to idąc pod górę wędrowiec jest w stanie używać tylko jej pewnego ułamka. Oczywiście, im większa jest  $P_{opt}$ , tym szybciej można się wspinać. Dlatego  $P_{opt}$  może być użyta jako wygodna miara kondycji organizmu.



Rys. 3. Sprawność w funkcji nachylenia stoku (obliczona z przybliżonego rozwiązania modelu)



Jak już wyżej wspomniano, zgodność rozwiązań modelu z wzorem szwajcarskim została osiągnięta dla pewnych konkretnych wartości  $P_{opt}$ . Jednakże, gdy ktoś ma inną moc optymalną, jego czas przejścia tej samej trasy będzie inny. Omawiany tutaj model pozwala na przeskalowanie krzywej wiążącej czas przejścia z nachyleniem stoku, dla różnych wartości  $P_{opt}$  (rys. 4). Jeśli znamy moc optymalną turysty, to można przewidzieć jego czasy przejścia; wzór szwajcarski na to nie pozwala. Aby określić wartość  $P_{opt}$ , trzeba zmierzyć czas przejścia na jakiejś wzorcowej trasie o znanej długości i profilu wysokościowym<sup>2</sup>. W tym celu wykorzystałem dwa podejścia w Tatrach, których szczegóły są pokazane na rys. 5 i 6.

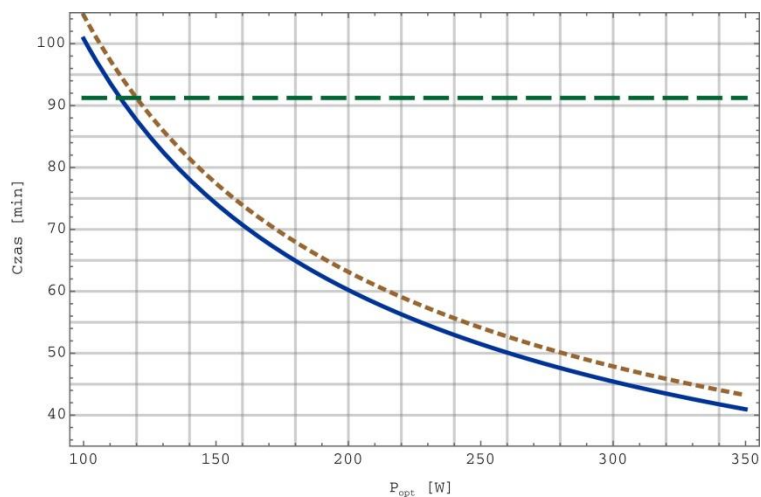


Rys. 4. Czas przejścia 1 km w zależności od nachylenia stoku dla różnych wartości  $P_{opt}$ : 90 W (krzywa 1), 120 W (krzywa 2), 150 W (krzywa 3), 200 W (krzywa 4), 300 W (krzywa 5)

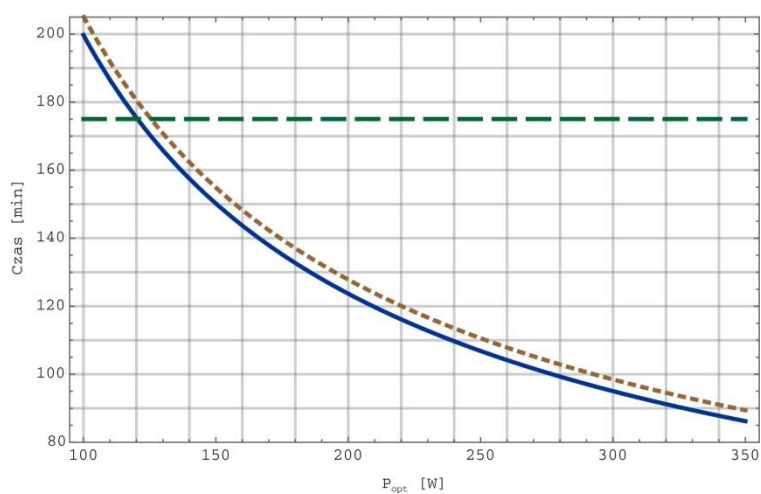
Spróbujmy określić wielkość mocy optymalnej autora artykułu. Waży on około 70 kg i na początku sezonu jest w stanie wejść na Przełęcz Między Kopami w około 55 minut, zaś na Kasprowy Wierch w 110 minut. To przekłada się na  $P_{opt} \approx 240$  W. Pod koniec lata, wykorzystując wszystkie swoje siły pierwszą trasę może pokonać w 45 minut, drugą zaś w 95 minut. To oznacza, że moc maksymalna wzrosła do około  $P_{opt} \approx 320$  W. Warto zwrócić uwagę, że zwiększenie mocy optymalnej o 1/3 skróciło czas wejścia raptem o 1/6. To wyjaśnia dobrze znany fakt, że poprawienie czasu o kilka minut, jest naprawdę trudnym zadaniem<sup>3</sup>.

