Skalary, wektory i co dalej?

Bernard Jancewicz
Uniwersytet Wrocławski

1. Wektory

W podstawowym nauczaniu fizyki mówimy, że wielkości fizyczne są dwóch typów. Jeśli do określenia potrzebna jest tylko liczba (dodatnia lub ujemna) i jednostki, to taką wielkość nazywamy *skalarem*. Jeśli oprócz tego trzeba podać kierunek, to taką wielkość uznajemy za *wektor*. Czasem wielkości wektorowe nazywa się *wielkościami skierowanymi*.

Tutaj uwaga natury terminologicznej. Przy określaniu wektora swobodnego w podręcznikach szkolnych wymienia się trzy jego cechy: *kierunek, zwrot* i *wartość*. Przy tym kierunek rozumie się jako prostą, na której leży wektor. Po ustaleniu kierunku można jeszcze wybierać jeden z dwóch możliwych zwrotów, zwanych *przeciwnymi*. Według tej definicji nie może być kierunków przeciwnych. Takie rozumienie słowa „kierunek" jest jednak sprzeczne ze znaczeniem w języku ogólnym[1] i z intuicją kojarzoną z tym słowem. Zresztą i fizycy nauczający na poziomie akademickim używają tego słowa w odniesieniu do pojęć obejmujących również zwrot, co przejawia się w mówieniu czy pisaniu o kierunkach przeciwnych. Konkretne przykłady znalazłem w dwóch podręcznikach autorów polskich, zob. [2, 3]. Warto też wiedzieć, że takie odrywanie kierunku od zwrotu występuje tylko w polskiej oświacie. Nie ma czegoś takiego w literaturze niemieckiej, rosyjskiej ani angielskojęzycznej.

Zupełnie niedawno natrafiłem na pierwszy podręcznik szkolny, mianowicie [4], w którym określone jest inne rozumienie kierunku. Otóż na str. 75 jest tam napisane: „*Kierunek wektora jest wyznaczony przez półprostą, na której on leży.*" A w przypisie dodano: „*W niektórych podręcznikach przy opisie wielkości wektorowych (...) jako kierunek przyjmuje się prostą, na której wektor leży. Konieczne jest wówczas podanie zwrotu wektora.*" Na tej samej stronie można znaleźć zdanie: „*na ciało działają jednocześnie dwie siły w przeciwnych kierunkach*".

Wobec tego w niniejszym artykule będę się trzymać definicji, według której wektor ma dwie istotne cechy: *kierunek* i *wartość*, a kierunek to prosta ze zwrotem.

Na pierwszych latach studiów wprowadza się rozróżnienie wektorów na dwa podtypy: wektory zwyczajne zwane *biegunowymi* i pseudowektory, zwane też

[1] „Kierunek – strona, w którą ktoś lub coś się zwraca, kieruje, porusza; także: droga, linia prowadząca do jakiegoś miejsca, celu" [1].

osiowymi. Wektorami biegunowymi są: wektor wodzący, przemieszczenie, prędkość, pęd, siła, dipolowy moment elektryczny, a osiowymi: prędkość kątowa, moment pędu, moment siły, dipolowy moment magnetyczny. Te dwa podtypy zachowują się różnie przy odbiciach i przy inwersji przestrzennej – wektory biegunowe odbijają się tak, jak tego oczekujemy, a wektory osiowe oprócz odbijania w wybranej płaszczyźnie trzeba pomnożyć przez minus jeden; natomiast przy inwersji wektory biegunowe zmieniają zwrot na przeciwny, a osiowe zachowują swój kierunek (ze zwrotem). Teraz trochę więcej o wektorach osiowych.

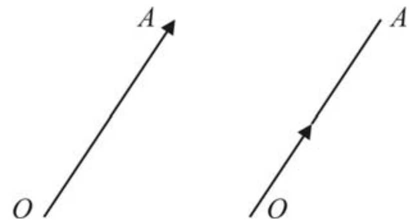
Przy rozważaniu równowagi na dźwigni posługujemy się *momentem siły* $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, gdzie $\vec{r}$ jest wektorem wodzącym, a $\vec{F}$ siłą. Obydwa czynniki tego iloczynu wektorowego są wektorami biegunowymi, wiec przy inwersji zmieniają zwrot na przeciwny – to oznacza, ze dwa razy występuje czynnik –1, zatem całość nie zmienia znaku. W takim razie moment siły jest wektorem osiowym. Z definicji iloczynu wektorowego wiemy, ze wektor $\vec{M}$ jest prostopadły do $\vec{r}$ i $\vec{F}$, czyli do płaszczyzny, w której obraca się dźwignia. Kto uczył tych zagadnień w szkole – wie, że to właśnie sprawia pewne kłopoty. Pojawia się bowiem pytanie: czemu warunek równowagi na dźwigni opisuje się przez wektory wychodzące poza płaszczyznę samej dźwigni? Zazwyczaj odpowiada się, że to wiąże się z osią obrotu dźwigni, a ta oś musi być prostopadła do dźwigni i płaszczyzny jej obracania. To jeszcze może być przekonujące.

Weźmy inny przykład: wirujące ciało sztywne. Przypisujemy mu *prędkość kątową* $\vec{\omega}$ i *moment pędu* (*kręt*) $\vec{L}$. Obie te wielkości są wektorami osiowymi i mają kierunek prostopadły do płaszczyzny obracania bryły. Co do zwrotu przyjęło się powoływanie na śrubę prawoskrętną, ale przecież śruba lewoskrętna byłaby równie dobra. Musimy chyba przyznać, że nie ma naturalnego sposobu przypisywania zwrotu wektorom $\vec{\omega}$ czy $\vec{L}$.

