# Zagadkowe baloniki

*Krzysztof Zamarski*
*Uczeń V LO, Kraków*

Jeden z problemów ostatniej edycji Turnieju Młodych Fizyków nosił tytuł „Para balonków”[1]. Polegał on na zbadaniu następującego układu:

Składa się on z dwóch gumowych baloników połączonych przewodem z zaworem. W zależności od początkowych objętości baloników, po otwarciu zaworu powietrze przepływa w jedną lub drugą stronę. Z początku wydaje się oczywiste, że powietrze przepłynie z dużego do małego balonika. Gdyby tak było, całoroczne badania i dyskusje zawodników Turnieju nie miałyby sensu. Gdzie wobec tego jest haczyk?

Każdy, kto samodzielnie zbuduje powyższy układ (do tego celu nie trzeba dysponować specjalnym zaworem – wystarczy nawet zgięta pośrodku gumowa rurka), szybko zauważy, że przepływ powietrza jest zazwyczaj słabo widoczny. Kiedy jednak da się już określić jego kierunek, okazuje się, że jest on odwrotny od oczekiwanego. Oznacza to, że intuicja nie wystarczy do opisania tego pozornie prostego zjawiska i należy rozpocząć uporządkowane fizyczne rozumowanie.

W celu wyjaśnienia zjawiska budujemy model oparty na następujących założeniach:

1. Układ ma stałą temperaturę równą temperaturze otoczenia (w rzeczywistości będzie się ona zmieniać zgodnie z równaniem van der Waalsa, ale jak się okazuje, zmiany te są nieznaczne i można je pominąć).

[1] Pełną listę zeszłorocznych problemów turniejowych można znaleźć m.in. w *Fotonie* 126, Jesień 2014, lub w archiwum na stronie www.tmf.org.pl; patrz też [1].

2. Długość przewodu i położenie zaworu nie mają znaczenia (choć mogłyby mieć, gdyby przewód był odpowiednio gruby).
3. Ciśnienie atmosferyczne jak stałe i takie samo wokół obu baloników.
4. Powietrze zachowuje się jak gaz doskonały.
5. Baloniki są w przybliżeniu sferami.
6. Guma, z której wykonane są baloniki jest nieściśliwa (ma stałą objętość).

Zastanówmy się na początek, jaka jest właściwie przyczyna przepływu powietrza pomiędzy balonikami. Oczywiście powodem jest różnica ciśnień – powietrze przemieszcza się z balonika, wewnątrz którego panuje większe ciśnienie do drugiego balonika do momentu, aż ciśnienia się wyrównają. Przyjmując, że ciśnienie wewnątrz balonika jest równe sumie ciśnienia atmosferycznego i ciśnienia pochodzącego od naprężenia gumy, możemy stwierdzić, że powietrze przepływać będzie z balonika o większym ciśnieniu pochodzącym od gumy, do balonika, w którym owo ciśnienie jest mniejsze. W tej sytuacji do rozwiązania problemu wystarczy wyznaczyć zależność pomiędzy tym ciśnieniem a objętością balonika.

W tym celu posłużymy się równaniem Younga-Laplace'a, które ma następującą postać:

$$\Delta p = 2\sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right),$$

gdzie $\Delta p$ jest różnicą pomiędzy ciśnieniem wewnętrznym i zewnętrznym (w tym przypadku atmosferycznym), czyli zgodnie z poprzednim akapitem ciśnieniem pochodzącym od naprężenia gumy, $R_1$ i $R_2$ to promienie krzywizny wewnętrznej i zewnętrznej, a $\sigma$ to tak zwane napięcie powierzchniowe. Jak łatwo zauważyć, dla cienkich powierzchni sferycznych równanie Younga-Laplace'a upraszcza się do postaci:

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{R},$$

gdzie $R$ jest promieniem sfery.

W większości sytuacji, w których stosuje się powyższe równanie, napięcie powierzchniowe jest stałe (np. w przypadku kropel lub baniek mydlanych). Gdyby tak było również w przypadku baloników, ciśnienie wewnętrzne wzrastałoby wraz ze spadkiem objętości balonika, doprowadzając do całkowitego wypompowania jednego z nich po każdym otwarciu zaworu. Efektu całkowitego opróżnienia balonika nie obserwujemy jednak nigdy, a więc napięcie powierzchniowe gumy musi ulegać zmianom.

