



## KĄCIK ZADAŃ

*Sławomir Brzezowski*

*Instytut Fizyki UJ*

1. Rozważamy płaski kondensator, o powierzchni okładek  $S$  i odległości płytek  $d$ , wypełniony dielektrykiem o stałej dielektrycznej  $\epsilon_r$ . Kondensator naładowano do napięcia  $U$ . Jaką pracę  $W$  wykonano przy ładowaniu?

Pracę tę wypada uznać za równą energii naładowanego kondensatora. Porównaj tę energię z energią pola elektrycznego wypełniającego kondensator i wyjaśnij przyczynę różnicy tych dwóch wielkości.

### Rozwiązanie:

Pojemność kondensatora bez dielektryka wynosi  $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ . Pojemność kondensatora z dielektrykiem wynosi  $C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$ . Ładowanie kondensatora wymaga wykonania pracy

$$W = \frac{U^2 C_1}{2} = \frac{|\vec{E}|^2 d^2 \epsilon_0 \epsilon_r S}{2d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2} |\vec{E}|^2 S d,$$

gdzie  $\vec{E}$  jest natężeniem pola elektrycznego w kondensatorze (czyli we wnętrzu dielektryka).

Energia przechowywana przez pole elektryczne wynosi

$$W_{\vec{E}} = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 S d < W.$$

Przyczyna, dla której musimy wykonać pracę większą, niż trzeba dla zbudowania pola elektrycznego, jest następująca:

Dla spolaryzowania dielektryka musimy zdeformować jego cząsteczki (wyobraźmy sobie, że odkształcamy sprężystą kulę). W dielektryku zostaje więc zdeponowana pewna energia potencjalna o wartości równej  $W - W_{\vec{E}}$ , która jest zwracana w czasie rozładowywania kondensatora. Energię tę nazywamy energią polaryzacji.

2. W zbiorze zadań z fizyki Jędrzejewskiego i Kruczka (wydanie 4) znajdujemy zadanie 22-25R z fałszywym rozwiązaniem, na co zwrócił uwagę Ludomir Zommer w artykule na str. 38 oraz Jerzy Bronisław Brojan na łamach FORUM Czytelników *Fizyki w Szkole*. Zadanie polega na obliczeniu ładunku, który powinien być

wprowadzony na okładki pionowego prostokątnego kondensatora płaskiego dotykającego dolnymi krawędziami powierzchni oleju, aby olej wypełnił całe wnętrze kondensatora. Podano stałą dielektryczną oleju  $\varepsilon_i$  i jego gęstość  $\rho$ , powierzchnię okładek  $S$  oraz ich wysokość  $h$ .

Autorzy zbioru opierają swoje rozwiązanie na bilansie energii polegającym na przyrównaniu energii kondensatora próżniowego naładowanego ładunkiem  $Q$  do sumy energii tego (tak samo naładowanego) kondensatora wypełnionego dielektrykiem i grawitacyjnej energii potencjalnej  $mg \frac{h}{2}$  wciągniętego do kondensatora oleju o masie  $m$ . Bilans ten, jak słusznie zauważył Pan Zommer, nie uwzględnia energii kinetycznej, jaką pozbawiony lepkości dielektryk uzyskałby podczas wciągania do wnętrza kondensatora, a którą realny dielektryk rozproszy.

Zasada zachowania energii może być zastosowana do rozwiązania tego zadania, ale trzeba z niej skorzystać w sposób właściwy. W tym celu rozważmy na początek problem zastępczy polegający na wprowadzaniu do naładowanego kondensatora kostki wykonanej z dielektryka stałego, o kształcie prostopadłościanu szczelnie wypełniającego jego wnętrze.

Autorzy zadania z cytowanego zbioru słusznie twierdzą, że przyczyną wciągania dielektryka jest niejednorodność pola na brzegu kondensatora (w niejednorodnym polu elektrycznym dipole wypełniające spolaryzowany dielektryk podlegają sile zwróconej w stronę rosnącego pola), ale bilans energii, który proponują w rozwiązaniu, jest błędny.

Wyobraźmy sobie następujące doświadczenie:

Płaski kondensator próżniowy, występujący w naszym zadaniu, ustawiamy poziomo (lub przenosimy się do laboratorium, w którym panuje stan nieważkości). Kondensator utrzymujemy podłączony do źródła stałego napięcia  $U$ . Od strony tego boku, który miał być zanurzony w oleju, wsuwamy (powoli) opisaną wyżej kostkę z dielektryka. Kostka jest do kondensatora wciągana, więc przy jej wsuwaniu zostanie nad „nami” wykonana praca. Ten właśnie składnik bilansu energii został przeoczony przez Autorów zbioru zadań i ujawni się w postaci energii kinetycznej i energii drgań termicznych.