Jeszcze inny przykład: pole magnetyczne. Dwie wielkości służące do jego opisu: *natężenie pola magnetycznego* $\vec{H}$ i *indukcja magnetyczna* $\vec{B}$ są też wektorami osiowymi. Jakiś czas temu analogicznie do pola elektrycznego fizycy posługiwali się *liniami sił* pola magnetycznego jako krzywymi stycznymi do wektorów $\vec{B}$. Należy zadać pytanie: jakich sił? Tradycyjna odpowiedź, jaką można znaleźć w bardzo starych podręcznikach – są to siły działające na bieguny magnetyczne. Taka odpowiedź nie może zadowalać, bo jak dotąd nie wykryto pojedynczych biegunów magnetycznych. Pole magnetyczne wyznaczamy badając jego działanie na prądy elektryczne albo ruchome ładunki elektryczne. Siła działająca na pojedynczy ładunek elektryczny w ruchu jest zawsze prostopadła do wektora indukcji magnetycznej $\vec{B}$, a więc i do tzw. „linii sił". Dlatego nazywanie owych krzywych liniami sił jest błędne, gdyż odwołujemy się do działania pola magnetycznego na ładunki elektryczne.

W przytoczonych dotąd przykładach wielkości fizycznych są one wielkościami skierowanymi, ale przypisywany im – jak wektorom biegunowym – kierunek „jednowymiarowy" sprawia pewne kłopoty pojęciowe, nie jest więc do końca naturalny. Aby przekonać się o istnieniu innych możliwości, zapoznajmy się z wielkościami od dawna znanymi matematykom, mającymi kierunek „dwuwymiarowy".

Przedtem jednak przypomnijmy, że *obrazem geometrycznym* wektora jest odcinek skierowany ze strzałką przy wyróżnionym punkcie, który uznajemy za koniec odcinka, zob. rys. 1 po lewej. Strzałka może też być umieszczona gdzieś między punktami brzegowymi, zob. rys. 1 po prawej.



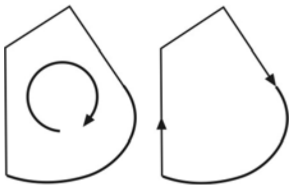
Rys. 1. Wektor z różnie zaznaczonym zwrotem

Wektor ma jako istotne cechy kierunek i wartość. Ale *kierunek* składa się z linii prostej, którą za Lounestem [5] nazywam *nastawieniem* wektora, oraz z grotu na tej prostej, którą wszyscy nazywamy *zwrotem*. Dwa wektory o tym samym nastawieniu nazywamy *równoległymi*. Dla ustalonego nastawienia możliwe są tylko dwa zwroty – nazywają się one *przeciwnymi*. Dwa wektory o tym samym kierunku możemy nazwać *zgodnie równoległymi*.

2. Wielowektory

Inna wielkość skierowana to *dwuwektor* (*bivector*), którego *nastawieniem* jest płaszczyzna, a *zwrotem* zakrzywiona strzałka leżąca na tej płaszczyźnie. Powinno być oczywistym, że dla ustalonego nastawienia możliwe są tylko dwa różne zwroty, które nazwiemy przeciwnymi. (Po zamknięciu owej zakrzywionej strzałki do okręgu zwrot jest zgodny z ruchem zegara albo przeciwny – patrz rys. 2.) *Wartość* dwuwektora to pole powierzchni. W ten sposób możemy przedstawiać dwuwektory jako figury płaskie z zakrzywionymi strzałkami na nich, patrz rys. 3 po lewej. Zwrot można też zobrazować jako strzałkę umieszczoną na brzegu figury, patrz rys. 3 po prawej. Kształt figury nie jest ważny, istotny jest tylko jej zwrot i pole powierzchni.

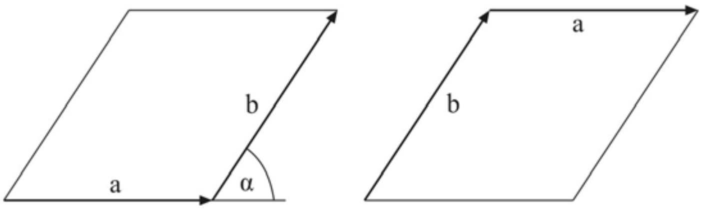
Rys. 2. Dwa zwroty dwuwymiarowe



Rys. 3. Dwuwektor z różnie zaznaczonym zwrotem

Podsumujmy cechy dwuwektora:

1. *kierunek:*
   (a) *nastawienie* – płaszczyzna,
   (b) *zwrot* – zakrzywiona strzałka na płaszczyźnie,
2. *wartość* – pole powierzchni.



Rys. 4. Iloczyn zewnętrzny wektorów

Dwuwektor można otrzymać z dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ następująco: wybieramy jeden z wektorów jako pierwszy, niech to będzie $\vec{a}$. Potem przez przesunięcie równoległe przykładamy początek wektora $\vec{b}$ do końca wektora $\vec{a}$ otrzymując dwa boki równoległoboku i wykreślamy dwa równoległe odcinki aby otrzymać cały równoległobok, zob. rys. 4 po lewej. Równoległobok jest figurą mającą obrazować szukany dwuwektor $\overline{B}$ .Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ leżące na brzegu figury wyznaczają zwrot $\overline{B}$ (na rysunku jest to zwrot przeciwny do ruchu wskazówki zegara). Dwuwektor $\overline{B}$ otrzymany w wyniku tego przepisu nazywa się *iloczynem zewnętrznym wektorów* $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a jako znak mnożenia wybrano klin:

