

Keplerowskie krzywe rotacji

Michał Piróg
Instytut Fizyki UJ

1. Wstęp

Badanie *krzywych rotacji* jest jednym ze sposobów weryfikacji modeli kosmologicznych oraz poglądów na budowę Wszechświata w największej skali. W astronomii krzywe rotacji określa się jako zależność wartości prędkości orbitalnej od odległości od osi obrotu, $|v(r)|$. Analizując dynamikę wielkoskalowych struktur we Wszechświecie oraz różne formy materii, z których składa się Wszechświat sprawdza się poprawność modeli kosmologicznych. Problemy brakującej materii, ciemnej materii oraz ciemnej energii trafiły pod strzechy w formie filmów popularnonaukowych czy logotypów na młodzieżowych T-shirtach i stały się już niemal elementem popkultury. Na przełomie XX i XXI wieku pojawiła się *kosmologia precyzyjna* – dyscyplina oparta na wiarygodnych pomiarach parametrów kosmologicznych. Współczesne obserwacje pozwalają przejść z jakościowych rozważań do tych o charakterze ilościowym, z dającym się rozsądnie określić marginesem niepewności. Jednym z kluczowych problemów jest tutaj tzw. „ważenie” galaktyk polegające na szacowaniu rozkładu masy na podstawie obserwowanej prędkości orbitalnej i jej zmian w funkcji odległości od osi obrotu. Zagadnienie to wygląda zwykle w sposób następujący:

1. Astronomia obserwacyjna dostarcza danych na temat przebiegu krzywej $v(r)$.
2. Ponieważ ruch materii spowodowany jest przez pewien potencjał grawitacyjny, szuka się zatem możliwych rozkładów materii, dających wytłumaczenie takiego kształtu potencjału, który wyjaśni przebieg krzywej rotacji.

Niestety nie zawsze da się to zrobić i okazuje się, że do wyjaśnienia pewnych krzywych rotacji potrzeba użyć nietypowych założeń dotyczących rozmieszczenia materii w układzie lub/i jej egzotycznych form, takich właśnie jak np. ciemna materia [1, 2, 3]. Podejmowane są również próby wyjaśnienia obserwowanych ruchów poprzez np. uwzględnienie oddziaływania magnetycznego [4, 5].

W artykule przedstawię nierelatywistyczną, czysto newtonowską, teoretyczną analizę krzywych rotacji w układach typu *masa centralna–dysk* bez odniesienia się do obserwacyjnej strony zagadnienia. Wydawałoby się, że jest to dobrze znany i intuicyjnie rozumiany temat. Pokażę, że łatwo jest tutaj wpaść w pułapkę. Postaram się przedstawić rozumowanie prowadzące do rozwiania wszelkich wątpliwości i wyjaśnienia, czym tak naprawdę jest *keplerowska rotacja* w newtonowskiej mechanice nieba oraz newtonowskiej hydrodynamice.

W najprostszym, szkolnym wariacie zakłada się istnienie obiektu centralnego o masie M oraz kołowych orbit ciał próbnych, gdzie wartość prędkości ciała w odległości r od osi obrotu dana jest wzorem $v(r) = \sqrt{GM/r}$. Sferycznie symetryczny potencjał centralnej masy implikuje taki właśnie keplerowski ruch ciał próbnych. Czy to rozumowanie można odwrócić? Czy obserwacja krzywej rotacji charakterystycznej dla keplerowskiego ruchu świadczy o tym, że odbywa się on w sferycznie symetrycznym potencjale ciała centralnego? Czy przy znajomości przebiegu krzywej $v(r)$ można na podstawie danych obserwacyjnych, w oparciu o powyższy wzór podać masę ciała centralnego? Odpowiedzi na te trzy pytania to trzy razy NIE.

