



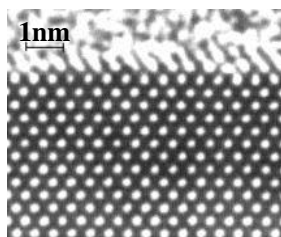
Dyfrakcja fal elektromagnetycznych na sieciach przestrzennych

*Jerzy Ginter
Wydział Fizyki UW*

Dyfrakcja fal elektromagnetycznych na przestrzennych strukturach periodycznych jest interesująca co najmniej w dwóch dziedzinach.

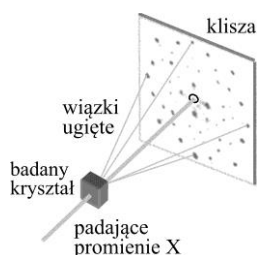
I. Dyfrakcja promieni Roentgena na kryształach

Dyfrakcję promieni Roentgena na kryształach rozpoczęły słynne prace Maxa von Lauego¹, potwierdzające atomową budowę materii i fakt, że w kryształach atomy ustawione są w regularnej sieci przestrzennej. Obecnie przestrzenny periodyczny układ atomów kryształów można wprost oglądać, na przykład za pomocą mikroskopu elektronowego (rys. 1).

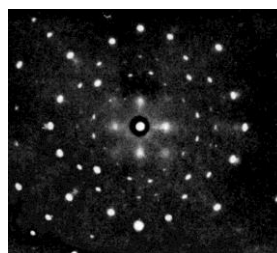


Rys. 1. Fotografia z mikroskopu elektronowego. Na dole monokryształ krzemu Si, na górze bezpostaciowa krzemionka SiO₂

W tak zwanej metodzie Lauego na monokryształ kieruje się **niemonochromatyczną** („białą”) wiązkę promieniowania rentgenowskiego o dość szerokim zakresie widmowym (rys. 2). Obraz dyfrakcyjny rejestruje się na przykład za pomocą kliszy fotograficznej. Ma on postać wielu oddzielnych punktów. Przy odpowiednim ustawieniu obraz odzwierciedla symetrię badanego kryształu (rys. 3).



Rys. 2. Zasada metody Lauego



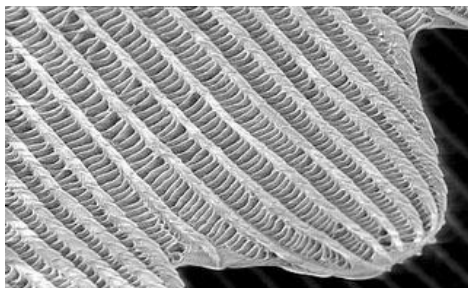
Rys. 3. Obraz dyfrakcji promieni Roentgena na kryształach NaCl uzyskany metodą Lauego

¹ Nagroda Nobla w roku 1914.

Kryształy fotoniczne

W ostatnich latach duże zainteresowanie budzą tak zwane kryształy fotoniczne. Są to struktury przestrzenne o periodyczności porównywalnej z długością fali promieniowania widzialnego, czyli rzędu 1 μm . Mogą to być:

- przestrzenne układy komórek piór ptasich czy skrzydeł motyli (rys. 4). Układy takie oświetlone światłem białym stają się kolorowe, mimo że nie zawierają barwników;
- sztucznie otrzymane przestrzenne struktury z materiałów przezroczystych². Szerokie badania tego typu układów rozpoczęła praca Eli Yablonovitcha z 1987 roku. Oczekuje się, że będą miały one szerokie zastosowanie w elektronice³.



Rys. 4. Fotografia struktury przestrzennej skrzydła motyla rusałki pawika. Źródło: Wikipedia, hasło „Structural coloration”

Uproszczony model

Precyzyjny opis właściwości wymienionych wyżej układów wymaga rozważenia rozchodzenia się fali elektromagnetycznej w ośrodku o periodycznie zmienionym współczynniku załamania⁴. Interesujące może być jednak rozpatrzenie modelu skrajnie uproszczonego – przestrzennej sieci punktowych centrów rozpraszających.