$$\overline{B} = \vec{a} \wedge \vec{b} \tag{1}$$

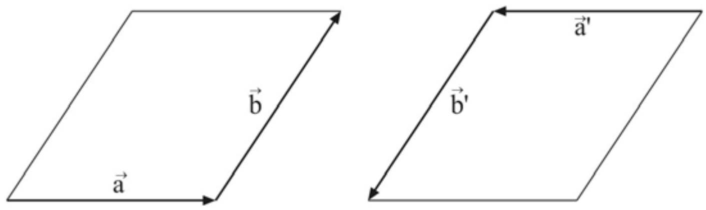
Wartość otrzymanego dwuwektora to pole powierzchni równoległoboku wyrażone wzorem $|\overline{B}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha$, gdzie α jest kątem między wektorami. Jest to taka sama wartość jak dla iloczynu wektorowego, więc możemy uznać, że iloczyn zewnętrzny powinniśmy wykorzystywać tam, gdzie do tej pory mieliśmy iloczyn wektorowy wektorów biegunowych. Iloczyn wektorowy $\vec{B} = \vec{a} \times \vec{b}$ jest wektorem prostopadłym do dwuwektora $\overline{B}$ i spełniającym regułę śruby prawoskrętnej.

Przedstawienie dwuwektora w postaci (1) (zwane także *rozkładem na czynniki w iloczynie zewnętrznym*) oczywiście nie jest jednoznaczne, bo jego czynniki $\vec{a}$ i $\vec{b}$ mogą być inne, byleby wyznaczały tę samą płaszczyznę i to samo pole powierzchni figury. Po przyłożeniu do siebie wektorów $\vec{b}$ i $\vec{a}$ w innej kolejności (patrz rys. 4 po prawej) widzimy zmianę zwrotu na przeciwny, co wyrażamy tożsamością

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a} \tag{2}$$

oznaczającą, że iloczyn zewnętrzny wektorów jest *antyprzemienny.* Właśnie z możliwości przedstawienia dwuwektorów przez dwa wektory wzięła się ich nazwa.

Warto jeszcze zobaczyć, jak działa inwersja przestrzenna na dwuwektory. Weźmy dwuwektor z lewej części rys. 4 i poddajmy go inwersji względem środka równoległoboku, co pokazuje rys. 5. Widzimy, że po inwersji wektory stały się przeciwne, ale dwuwektor jest taki sam jak przedtem, bo jego zwrot jest nadal przeciwny do ruchu wskazówek zegara. Rozumiemy więc, dlaczego dwuwektory zachowują się względem inwersji inaczej niż wektory.

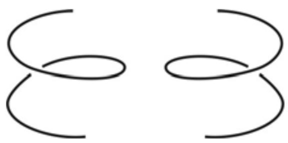


Rys. 5. Inwersja działająca na dwuwektor

Można pójść dalej i wprowadzić wielkości trójwymiarowe z naturalnym nastawieniem jako przestrzenią trójwymiarową. Trzeba jednak zdefiniować *zwrot trójwymiarowy* – otóż jest to połączenie ruchu okrężnego z nierównoległym do niego ruchem postępowym. Rysujemy go w postaci dwóch splecionych strzałek, z których jedna jest prostoliniowa, jak na rys. 6. Zwrot jest uważany za taki sam, jeśli obie strzałki zostają jednocześnie obrócone, taką obróconą parę strzałek też widać na rys. 6. Dlatego możliwe są tylko dwa różne zwroty trójwymiarowe w przestrzeni trójwymiarowej – drugi zwrot ukazany jest na rys. 7 – zwane *przeciwnymi*. Tym dwóm zwrotom odpowiadają dwa rodzaje śrub (które łączą ruch postępowy z obrotowym): lewoskrętna i prawoskrętna, albo dwa typy linii śrubowych pokazane na rys. 8. Z tych powodów zwrot trójwymiarowy nazywany jest też *skrętnością prawą* albo *lewą*.

Rys. 6. Jeden zwrot trójwymiarowy

Rys. 7. Drugi zwrot trójwymiarowy

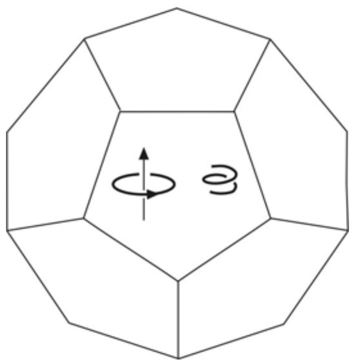


Rys. 8. Dwa zwroty trójwymiarowe

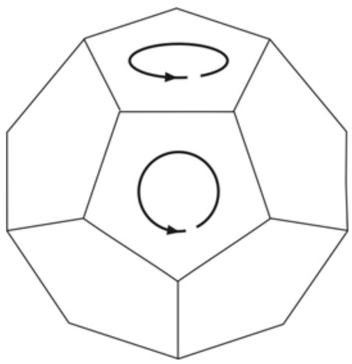
Jesteśmy teraz gotowi zdefiniować *trójwektor* (*trivector*) jako obiekt geometryczny o następujących cechach:

1. *kierunek:*
   (a) *nastawienie* – przestrzeń 3-wymiarowa,
   (b) *zwrot* – skrętność;
2. *wartość* – objętość.

Obrazem geometrycznym trójwektora jest bryła z dwiema splecionym strzałkami albo fragmentem linii śrubowej w środku, patrz rys. 9. Na tym rysunku pokazany jest trójwektor o zwrocie prawoskrętnym.