2. Mechanika nieba

Żeby uzasadnić te przeczące odpowiedzi należy zastanowić się nad budową tego typu układów. Zaczniemy od układu planetarnego, jakim jest Układ Słoneczny. Jeżeli rozważymy pojedynczą planetę na orbicie, dostaniemy zagadnienie ruchu Keplera. Dodanie kolejnego ciała komplikuje sprawę na tyle, że problem nie ma w ogólności analitycznego rozwiązania. Przypadek Układu Słonecznego z ośmioma planetami oraz ich naturalnymi satelitami, Pasem Kuipera i resztą ciał niebieskich, które oddziałują grawitacyjnie, czyni problem niemożliwym do rozwiązania za pomocą mechaniki nieba. Wprowadzając stosowne uproszczenia możliwe są oczywiście rachunki przybliżone oraz krótkie (w skali czasowej ewolucji Układu Słonecznego) symulacje numeryczne, nie istnieje jednak pełen analityczny model, który w oparciu o dane początkowe pozwoliłby na obliczenie trajektorii wszystkich ciał.

W ustalonym punkcie przestrzeni o wektorze wodzącym \mathbf{x} potencjał grawitacyjny jest sumą wszystkich potencjałów generowanych przez każde ciało z osobna:

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^n U_i(\mathbf{x}) = - \sum_{i=0}^n \frac{Gm_i}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}|}, \quad (1)$$

co można zapisać jako sumę potencjału ciała centralnego (Słońca) i ciał na orbitach (planet):

$$U(\mathbf{x}) = U_c(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n U_i(\mathbf{x}) = - \frac{GM_c}{|\mathbf{x}_c - \mathbf{x}|} - \sum_{i=1}^n \frac{Gm_i}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}|}, \quad (2)$$

który pozostaje nieznaną funkcją skalarną trzech zmiennych przestrzennych, tak długo, dopóki nie przyjmiemy założenia, że dynamika zdeterminowana jest wyłącznie przez ciało centralne, a ciała orbitujące wnoszą jedynie niewielkie, pomijalnie małe poprawki, kiedy to otrzymujemy:

$$U(\mathbf{x}) = U_c(\mathbf{x}) = - \frac{GM_c}{|\mathbf{x}_c - \mathbf{x}|}. \quad (3)$$

Układy typu centralna masa (gwiazda) i zbiór lżejszych ciał (planet) na orbitach keplerowskich są dla nas intuicyjne ze względu na podobieństwo do Układu Słonecznego. Potencjał grawitacyjny Słońca jest prawie sferycznie symetryczny i determinuje dynamikę wszystkich orbitujących wokół niego ciał. Dodając (obserwacyjnie uzasadnione) założenie o kołowym kształcie orbit i wychodząc z (3), dostaje się pole prędkości dla ciał niebieskich w postaci

$$v = \sqrt{GM_{\odot} / r}, \quad (4)$$

gdzie jedyną zmienną jest odległość planety od Słońca, a stałą proporcjonalności $\sqrt{GM_{\odot}}$ należy wyznaczyć na podstawie obserwowanych parametrów orbit planet, np. na podstawie parametrów orbity Ziemi.

Możemy przeprowadzić następujące rozumowanie. Przyjmijmy dla uproszczenia, że:

- orbita Ziemi jest okręgiem o promieniu $R_{\oplus} = 1 \text{ j.a.} \approx 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$,
- okres obiegu wynosi 1 rok, czyli $T_{\oplus} \approx 31\,536\,000 \text{ s}$,
- stała grawitacji G jest w przybliżeniu równa $G \approx 6,67 \cdot 10^{-20} \text{ km}^3/(\text{kg s}^2)$.

Pozwala nam to na obliczenie przybliżonych wartości:

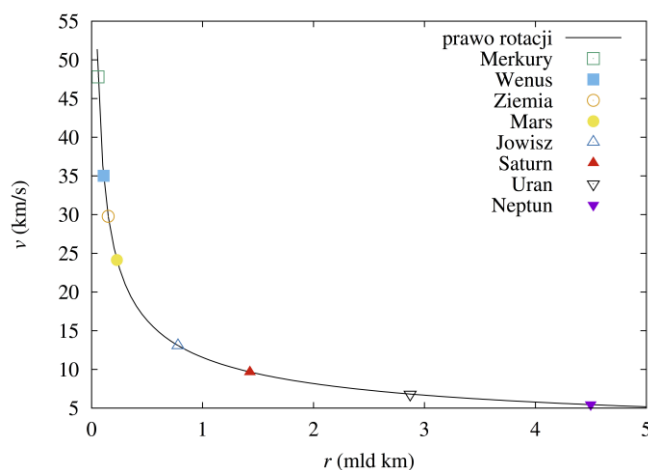
- średniej prędkości orbitalnej Ziemi, $v_{\oplus} \approx 30 \text{ km/s}$,
- masy Słońca $M_{\odot} = R_{\oplus} v_{\oplus}^2 / G \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