Aby obliczyć jego wartość wykorzystamy równanie termodynamiczne opisujące zmianę energii wewnętrznej gumy:

$$\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V + \sigma\mathrm{d}A,$$

gdzie $E$ jest energią wewnętrzną powłoki balonu, $S$ jej entropią, $V$ objętością, $A$ polem powierzchni, $T$ temperaturą otoczenia, a $p$ ciśnieniem wewnątrz balonu.

Teraz największym problemem jest obliczenie zmiany entropii gumy. W tym celu przyjmijmy, że względna zmiana rozmiaru gumy po danej deformacji wynosi $\lambda_i$ w $i$-tym wymiarze. Wówczas dla wymiarów rzeczywistych $x, y, z$ prawdziwe jest następujące równanie Flory'ego:

$$\Delta S = -k\Delta[\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 - 3 - \ln(\lambda_x\lambda_y\lambda_z)] \ ,$$

w którym $k$ jest stałą związaną ze strukturą polimeru. Z założenia o nieściśliwości gumy mamy:

$$\lambda_x\lambda_y\lambda_z = 1.$$

Wobec czego, dla rozciągnięć izotropowych w płaszczyźnie $x$–$y$ możemy dokonać podstawienia $\lambda = \lambda_x = \lambda_y$, które w konsekwencji daje $\lambda_z = 1/\lambda^2$. Wtedy nasze równanie upraszcza się do:

$$\Delta S = -k\left(\frac{2A}{A_0} + \frac{A_0^2}{A^2} - 3\right),$$

gdzie $A_0$ to początkowe pole powierzchni gumy, a $A$ – pole powierzchni po deformacji.

Po wstawieniu $\Delta S$ do początkowego równania i wyliczeniu $\sigma$ otrzymujemy:

$$\sigma = \frac{2kT}{A_0}\left(1 - \frac{A_0^3}{A^3}\right).$$

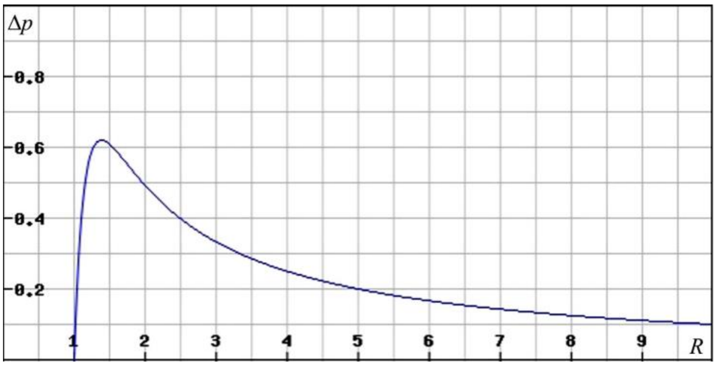
Widzimy teraz, że w rzeczywistym baloniku napięcie powierzchniowe rośnie nieliniowo wraz z rozciąganiem gumy. Po wstawieniu otrzymanej wartości $\sigma$ do równania Younga-Laplace'a otrzymujemy

$$\Delta p = \frac{2kT}{R_0^2}\left(\frac{R^6 - R_0^6}{R^7}\right).$$

Jeśli dla uproszczenia przyjmiemy $2kT = 1$ i $R_0 = 1$ otrzymamy następującą funkcję

$$\Delta p(R) = \frac{R^6 - 1}{R^7},$$

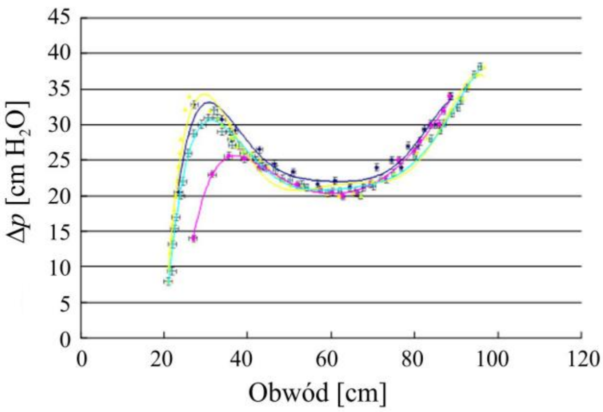
której wykres przedstawiono na rys. 1.