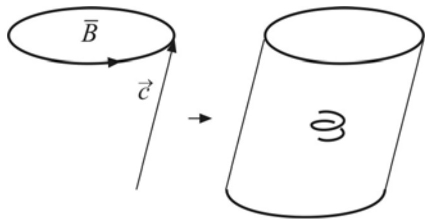
Rys. 9. Trójwektor ze zwrotem w środku



Rys. 10. Trójwektor ze zwrotem na powierzchni

Można też przesunąć zakrzywioną strzałkę w stronę wskazaną przez strzałkę prostoliniową i umieścić tę zakrzywioną na brzegu bryły, jak to pokazuje rys. 10. Oba rysunki 9 i 10 ukazują trójwektory o tej samej skrętności prawej, ale różnie zaznaczonej.

Trójwektor można zbudować z wektora $\vec{c}$ i dwuwektora $\overline{B}$ następująco. Koniec wektora $\vec{c}$ przykładamy do brzegu $\overline{B}$ i przesuwamy go równolegle po tym brzegu, aby otrzymać ukośny walec o podstawie $\overline{B}$, patrz rys. 11.

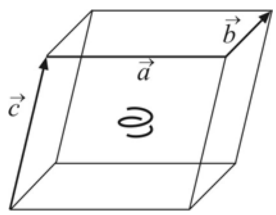


Rys. 11. Iloczyn zewnętrzny dwuwektora z wektorem

W ten sposób otrzymuje się wszystkie potrzebne cechy trójwektora $\overline{T}$: jego zwrotem jest zakrzywiona strzałka dwuwektora $\overline{B}$ połączona z prostoliniową strzałką wektora $\vec{c}$; w przykładzie ukazanym na rysunku 11 otrzymujemy skrętność prawą. Nastawienie jest tylko jedno w przestrzeni trójwymiarowej, a wartość jest naturalnie dana jako objętość walca. Przedstawione działanie przypisujące trójwektor $\overline{T}$ czynnikom $\vec{c}$ i $\overline{B}$ nazywa się *iloczynem zewnętrznym* i oznaczane jest klinem: $\overline{T} = \vec{c} \wedge \overline{B}$. Określamy też iloczyn zewnętrzny w odwrotnej kolejności czynników zakładając *przemienność* tego iloczynu:

$$\overline{B} \wedge \vec{c} = \vec{c} \wedge \overline{B} \tag{3}$$

Trójwektor można też przedstawić jako iloczyn zewnętrzny trzech wektorów po rozkładzie dwuwektora na czynniki $\overline{B} = \vec{a} \wedge \vec{b}$, co daje $\overline{T} = \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})$, patrz rys. 12. Właśnie z tej możliwości przedstawiania trójwektorów wzięła się ich nazwa.



Rys. 12. Iloczyn zewnętrzny trzech wektorów

Dla sprawdzenia własnego rozumienia proponuję dwa zadania.

Zadanie 1. Pokazać na rysunkach, że trzy trójwektory $\vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})$, $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ i $\vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a})$ są równe.

W ten sposób wyrażenie $\vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})$ jest symetryczne względem cyklicznej zamiany czynników. Udowodniona w zadaniu 1 równość $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})$ w połączeniu z (3) daje $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$, co oznacza, że iloczyn zewnętrzny wektorów jest *łączny*.

Zadanie 2. Zilustrować na rysunkach łączność $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$.

Omówione dotąd dwuwektory i trójwektory, a także znane dobrze skalary i wektory obejmuje się łączną nazwą *wielowektorów* (*multivectors*). Przy czym skalar to wielowektor zerowego rzędu, wektor – pierwszego, dwuwektor – drugiego, trójwektor – trzeciego rzędu. Są do pomyślenia również twory czwartego i wyższych rzędów, ale do tego nie wystarczy już przestrzeń trójwymiarowa. Ładne zastosowania wielowektorów w geometrii można znaleźć w książce Jefimowa i Rozendorna [6].

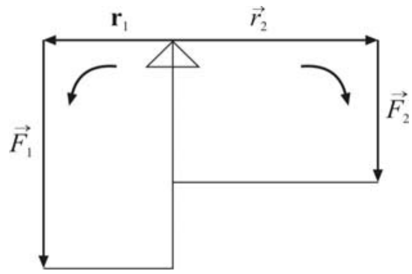
3. Wielkości dwuwektorowe w mechanice

Wielkości fizyczne opisywane dotąd przez pseudowektory warto obrazować przez dwuwektory, dzięki czemu wielkości te stają się bardziej poglądowe. Otóż moment siły $\overline{M}$, prędkość kątowa $\overline{\omega}$ i kręt $\overline{L}$ przyjmiemy za dwuwektory. Ich wartości zostawiamy bez zmian, a dwuwymiarowy kierunek pojawia się naturalnie w wyniku analizy zjawisk opisywanych przez te wielkości. W przypadku momentu siły i krętu wystarczy napisać wzory wyrażające je przez zwykłe wektory:

$$\overline{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} \qquad \overline{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}\,. \tag{4}$$

Wiadomo, że kolejność czynników jest ważna, ale tutaj zadana jest ona przez samo zjawisko. Dla momentu siły wektor siły $\vec{F}$ jest zaczepiony na końcu wektora wodzącego $\vec{r}$, bo tak rozumie się ramię siły (odcinek skierowany poprowadzony od punktu odniesienia do punktu przyłożenia siły). Dla krętu jest podobnie: wektor pędu $\vec{p}$ jest umiejscowiony na końcu wektora wodzącego $\vec{r}$ opisującego położenie cząstki o pędzie $\vec{p}$.