<sup>2</sup> Szczegóły dotyczące tych wielkości można odczytać z mapy, bądź innych źródeł, np. [5].

<sup>3</sup> Co ciekawe jednym z wymagań stawianych kandydatom na ratownika TOPR jest warunek, aby wejść na Kasprowy Wierch wspomnianą trasą w czasie równym liczbie minut nie większej niż 60 plus liczbę minut równą co do wartości wiekowi kandydata wyrażonemu w latach. Jak widać wymaga to od organizmu wyjątkowej wydolności.



Rys. 5. Czas przejścia trasy z Kuźnic na Przełęcz Między Kopami przez Boczań w funkcji mocy optymalnej. Ścisłe rozwiązanie modelu (linia ciągła), przybliżone (linia kropkowana) oraz wzór szwajcarski (linia przerywana). Dla tej trasy  $h = 550$  m, zaś  $L = 3200$  m



Rys. 6. Czas wejścia na Kasprowy Wierch z Kuźnic. Ścisłe rozwiązanie modelu (linia ciągła), przybliżone rozwiązanie (linia kropkowana), wzór szwajcarski (linia przerywana). Ta trasa ma dwie główne części różniące się nachyleniem: z Kuźnic na Myślenickie Turnie –  $h_1 = 360$  m,  $L_1 = 4000$  m oraz z Myślenickich Turni na szczyt Kasprowego Wierchu –  $h_2 = 630$  m,  $L_2 = 3500$  m

Gdy znana jest wartość  $P_{opt}$ , to łatwo policzyć także zużycie energii. W omawianym przypadku jest to około 680 kcal dla pierwszej trasy na począt-

ku sezonu oraz 740 kcal na końcu. W tych wyliczeniach wzięto pod uwagę, że sprawność zamiany energii chemicznej na mechaniczną w ludzkich mięśniach wynosi tylko około 25%.

## 7. Podsumowanie

Przedstawiony model odwróconego wahadła został uogólniony na stoki o niezerowym nachyleniu. Następnie za pomocą równania Hilla, został dostosowany do obliczania czasu przejścia na górskich ścieżkach. Okazało się, że uzyskane rezultaty bardzo dobrze przybliżają te, obliczone dzięki dopasowaniu do danych eksperymentalnych wzorowi szwajcarskiemu (błąd względny to mniej niż 5%). Co więcej, model pozwala na przewidywanie czasów przejść osób o różnym stopniu przygotowania fizycznego. Co równie ważne, przedyskutowany model zapewnia nam wgląd w fizykę kryjącą się za wchodzeniem pod górę.

Co jest jeszcze do zrobienia? Można próbować stworzyć model schodzenia – wzór szwajcarski opisuje także stoki o ujemnym nachyleniu. Można także korzystając z artykułów naukowych z dziedziny fizjologii [6, 7] zgłębić znaczenie parametrów równania Hilla.

## Literatura

- [1] Chris Davis. The energy cost of walking: [www.idlex.freeseerve.co.uk/idle/evolution/human/early/walking.html](http://www.idlex.freeseerve.co.uk/idle/evolution/human/early/walking.html)
- [2] Wzory opisujące wahadło fizyczne: [en.wikipedia.org/wiki/Pendulum\\_\(mathematics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_(mathematics))
- [3] Ulrich Leuthäusser. About walking uphill: time required, energy consumption and the zigzag, [sigmadewe.com/fileadmin/user\\_upload/pdf-Dateien/Bergaufgehen\\_engl.pdf](http://sigmadewe.com/fileadmin/user_upload/pdf-Dateien/Bergaufgehen_engl.pdf)
- [4] Arkusz kalkulacyjny służący do liczenia czasów przejść w Alpach Szwajcarskich: <http://www.wandern.ch/de/wandern/vorbereitung/karten-und-hilfsmittel>
- [5] Strona internetowa z parametrami tras wycieczkowych w polskich górach: [www.szlaki.net.pl/](http://www.szlaki.net.pl/)
- [6] Informacje o proporcjach ciała: [www.exrx.net/Kinesiology/Segments.html](http://www.exrx.net/Kinesiology/Segments.html), [www.anatomy4sculptors.com/hpc/](http://www.anatomy4sculptors.com/hpc/)
- [7] Informacje o szybkości kontrakcji mięśni: <http://www.coheadquarters.com/PennLibr/MyPhysiology/myocell/fig.myo.10.htm>