Obliczmy wspomnianą pracę.

Przy ustalonej różnicy potencjałów między okładkami mamy gwarancję tego, że kondensator będzie wypełniony nie zmieniającym się polem elektrycznym (zarówno w części pustej, jak i tej już wypełnionej dielektrykiem) o wartości  $E = \frac{U}{d}$ .

Będzie to oczywiście realizowane przy rosnącej podczas wsuwania dielektryka wartości ładunku zgromadzonego na okładkach kondensatora. Nie zmieniający się kształt pola na zewnątrz i wewnątrz kondensatora sprawi, że płytki dielektryka

będzie podczas wsuwania wciągana siłą  $\vec{F}$  o stałej wartości, co ułatwi obliczenie pracy mechanicznej wykonanej przez kondensator. Praca ta wyniesie oczywiście  $W_{\text{mech}} = Fh$ , gdzie  $h$  jest długością boków, wzdłuż których przesuwa się płytka.

Odwołamy się teraz do bilansu energii dla obliczenia pracy mechanicznej.

Energia kondensatora próżniowego (znajdującego się już pod napięciem  $U$ ) wynosi

$$W_0 = \frac{U^2 C_0}{2}, \quad \text{gdzie} \quad C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Energia kondensatora z wsuniętą płytką wynosi  $W_1 = \frac{U^2 C_1}{2}$ , gdzie  $C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$ .

Przy wsuwaniu płytki źródło napięcia doładowało kondensator ładunkiem

$$\Delta Q = U(C_1 - C_0) = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)SU}{d},$$

czyli wprowadziło do układu energię

$$W_{\mu ad} = U \Delta Q = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)SU^2}{d}.$$

Mamy już wszystkie elementy dla przeprowadzenia bilansu energii:

$$W_0 + W_{\mu ad} = W_1 + W_{\text{mech}},$$

czyli

$$\frac{\varepsilon_0 SU^2}{2d} + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)SU^2}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r SU^2}{2d} + Fh,$$

co po uporządkowaniu daje

$$Fh = \frac{\varepsilon_0 \chi_e SU^2}{2d}, \quad \text{gdzie} \quad \chi_e = \varepsilon_r - 1 \quad \text{jest podatnością elektryczną dielektryka.}$$

Tak więc płytka dielektryka wciągana jest do wnętrza kondensatora siłą o wartości

$$F = \frac{\varepsilon_0 \chi_e SU^2}{2hd}.$$

Możemy teraz wrócić do naszego zadania. Siła  $\vec{F}$  zdoła utrzymać ciecz dielektryczną w pionowo ustawionym kondensatorze, jeżeli jej wartość będzie równa

$$\rho g S d, \quad \text{czyli jeżeli zachodzi} \quad \rho g d = \frac{\varepsilon_0 \chi_e U^2}{2hd}.$$

Możemy teraz obliczyć ładunek  $Q$  zgromadzony na kondensatorze po wprowadzeniu dielektryka między okładki:

$$Q = UC_1 = U \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} = \varepsilon_r S \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 \rho g h}{\chi_e}}.$$

Podane w zbiorze Jędrzejewskiego i Kruczka rozwiązanie  $Q = S \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 \varepsilon_r \rho g h}{\chi_e}}$  jest błędne.



## KSIĄŻKI NADEŚLANE

*O fizyce i energii jądrowej*, Bohdan Dziunikowski  
AGH, Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne, Kraków 2001

W książce przedstawiono podstawowe zagadnienia dotyczące zjawisk jądrowych i różnego typu reaktorów jądrowych. Tekst ma formę zwięzłą i łatwą w czytaniu, dzięki oszczędnemu stosowaniu formalizmu matematycznego, skupieniu się na istocie omawianych zagadnień, starannemu doborowi materiału ilustracyjnego, a także licznym dygresjom historycznym. W książce opisano, między innymi, przyczyny i skutki katastrofy w Czarnobylu, a także efekty chemiczne i biologiczne przemian jądrowych i oddziaływania promieniowania jądrowego z materią.

Książka może być pomocą dla nauczycieli fizyki i pracowników instytucji zajmujących się ochroną środowiska.