Przy interpretacji momentu siły jako powierzchni skierowanej można prosto wyrazić warunek równowagi dźwigni, zob. rys. 13. Dwuwektory przedstawione przez dwa równoległoboki skierowane $\vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1$ oraz $\vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2$ powinny być przeciwne.



Rys. 13. Warunek równowagi dzwigni dwustronnej. Wierzchołek trójkąta jest punktem podparcia

W przypadku prędkości kątowej $\overline{\omega}$ kierunkiem jest płaszczyzna, w której odbywa się obracanie, a zwrot jest zadany przez obrót. Nawet sam kąt obrotu $\overline{\varphi}$ możemy uważać za wielkość dwuwektorową, bo zawsze wiąże się z pewną płaszczyzną, w której się go mierzy. Wartość dwuwektora $\overline{\varphi}$ będzie oczywiście równa wartości skalarnej kąta. Zauważmy, że $\overline{\omega}$ i $\overline{\varphi}$ są przykładami dwuwektorów, których nie musimy określać przez iloczyn zewnętrzny wektorów. W szczególnie prostym przypadku obracania w stałej płaszczyźnie prędkość kątowa i kąt są związane prostym wzorem

$$\overline{\omega} = \frac{d\overline{\varphi}}{dt} \tag{5}$$

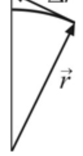
analogicznym do związku między wektorem wodzącym a prędkością liniową.

Dla ruchu płaskiego oprócz prędkości liniowej i kątowej wprowadza się jeszcze *prędkość polową*. Jest to pochodna pola powierzchni zakreślanej przez wektor wodzący względem czasu. Pole Δs powierzchni zakreślanej w czasie Δt, to w przybliżeniu pole trójkąta o bokach $\vec{r}$ oraz $\Delta\vec{r} = \vec{v}\Delta t$, patrz rys. 14. W takim razie dwuwektor tej powierzchni zapiszemy

$$\overline{\Delta s} \approx \frac{1}{2}\vec{r} \wedge \Delta\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{r} \wedge \vec{v}\Delta t. \tag{6}$$

Stosownie do tego dwuwektor prędkości polowej wynosi

$$\overline{\sigma} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{\Delta s}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\vec{r} \wedge \vec{v}. \tag{7}$$



Rys. 14. Powierzchnia zakreślana w ruchu po okręgu

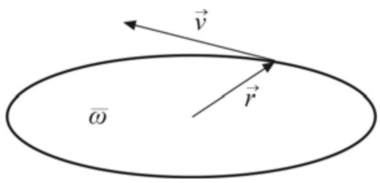
W tradycyjnym języku znany jest związek między prędkością kątową $\overline{\omega}$ a prędkością liniową $\vec{v}$ i wektorem wodzącym:

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2}. \tag{8}$$

Przy dopuszczeniu dwuwektorów należałoby ten związek zapisać jako

$$\overline{\omega} = \frac{\vec{r} \wedge \vec{v}}{r^2} \tag{9}$$

Znowu nie ma dowolności w kolejności czynników iloczynu zewnętrznego, bo to właśnie wektor $\vec{v}$ jest zaczepiony w punkcie $\vec{r}$, a nie na odwrót. Sytuację opisaną wzorem (9) zilustrowaliśmy na rys. 15.



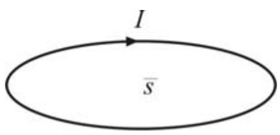
Rys. 15. Prędkość kątowa w ruchu po okręgu

W podanych przykładach zastąpienie wektorów osiowych przez dwuwektory sprzyja poglądowości w przedstawianiu wielkości fizycznych. Trzeba tylko uznać, że kierunki owych wielkości są wyznaczone przez płaszczyzny istotne dla rozważanych zjawisk. Są to więc wielkości skierowane, ale o kierunku dwuwymiarowym.

4. Wielkości dwuwektorowe w magnetostatyce

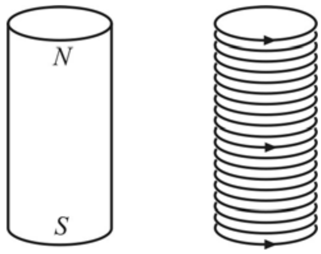
Pole magnetyczne jest wytwarzane przez prądy elektryczne. Najlepszym modelem fizycznym dwuwektora jest płaski obwód elektryczny, gdyż on sam przez siebie zadaje potrzebne cechy dwuwektora. Jego wartością jest właśnie pole powierzchni objętej przez obwód, jego nastawieniem jest płaszczyzna obwodu, a zwrot jest zadany przez kierunek płynącego prądu. Ten dwuwektor można nazwać *powierzchnią skierowaną* $\overline{s}$ obwodu, patrz rys. 16. Związana z nim jest następna wielkość dwuwektorowa, mianowicie *moment magnetyczny* $\overline{m} = I\,\overline{s}$ obwodu, gdzie I jest natężeniem prądu. Wobec tego dotychczasowe traktowanie momentu magnetycznego jako wektora i nazywanie go momentem dipolowym nie jest właściwe. Układ fizyczny posiadający ten moment nie jest dipolem rozumianym jako zestaw dwóch biegunów (łac. *di-polus* = podwójny biegun), lecz czymś płaskim, dwuwymiarowym. Igor Tamm [7] nazywa to *łuską magne-*

tyczną. Moment magnetyczny powinno się raczej nazywać *momentem łuskowym* dla podkreślenia jego dwuwymiarowego charakteru[2].