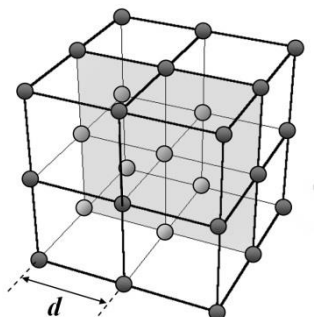
Tutaj omówimy tylko najprostszy z takich układów: jednakowych punktów odległych o d , tworzących sześcienną sieć przestrzenną, nazywaną siecią kubiczną prostą (rys. 5). Ograniczymy się przy tym do przypadku:

- kiedy promień padający jest równoległy do krawędzi sześciątów,
- obserwacja jest prowadzona w płaszczyźnie, zaciętej na rysunku 5.

² Zob. John Timmer, *Photonic crystals used to make optical RAM*, *ars technica*, May 28, 2014, <http://arstechnica.com/science/2014/05/photonic-crystals-used-to-make-optical-ram/>.

³ Warto obejrzeć w internecie obrazy, które pojawiają się na hasła „structural coloration” i „photonic crystals”.

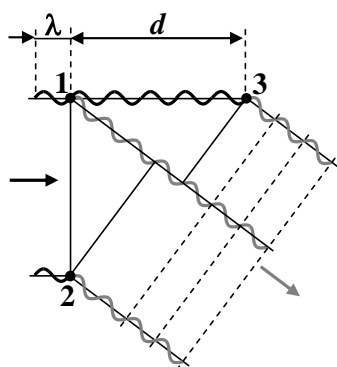
⁴ W przypadku promieni Roentgena mówimy wtedy o *dynamicznej teorii rozpraszania*.



Rys. 5. Sieć kubiczna prosta

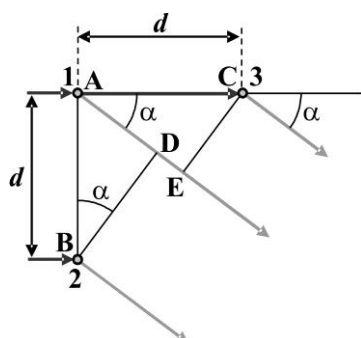
Warunki wzmocnienia promieniowania

Aby nastąpiło wzmocnienie promieniowania rozproszonego przez rozważaną sieć przestrzenną, muszą zostać spełnione **jednocześnie** dwa warunki (rys. 6):



Rys. 6. Wzmocnienie fal rozproszonych

1. muszą się wzmocniać fale należące do pionowego łańcucha centrów rozpraszających, zaznaczone na rysunku jako punkty 1 i 2;
2. muszą się wzmocniać fale, należące do poziomego łańcucha centrów rozpraszających, zaznaczone na rysunku jako punkty 1 i 3.



Rys. 7. Ilustracja warunków wzmocnienia fal

Oznacza to dwa warunki na różnicę dróg (rys. 7), które muszą zostać spełnione jednocześnie.

Pierwszy:

$$\Delta_1 = AD = d \sin \alpha = n\lambda, \quad (1)$$

jak dla zwykłej siatki dyfrakcyjnej;

drugi:

$$\Delta_2 = AC - AE = d - d \cos \alpha = d(1 - \cos \alpha) = m\lambda, \quad (2)$$

gdzie m i n to liczby całkowite.

Warunki 1 i 2 możemy też zapisać w postaci:

$$\sin \alpha = n \frac{\lambda}{d}, \quad (3)$$

$$\cos \alpha = 1 - m \frac{\lambda}{d}. \quad (4)$$

Rysunek 7 odpowiada $n = 3$, $m = 1$, $\frac{\lambda}{d} = \frac{1}{5}$.

Co wynika z warunków wzmocnienia?