Pomimo użycia parametrów orbity jednego ciała niebieskiego – Ziemi, masa ta wyznaczona została w oparciu o krzywą rotacji. Można tak postąpić, ponieważ znamy z obserwacji budowę Układu Słonecznego i nie mamy wątpliwości co do założeń modelowych, których wyrazem jest wzór (3).

Tabela 1 zawiera dane o rozmiarach orbit, okresy orbitalne oraz obliczone na ich podstawie średnie prędkości planet w Układzie Słonecznym. Wykres 1 przedstawia krzywą rotacji daną formułą (4), gdzie masa Słońca została obliczona w oparciu o parametry orbity Ziemi według przedstawionego powyżej rozumowania. Punkty odnoszące się do poszczególnych planet zostały naniezione na podstawie danych z tabeli 1. Widzimy, że ruch planet odbywa się tak, że ich prędkość orbitalna maleje jak odwrotność pierwiastka z odległości od osi obrotu. Cały Układ Słoneczny rotuje keplerowsko. Do wyznaczenia krzywej posłużyły jedynie parametry orbity Ziemi, a pozostałe planety idealnie się w nią wpasowują. W tym wypadku założenie co do typu rotacji było oczywiste, nie zawsze jednak mamy do czynienia z taką sytuacją. Okazuje się, że łatwo wpaść w pułapkę.

Tabela 1. Parametry orbit planet Układu Słonecznego

Planeta	Średnia odległość od Słońca (mln km)	Okres obiegu wokół Słońca w latach	Średnia prędkość orbitalna (km/s)
Merkury	58	0,24	47,8
Wenus	108	0,62	35,0
Ziemia	150	1,00	29,8
Mars	228	1,88	24,1
Jowisz	778	11,86	13,1
Saturn	1427	29,45	9,6
Uran	2871	84,07	6,8
Neptun	4498	164,88	5,5

Rys. 1. Keplerowska krzywa rotacji dla współczynnika $\sqrt{GM_{\odot}}$ oraz naniiesione punkty odpowiadające prędkościom planet Układu Słonecznego

3. Hydrodynamika

Sytuacja wygląda inaczej, gdy rozważy się ciągły rozkład materii. W takim przypadku uzasadnione jest wprowadzenie modelu stacjonarnego dysku o osiowej symetrii, co oznacza, że element objętości wykonuje ruch wokół stałej osi obrotu, a jego wszystkie charakterystyki pozostają stałe w czasie. Tego typu struktury można modelować poprzez np. płyn doskonały. Innymi słowy, mechanikę nieba zamieniamy na hydrodynamikę.

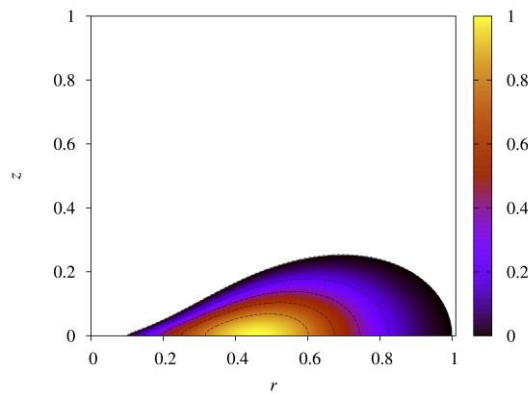
Planety w Układzie Słonecznym poruszają się w pobliżu jednej płaszczyzny, zwanej ekliptyką. Fakt ten tłumaczy się modelem dysku protoplanetarnego, z którego powstały. Przechodząc od mechaniki nieba do hydrodynamiki, gdzie rozważa się ciągły rozkład oddziałującego płynu, można powołać się na wyniki symulacji opisanych w artykule [6], gdzie wykazano, że jeżeli do układu o sfe-

rycznej symetrii doda się niewielką ilość momentu pędu, ewolucja układu prowadzi do powstania dysku. Moment pędu jest ze swej natury wszechobecny w przyrodzie, dlatego modele dyskowe stanowią ważną klasę układów, którym astrofizycy poświęcają wiele uwagi.