Rys.16. Powierzchnia skierowana obwodu elektrycznego

Jest jeszcze jedno pytanie, na które warto odpowiedzieć. Na ogół magnes jest obiektem trójwymiarowym, a obwód elektryczny raczej płaskim. Jak więc można zastępować jeden przez drugi? Otóż trzeba uważać magnes za stos łusek magnetycznych, co ilustrujemy na rys. 17.



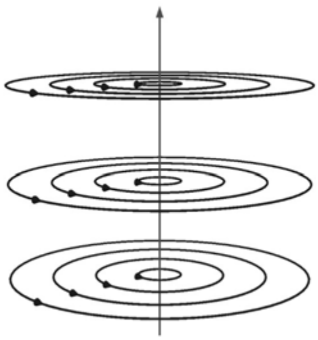
Rys. 17. Magnes jako stos obwodów elektrycznych

Wielkości opisujące pole magnetyczne, tzn. natężenie pola magnetycznego $\vec{H}$ i indukcję magnetyczną $\vec{B}$ tradycyjnie uważano za wektory osiowe. Teraz uznamy je za dwuwektory $\overline{H}$ i $\overline{B}$. Jeśli już się na to zgodzimy, to możemy się zastanowić nad tym, czym zastąpić używane dotąd pojęcie linii pola magnetycznego. Otóż zamiast liniami należy teraz posługiwać się powierzchniami. Wprowadzam więc pojęcie *powierzchni pola magnetycznego* według następującej definicji – są to powierzchnie gładkie, do których w każdym punkcie są styczne dwuwektory $\overline{B}$ indukcji magnetycznej. Zauważmy, że ta definicja jest analogiczna do określenia linii pola elektrycznego. Owym powierzchniom trzeba jeszcze nadać zwrot zgodny ze zwrotem dwuwektora $\overline{B}$. Warto podać kilka przykładów powierzchni pola magnetycznego dla najprostszych układów wytwarzających pola magnetyczne.

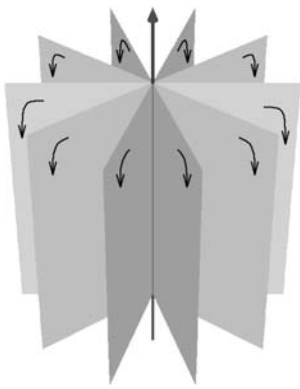
Skoro dwuwektory są prostopadłe do wektorów $\vec{B}$, to zdefiniowane przed chwilą powierzchnie są prostopadłe do tradycyjnych linii pola magnetycznego. To spostrzeżenie pomaga znaleźć powierzchnie pola magnetycznego wokół

[2] Dla niepłaskiego obwodu elektrycznego jego powierzchnię skierowaną i odpowiednio do tego łuskowy moment magnetyczny można określić za pomocą pewnej całki krzywoliniowej, której dla zwięzłości prezentacji nie będę podawać.

nieskończonego przewodu prostoliniowego, w którym płynie prąd elektryczny. Przypomnijmy, że linie pola są wtedy współśrodkowymi okręgami prostopadłymi do samego przewodu, jak pokazuje rys. 18. Po chwili zastanowienia dojdziemy do przekonania, że rodzina powierzchni prostopadłych do tych linii to półpłaszczyzny przechodzące przez sam przewód i odchodzące do nieskończoności, jak na rys. 19. Po nadaniu tym półpłaszczyznom zwrotów przekonujemy się, że są to zwroty zgodne ze zwrotem prądu płynącego w przewodzie, jeśli sam przewód uznamy za brzeg każdej półpłaszczyzny.

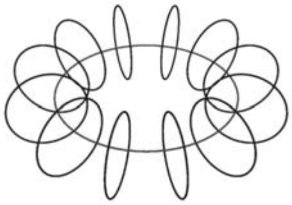


Rys. 18. Linie pola magnetycznego dla prądu prostoliniowego

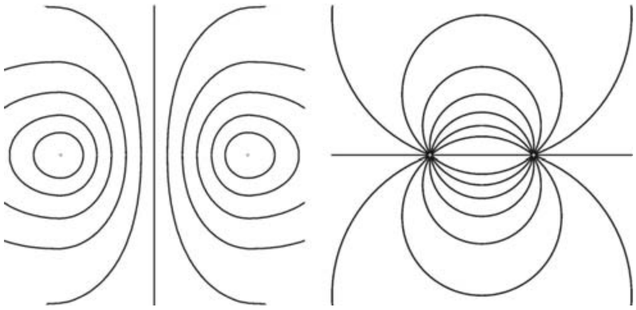


Rys. 19. Powierzchnie pola magnetycznego dla prądu prostoliniowego

Innym przykładem jest kołowa pętla z prądem (obwód kołowy). W tym przypadku linie pola magnetycznego są krzywymi zamkniętymi, leżącymi w płaszczyznach prostopadłych do pętli i przechodzących przez jej środek, patrz rys. 20. Na rys. 21 po lewej ukazano ich więcej w jednej z takich płaszczyzn. Przekroje powierzchni pola z ową płaszczyzną są widoczne na rys. 21 po prawej.