Podnieśmy teraz (3) i (4) do kwadratu, dodajmy do siebie stronami i skorzystajmy ze związku $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Dostaniemy:

$$n^2 \frac{\lambda^2}{d^2} + \left(1 - m \frac{\lambda}{d}\right)^2 = 1. \quad (5)$$

Przekształćmy to wyrażenie:

$$n^2 \frac{\lambda^2}{d^2} + 1 - 2m \frac{\lambda}{d} + m^2 \frac{\lambda^2}{d^2} = 1 \quad (6)$$

$$n^2 \frac{\lambda^2}{d^2} - 2m \frac{\lambda}{d} + m^2 \frac{\lambda^2}{d^2} = 0 \quad (7)$$

$$n^2 \frac{\lambda^2}{d^2} + m^2 \frac{\lambda^2}{d^2} = 2m \frac{\lambda}{d} \quad (8)$$

Dzielimy obie strony przez $\frac{\lambda}{d}$:

$$(n^2 + m^2) \frac{\lambda}{d} = 2m \quad (9)$$

$$\lambda = \frac{2m}{n^2 + m^2} d. \quad (10)$$

Długości fali λ promieniowania rozproszonego nie mają dowolnych wartości, a jedynie takie, które spełniają warunek (10). Oznacza to, że gdybyśmy na nasz układ skierowali wiązkę monochromatyczną, moglibyśmy nie uzyskać żadnego wzmocnienia dyfrakcyjnego! Różni to dyfrakcję na sieciach przestrzennych od dyfrakcji na sieciach jedno- i dwuwymiarowych.

II. Dyfrakcja światła widzialnego

Przypuśćmy teraz, że stała sieci $d = 1 \mu\text{m}$, a na układ skierowaliśmy wiązkę światła białego, obejmującego cały obszar widzialny, od $0,4 \mu\text{m}$ (światło fioletowe) do $0,7 \mu\text{m}$ (światło czerwone). Nie przeanalizujemy dokładnie wszystkich możliwości, ograniczymy się jedynie do kilku przykładów.

Przykład 1, $m = n$

Jeżeli $m = n$, wzór (10) się upraszcza i dostajemy

$$\lambda = \frac{2n}{n^2 + n^2} d = \frac{1}{n} d. \quad (11)$$

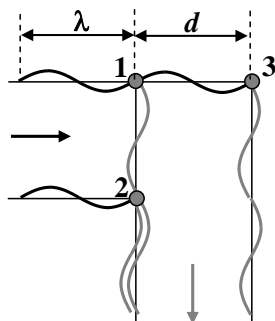
Oznacza to kolejno:

- $n = 1$: $\lambda = 1 \mu\text{m}$ – podczerwień;
- $n = 2$: $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ – światło widzialne zielone;
- $n = 3$: $\lambda = 0,33 \mu\text{m}$ – nadfiolet.

Za pomocą wzoru (3) ustalimy, jaki jest kąt α . Dla wszystkich trzech przypadków

$$\sin \alpha = n \frac{1}{n} d \frac{1}{d} = 1 \quad (12)$$

Zatem $\alpha = 90^\circ$, wiązka rozproszona jest prostopadła do wiązki padającej. Dla $n = 1$ przedstawia to rys. 8.



Rys. 8. Ilustracja przykładu 1

Przykład 2, $n = 0, m \neq 0$

Przypadek ten odpowiada rozpraszaniu ściśle wstecz. Ze wzoru (3) wynika, że $\sin \alpha = 0, \alpha = 180^\circ$ ($\alpha \neq 0$, patrz dalej). Wyrażenie (10) przyjmuje postać

$$\lambda = \frac{2}{m}d. \quad (13)$$

Wzór ten podobny jest do (11), ale różni się od niego o czynnik 2. Ze wzorów (13) i (4) wynika, że

$$\cos \alpha = 1 - m \frac{2}{m}d \frac{\lambda}{d} = 1 - 2 = -1, \quad (14)$$

czyli rzeczywiście $\alpha = 180^\circ$.