O ile planety w układach planetarnych są źródłem niewielkich perturbacji, o tyle w modelu dyskowym konieczne jest uwzględnienie wpływu dysku na dynamikę oraz na wypadkowy potencjał. W przypadku ciągłego rozkładu materii mamy zatem nową postać wzoru (2):

$$U(\mathbf{x}) = U_c(\mathbf{x}) + U_d(\mathbf{x}) = -\frac{GM_c}{|\mathbf{x}_c - \mathbf{x}|} + U_d, \quad (5)$$

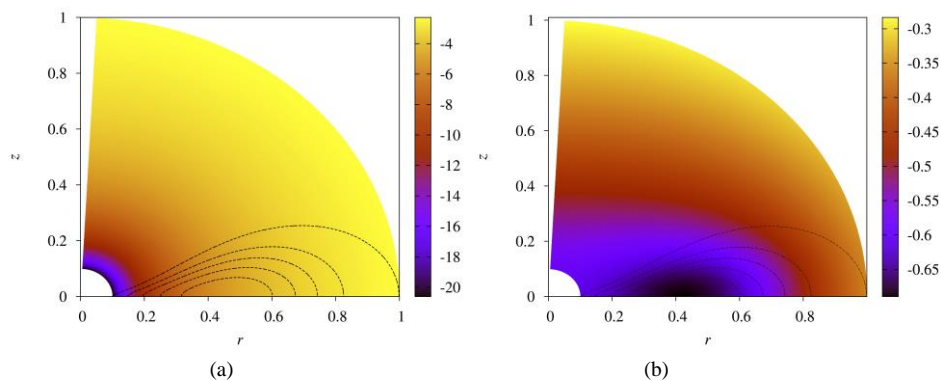
gdzie $U_d(\mathbf{x})$ to potencjał pochodzący od dysku, spełniający równanie Poissona $\Delta U_d(\mathbf{x}) = 4\pi G\rho(\mathbf{x})$, w którym $\rho(\mathbf{x})$ jest rozkładem gęstości masy materii dyskowej, a Δ – operator Laplace’a. Rysunek 2 przedstawia widok cięcia południkowego profilu gęstości dysku z perspektywy płaszczyzny równikowej, gdzie w punkcie (0,0) znajduje się (niezaznaczona) masa centralna. W związku z jakościowym charakterem rozważań rozmiary dysku oraz maksymalna gęstość zostały przyjęte jako jednostki. Tego typu układ może zostać przeskalowany do rzeczywistych rozmiarów i fizycznych wartości parametrów, tak by odpowiadał realnemu obiektowi astronomicznemu.



Rys. 2. Przykładowy profil gęstości dysku. Maksymalna gęstość oraz promień zewnętrznego dysku zapisane są w bezwymiarowych zmiennych, znormalizowanych do jedności

Na podstawie profilu gęstości, rozwiązując równania pola można otrzymać rozkład potencjału grawitacyjnego, a na jego podstawie wyznaczyć krzywą rotacji. W rzeczywistości jednak mamy do czynienia z problemem odwrotnym. To krzywe rotacji są znane z obserwacji i na ich podstawie szuka się rozkładu materii. Powyższe rozumowanie można przedstawić jeszcze inaczej i postawić problem następująco. Zażądajmy istnienia dysku o zadanej masie i rozmiarach,

który tworząc układ złożony z masy centralnej i dysku wygeneruje potencjał grawitacyjny, dokładnie taki, że odpowiadać mu będzie keplerowska (lub inna, ale ustalona) krzywa rotacji. Tego typu badania opisane zostały w pracy [7]. Rysunki 3a i 3b przedstawiają odpowiednio wypadkowy potencjał oraz potencjał pochodzący od dysku przedstawionego na rys. 2, gdzie dodatkowo zaznaczony jest jego kontur oraz izolinie stałej gęstości. Skala dla potencjału odnosi się do wartości gęstości i nadaje się jedynie do analizy jakościowej. Z wykresów tych widać, że potencjał zdominowany jest przez masę centralną, jednakże ze względu na dodatkowy człon związany z dyskiem, nie jest on już sferycznie symetryczny. A zatem mamy odpowiedzi na pytania postawione we wstępie – sferycznie symetryczny potencjał nie jest warunkiem koniecznym dla keplerowskiej rotacji, a co za tym idzie, nie można wiarygodnie oszacować masy centralnej wprost z podanego tam, „szkolnego” prawa rotacji.