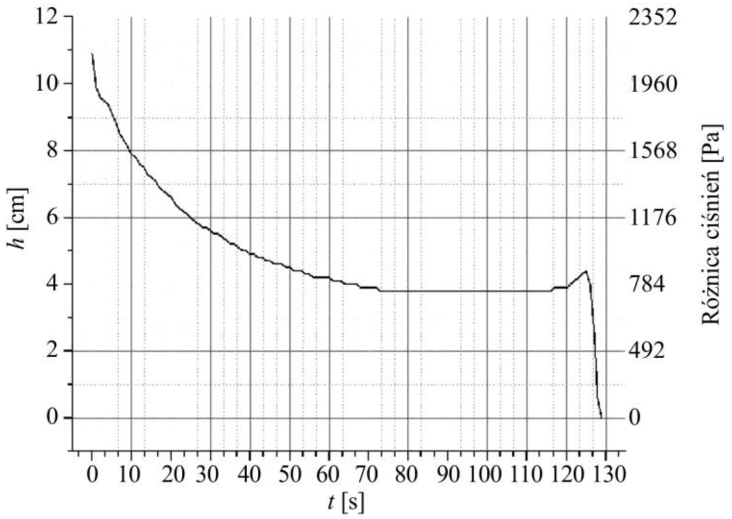

Rys. 1. Zależność nadciśnienia $\Delta p$ od promienia balonu $R$

Tak właśnie, zgodnie z naszym modelem, powinna w przybliżeniu wyglądać zależność nadciśnienia wewnątrz balonu od jego promienia, z którego łatwo można obliczyć objętość. Wydaje się, że wystarczy ona do wytłumaczenia zaobserwowanego przez nas zachowania układu. Doświadczenie przyniosło niejedną niespodziankę.

Przyjrzyjmy się wynikom dwóch doświadczeń, których celem było eksperymentalne wyznaczenie powyższej zależności. Pierwsze z nich zostało przeprowadzone przez Chieh-Shan Chena na potrzeby jego pracy [2]. Badany balonik był stopniowo napompowywany, a co jakiś czas mierzono jego obwód i szukaną różnicę ciśnień (za pomocą manometru wodnego, czyli tzw. U-rurki). Drugie doświadczenie wykonała drużyna „Pentagon" startująca w Turnieju – w jego przypadku balonik był w nierównomiernym tempie wypompowywany, a równocześnie dokonywano ciągłego pomiaru szukanej różnicy ciśnień (również za pomocą U-rurki). Oto wykresy otrzymane w obu przypadkach (rys. 2 i 3).




Rys. 2. Zależność różnicy pomiędzy ciśnieniem atmosferycznym a wewnętrznym od obwodu balonu według doświadczenia pierwszego (na wykresie zaznaczono cztery serie pomiarowe)




Rys. 3. Zależność różnicy pomiędzy ciśnieniem atmosferycznym a wewnętrznym od czasu wypompowywania balonu *t* według doświadczenia drużyny „Pentagon" (*h* oznacza tu połowę wysokości słupa wody)

Z obu doświadczeń wynika, że dla małych wartości *R* ciśnienie zachowuje się zgodnie z przewidywaniami teoretycznymi przedstawionymi na rys. 1. Jednakże ciśnienie gwałtownie rośnie w miarę napompowywania. Oznacza to, że nasz model posługiwał się zbyt wyidealizowanymi założeniami do satysfakcjonującego opisania rzeczywistych baloników (za nagły wzrost ciśnienia odpowiadają najprawdopodobniej nieuwzględnione właściwości gumy). Jednak nawet gdybyśmy otrzymali wykres o podobnym kształcie, nie dostarczałby on nam wiarygodnych danych ilościowych, gdyż guma, z której wytwarzane są baloniki zmienia swe właściwości wraz z kolejnymi napompowaniami. Jest to zjawisko tzw. histerezy, w którym poprzednie stany układu wpływają na stan obecny. Taka dokładność nie jest jednak potrzebna do samego wyjaśnienia zjawiska przepływu powietrza pomiędzy dwoma balonikami.

Wszystkich uczniów szkół średnich czytających ten artykuł zachęcam do wzięcia udziału w najbliższej edycji Turnieju Młodych Fizyków – natychmiastowe udzielenie prawidłowej odpowiedzi na postawiony problem nie jest konieczne, liczy się przede wszystkim stosowanie metody naukowej. Regulamin Turnieju oraz aktualną listę problemów znaleźć można m.in. na polskiej stronie internetowej TMF (www.tmf.org.pl).

Referencje

[1] www.ilyam.org/SD_2015_IYPT_Reference_kit.pdf
[2] Ch.-Sh. Chen, *Two interconnected rubber balloons as a demonstration showing the effect of surface tension* (circle.ubc.ca, 2009)