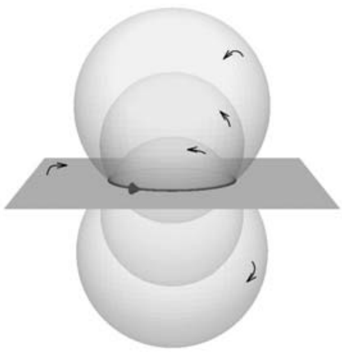


Rys. 20. Linie pola magnetycznego wokół obwodu kołowego



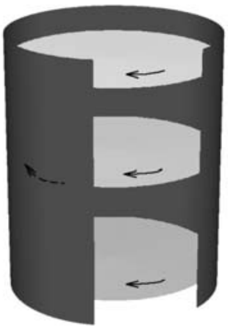
Rys. 21. Pole magnetyczne obwodu kołowego ukazane w płaszczyźnie prostopadłej do obwodu i przechodzącej przez jego środek. Po lewej: linie pola. Po prawej: powierzchnie pola, przecięte z płaszczyzną

Potrzebne powierzchnie pola otrzymuje się przez obracanie tych krzywych wokół osi symetrii obwodu, zob. rys. 22. Są one swoistymi „bąblami" przechodzącymi przez przewodnik kołowy. Jedna z powierzchni pola jest płaszczyzną samej pętli z przeciwnymi zwrotami wewnątrz i na zewnątrz pętli. Ta płaszczyzna jest zaznaczona na rys. 22 mocniejszym szarym kolorem.



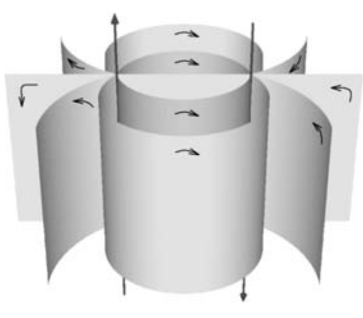
Rys. 22. Powierzchnie pola magnetycznego wokół obwodu kołowego

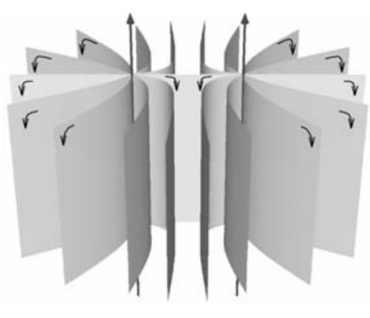
Pamiętamy, że linie pola elektrycznego zaczynają się i kończą na ładunkach (jeśli w ogóle mają jakiś koniec). Interpretujemy tę cechę mówiąc, że ładunki elektryczne są źródłami pola elektrycznego. Omówione dotąd przykłady prądów elektrycznych (linia prosta i okrąg) ukazują analogiczną cechę pola magnetycznego: powierzchnie pola mają swoje brzegi na prądach będących źródłami pola magnetycznego. Ponadto zwroty tych powierzchni są zgodne ze zwrotami prądów płynących na ich brzegach. Widać to bardzo ładnie na następnym przykładzie, mianowicie polu magnetycznym w solenoidzie. Tam powierzchnie pola są prostopadłe do osi solenoidu, przez co kończą się na prądach, a zwroty mają zgodne z prądami, co ilustruje rys. 23 dla solenoidu o przekroju kołowym.



Rys. 23. Powierzchnie pola magnetycznego w solenoidzie kołowym

Warto jeszcze pokazać powierzchnie pola magnetycznego wytwarzanego przez dwa równoległe nieskończone przewody prostoliniowe. Na rys. 24 prądy o jednakowym natężeniu płyną w kierunkach przeciwnych, a na rys. 25 w zgodnych. W obydwu przykładach powierzchnie pola w punktach bardzo bliskich przewodom są podobne do sytuacji ukazanej na rys. 19, gdyż w pobliżu jednego przewodu jego pole przeważa nad polem od drugiego przewodu. W przypadku zgodnych prądów powierzchnie pola bardzo daleko od pary przewodów znowu są podobne do sytuacji z rys. 19, ponieważ w dużej odległości dwa przewody stają się nieodróżnialne i można je traktować jak jeden przewód z prądem o podwojonym natężeniu.



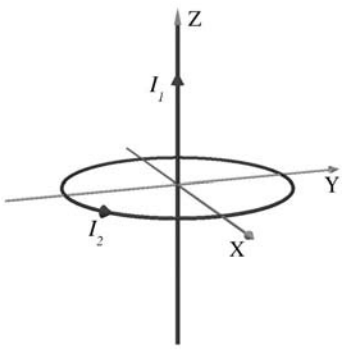


Rys. 24. Powierzchnie pola magnetycznego dla Rys. 25. Powierzchnie pola magnetycznego dla

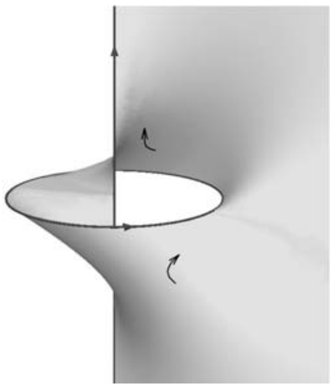
dwóch równoległych prądów prostoliniowych, płynących w przeciwnych kierunkach

dwóch równoległych i zgodnych prądów prostoliniowych

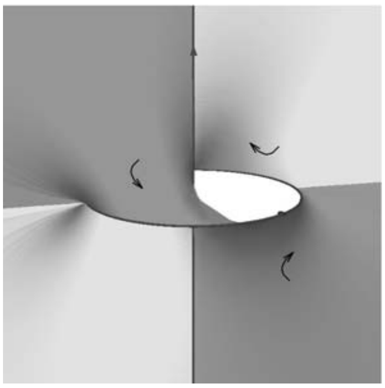
Udało mi się jeszcze znaleźć [8] powierzchnie pola dla superpozycji (złożenia) dwóch pól magnetycznych: jednego pochodzącego od prądu prostoliniowego o natężeniu I_1 i drugiego od prądu kołowego o natężeniu I_2, patrz rys. 26. Na rys. 27 jest ukazana jedna taka powierzchnia dla $I_1 = I_2$, a na rys. 28 dla $I_2 = 2I_1$. Pozostałe powierzchnie otrzymuje się przez obracanie tej jednej wokół przewodu prostoliniowego.