Rys. 3. Przykładowy potencjał grawitacyjny będący sumą potencjału masy centralnej oraz potencjału pochodzącego od dysku (a) oraz potencjał samego dysku (b). Wartości na osiach oraz przy pałecce barw odpowiadają przeskalowanym zmiennym, w których maksymalna gęstość oraz promień zewnętrzny dysku znormalizowane są do jedności

W tym miejscu należy zdefiniować pojęcie *rotacji keplerowskiej*. W ogólności jest to ruch po okręgu, w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny równikowej z prędkością taką, że jej wartość jest funkcją odległości od stałej osi obrotu postaci:

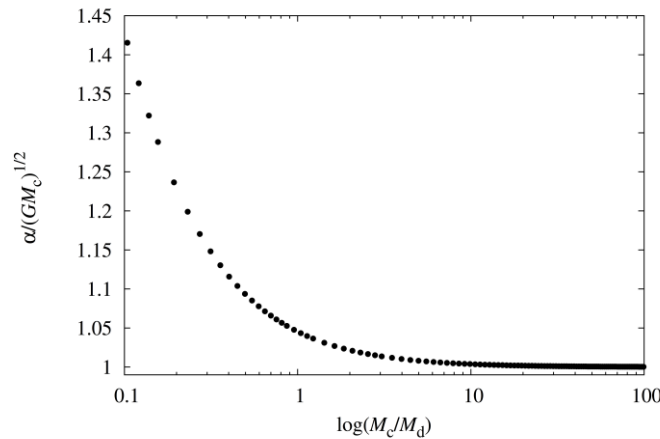
$$v = \frac{\alpha}{\sqrt{r}}, \quad (6)$$

gdzie α jest stałą proporcjonalności charakterystyczną dla danego układu o ustalonej geometrii oraz ustalonego stosunku pomiędzy masą centralną M_c a masą dysku M_d . Tym, co odróżnia powyższy wzór od wzoru (4), opisującego keplerowską rotację planet w Układzie Słonecznym, jest stała proporcjonalności. Przypadek $\alpha = \sqrt{GM_c}$ jest szczególnym przypadkiem keplerowskiej rota-

cji w sferycznie symetrycznym potencjale. W ogólności rotacja keplerowska jest dopuszczalna przez równania pola grawitacyjnego oraz równania hydrodynamiki również w sytuacji, gdy ciężki dysk deformuje ten potencjał. Badania opisane w pracach [7, 8] pokazują, że tego typu układy rotują szybciej i $\alpha \geq \sqrt{GM_c}$, a nadwyżka $\alpha - \sqrt{GM_c}$ jest miarą oddziaływania dysku na dynamikę układu. Innymi słowy, jest miarą tzw. *samograwitacji*.

A zatem, jeżeli obserwujemy keplerowską krzywą rotacji, nie możemy założyć, że $\alpha = \sqrt{GM_c}$ i oszacować wartości masy centralnej, tak jak zrobiliśmy to dla Słońca. Tego typu oszacowanie obarczone jest błędem związanym z różnicą we wspomnianych współczynnikach. Masa może zostać przeszacowana tym bardziej, im cięższy jest dysk.

Pojawia się teraz naturalne pytanie o to, jak bardzo można się pomylić. Okazuje się, że z punktu widzenia hydrodynamiki oraz równań pola grawitacyjnego możliwe są rotujące w sposób keplerowski układy, w których w ogóle nie ma masy centralnej. Rysunek 4 przedstawia iloraz $\alpha/\sqrt{GM_c}$ jako funkcję stosunku masy centralnej do masy dysku M_c/M_d dla serii układów o zadanej geometrii. Widać, że im cięższy jest dysk, tym większy błąd, jaki popełniamy przez naiwne szacowanie masy ze „szkolnego” keplerowskiego prawa rotacji. Na tym wykresie nie sposób pokazać przypadku z $M_c = 0$, kiedy otrzymuje się wartość współczynnika α , odpowiadającą sytuacji, w której wypadkowy potencjał grawitacyjny nie ma żadnego wkładu pochodzącego od masy centralnej, a cała dynamika zdeterminowana jest przez potencjał dysku, $U(\mathbf{x}) = U_d(\mathbf{x})$, gdzie $\Delta U_d(\mathbf{x}) = 4\pi G\rho(\mathbf{x})$.