Wzór (13) oznacza kolejno:

- $m = 1: \lambda = 2 \mu\text{m}$ – podczerwień;
- $m = 2: \lambda = 1 \mu\text{m}$ – podczerwień;
- $m = 3: \lambda = 0,667 \mu\text{m}$ – światło widzialne czerwono-pomarańczowe;
- $m = 4: \lambda = 0,5 \mu\text{m}$ – światło zielone;
- $m = 5: \lambda = 0,4 \mu\text{m}$ – skrajny fiolet;
- $m = 6: \lambda = 0,333 \mu\text{m}$ – nadfiolet.

Przykład 3, $n = 2, m$ dowolne

W tym przypadku

$$\lambda = \frac{2m}{4+m^2}d \quad (15)$$

Oznacza to:

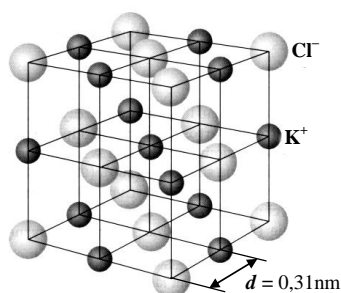
- $m = 1: \lambda = 0,4 \mu\text{m}$ – skrajny fiolet, $\sin \alpha = 0,8, \cos \alpha = 0,6, \alpha = 53^\circ$;
- $m = 2: \lambda = 0,5 \mu\text{m}$ – zieleń (patrz przykład 1);
- $m = 3: \lambda = 0,462 \mu\text{m}$ – niebieskie, $\sin \alpha = 0,92, \cos \alpha = -0,39, \alpha = 113^\circ$;
- $m = 4: \lambda = 0,4 \mu\text{m}$ – skrajny fiolet, $\sin \alpha = 0,8, \cos \alpha = -0,6, \alpha = 127^\circ$;
- $m = 5: \lambda = 0,345 \mu\text{m}$ – nadfiolet.

III. Dyfrakcja promieni Roentgena – cd.

Powróćmy do wymienionej na początku dyfrakcji promieni Roentgena na kryształach. Bliska wyżej omówionym przykładom jest dyfrakcja na kryształach chlorku potasu KCl (rys. 9). Chlorek potasu ma budowę podobną do chlorku sodu.

Natężenie fali rozproszonej na pojedynczym atomie lub jonie dla promieni Roentgena jest w pierwszym przybliżeniu proporcjonalne do liczby elektronów.

W przypadku jonu K^+ i jonu Cl^- liczba ta jest równa 18. Zatem sieć KCl dla promieni Roentgena może być potraktowana jak sieć kubiczna prosta.



Rys. 9. Budowa kryształu KCl

Wynika stąd, że wszystkie prowadzone wyżej rozważania dla fikcyjnej sieci centrów rozpraszających można po prostu zastosować do rozpraszania promieni Roentgena na KCl. Należy je tylko przeskalować, zmieniając stałą sieci z $d = 1 \mu\text{m}$ na $d = 0,31 \text{ nm}$. Na przykład dla $n = 2$, m dowolnego:

- $m = 1$: $\lambda = 0,4 \cdot 0,31 \text{ nm} = 0,124 \text{ nm}$, $\sin \alpha = 0,8$, $\cos \alpha = 0,6$, $\alpha = 53^\circ$;
- $m = 2$: $\lambda = 0,5 \cdot 0,31 \text{ nm} = 0,155 \text{ nm}$, $\sin \alpha = 1$, $\alpha = 90^\circ$; itp.

Podkreślimy:

- Różnym plamkom na fotografii typu 3 odpowiadają na ogół różne długości fali (różne „barwy rentgenowskie”), czego nie rejestruje zwykła klisza fotograficzna.
- Aby uzyskać obraz dyfrakcyjny metodą Lauego trzeba stosować wiązkę niemonochromatyczną – bo dla wiązki o jednej określonej długości fali moglibyśmy nie uzyskać żadnego wzmocnienia, a co za tym idzie, nie zaobserwować żadnego refleksu na kliszy.

Uwaga końcowa

Nasz model sieci punktowych centrów rozpraszających dotyczyć może także rozpraszania innego typu fal na strukturach przestrzennych, na przykład dyfrakcji neutronów na kryształach.