Rys. 26. Konfiguracja dwóch prądów: prostoliniowego i kołowego

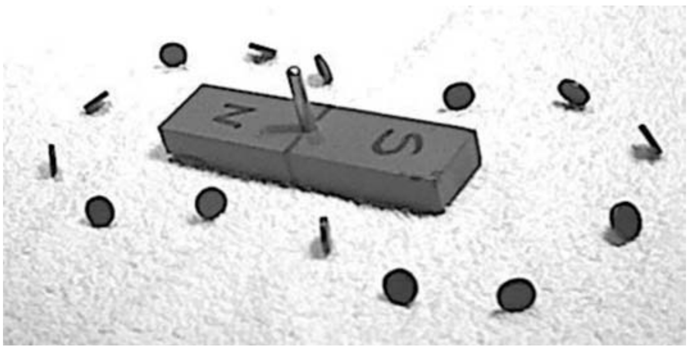


Rys. 27. Powierzchnia pola magnetycznego dla konfiguracji z rys. 26, gdy $\frac{I_2}{I_1} = 1$



Rys. 28. Powierzchnia pola magnetycznego dla konfiguracji z rys. 26, gdy $\frac{I_2}{I_1} = 2$

Pojęcie linii pola magnetycznego jest mocno utrwalone w tradycji fizyki. Bierze się ono z dobrze znanego pokazu ułożenia opiłków żelaza wokół magnesu. Można jednak pokazać inne doświadczenie z użyciem małych namagnesowanych krążków ułożonych w pobliżu większego magnesu, patrz rys. 29. Namagnesowanie każdego krążka jest prostopadłe to jego głównej płaszczyzny. Magnes sztabkowy ma długość około 10 cm. Przy wykonywaniu zdjęcia małe magnesy zostały ułożone na ręczniku, aby się nie przesuwały ku większemu. Ich pochylenie dowodzi, że samo pole magnetyczne je utrzymuje i nie zostały one ustawione ręką. Ta demonstracja jest łatwa do wykonania dla każdego. Jeśli zmusimy magnesiki do płaskiego ułożenia na ręczniku, a następnie cofniemy rękę, to magnesiki same powrócą do położenia pochylonego albo pionowego. Jak widać na tym zdjęciu, płaskie magnesiki są prostopadłe do (łatwych do wyobrażenia) linii pola. W ten sposób obrazują one dwie spośród powierzchni pola magnetycznego wokół magnesu sztabkowego.



Rys. 29. Dwie powierzchnie pola magnetycznego ukazane w rzeczywistym doświadczeniu

Na zakończenie chcę zaznaczyć, że nie postuluję całkowitego usunięcia wektorów osiowych z fizyki. Mają one wszak swoje zalety rachunkowe czy graficzne (trudniej jest narysować powierzchnie niż linie). Uważam tylko, że w procesie nauczania powinno się znaleźć miejsce na wskazanie dwuwektorowej natury pewnych wielkości fizycznych. Następnie można stwierdzić, że istnieje równoważny opis matematyczny pozwalający zastąpić je przez wektory osiowe, co niekiedy upraszcza pewne obliczenia czy przedstawienie graficzne.

Literatura

[1] *Uniwersalny słownik języka polskiego*, red. Stanisław Dubisz, t.2, PWN, Warszawa 2003.

[2] Andrzej K. Wróblewski, Janusz A. Zakrzewski, *Wstęp do fizyki*, t. 1, PWN, Warszawa 1976, s. 64–66.

[3] Roman S. Ingarden, Andrzej Jamiołkowski, *Elektrodynamika klasyczna*, PWN, Warszawa 1980, s. 176 i 266.

[4] Jan Mostowski, Włodzimierz Natorf, Nina Tomaszewska, *Fizyka i astronomia. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum*, WSiP, Warszawa 2002.

[5] Pertti Lounesto, Risto Mikkola, Vesa Vierros, *J. Comp. Math. Sci. Teach*. 9(1989)93.

[6] N.W. Jefimow, E.R. Rozendorn, *Algebra liniowa wraz z geometrią wielowymiarową*, PWN, Warszawa 1974, rozdz. 10.

[7] I.E. Tamm, *Podstawy teorii elektryczności*, WNT, Warszawa 1967, s. 216.

[8] Bernard Jancewicz, Piotr Brzeski, „Magnetic field surfaces", *European Journal of Physics*, 26(2005), s. 617–634.

Od Redakcji: Zazwyczaj w szkole przed wprowadzeniem wektora swobodnego, którym jest klasa wektorów zaczepionych, wprowadza się właśnie wektory zaczepione. Trzeba podać wtedy punkt przyłożenia wektora. Jest to oczywiste, gdy mówimy o wektorze położenia. Okazuje się, że przejście od wektora zaczepionego do swobodnego jest związane z poważną przeszkodą poznawczą, z przejściem do wyższego stopnia abstrakcji. Uczniowie szukają punktu przyłożenia wektora, który nie zawsze jest oczywisty. Jest to źródłem trudności w zrozumieniu reguł składania wektorów (np. prędkości). Omawiane w szkole przykłady, niekoniecznie ułatwiają pokonanie tej trudności. Na przykład siły są wektorami zaczepionymi, które w ciele stałym można przesuwać jedynie wzdłuż linii prostej działania.

Z.G-M