Rys. 4. Iloraz współczynników α i $\sqrt{GM_c}$ w funkcji logarytmu z ilorazu M_c/M_d

4. Podsumowanie

W dzisiejszej kosmologii oraz astrofizyce próbuje się dopasować rozkład przestrzennej materii oraz jej rodzaj do obserwowanych krzywych rotacji. W niniejszym tekście przedstawiam inne podejście, zbadane w Zakładzie Teorii Względności i Astrofizyki UJ. Polega ono na ograniczeniu się do jednego typu krzywych rotacji (tutaj jest to rotacja keplerowska) i sprawdzeniu, jak wielka różnorodność w rozkładach przestrzennych materii jest w takim przypadku możliwa. Okazuje się, że dla układów *masa centralna–dysk* równania dopuszczają rotację keplerowską bez względu na proporcje pomiędzy masami. Możliwe są więc wszystkie relacje, począwszy od *pływu testowego* z $M_c \gg M_d$, przez przypadek porównywalnych mas, skończywszy na konfiguracji dyskowej nie posiadającej masy centralnej w ogóle. Z punktu widzenia równań ruchu, keplerowskie krzywe rotacji nie są w żaden sposób wyróżnione w hydrodynamice, są one jednak często spotykane w obserwacjach astronomicznych. Przedstawiony tutaj punkt widzenia pozwala wyeliminować często popełniany błąd interpretacyjny. Rotacja keplerowska to nie tylko ruch punktów materialnych wokół ciała centralnego. Istotą rotacji keplerowskiej jest zależność pomiędzy prędkością liniową a odległością od osi obrotu postaci $v(r) \sim 1/\sqrt{r}$. Jest to rodzina krzywych różniących się współczynnikami proporcjonalności. Analizując tego typu krzywą, bez znajomości dodatkowych parametrów układu, należy być ostrożnym z wyciąganiem wniosków. Do prawidłowej interpretacji niezbędna jest informacja dotycząca natury ruchu oraz granic stosowalności modelu, którym się posługujemy.

Przedstawione wyniki otrzymano w Zakładzie Teorii Względności i Astrofizyki UJ, w grupie badawczej, którą stanowili: prof. Edward Malec, dr Patryk Mach oraz dr Michał Piróg.

Literatura

- [1] Vera C. Rubin, and Ford Jr. W. Kent. „Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions”. *Ap. J.* 159, 379–404 (1970)
- [2] Vera C. Rubin, Ford Jr. W. Kent, and Thonnard Norbert. „Rotational Properties of 21 Sc Galaxies with a Large Range of Luminosities and Radii, from NGC 4605 ($R = 4\text{kpc}$) to UGC 2885 ($R = 122\text{kpc}$)”. *Ap. J.* 238, 471–487 (1980)
- [3] Y. Sofue, Y. Tutui, M. Honma, A. Tomita, T. Takamiya, J. Koda, and Y. Takeda. „CENTRAL ROTATION CURVES OF SPIRAL GALAXIES”. *Astrophysical Journal*, Vol. 523, pp 136–146 (1999)
- [4] J. Jałocha, Ł. Bratek, J. Pękala, M. Kutschera *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 427, 393–396 (2012)
- [5] J. Jałocha, Ł. Bratek, J. Pękala, M. Kutschera *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 421, 2155–2160 (2012)
- [6] P. Mach, M. Piróg, A. Font, *Relativistic Low Angular Momentum Accretion* (2015)
- [7] P. Mach, E. Malec, and M. Piróg, *Acta Phys. Pol.* B44, 107 (2013)
- [8] P. Mach, E. Malec, and M. Piróg, *Acta Phys. Pol.* B43, 2141 (2012)