Silniki cieplne i rekurencje

Jakub Mielczarek
Instytut Fizyki UJ

Chciałbym Państwu zaprezentować zagadnienie, które pozwala, rozważając tematykę sprawności układu silników cieplnych, zapoznać się z użytecznymi metodami rozwiązywania równań rekurencyjnych. Zagadnienie to można przedstawić w formie następującego problemu:

Proszę znaleźć wyrażenie na wypadkową sprawność układu N szeregowo połączonych silników cieplnych. Dany silnik w szeregu pobiera ciepło oddane przez jednego sąsiada, a wydzielone ciepło oddaje następnemu sąsiadowi. Wszystkie silniki pracują z jednakową sprawnością, równą η_0.

Zadanie to, na pierwszy rzut oka, może sprawiać wrażenie dość oczywistego. Moglibyśmy pomyśleć, że sprawności sumują się w jakiś znany nam sposób, np. jak w równoległym połączeniu rezystorów. Nic jednak bardziej mylnego. Reguła dodawania sprawności silników okazuje się mieć mniej oczywistą postać, sprawiającą, że znalezienie wyrażenia na wypadkową sprawność układu nie jest zadaniem prostym. Rozwiązanie tego problemu nie wymaga jednak zaawansowanej matematyki tylko trochę sprytu i pomysłowości. Dlatego uważam, że może być ono ciekawą rozrywką intelektualną dla ambitnych licealistów oraz studentów pierwszych lat na kierunkach ścisłych. Jeśli wzbudziłem Twoje zainteresowanie i chcesz podjąć wyzwanie, zachęcam do zmierzenia się z zadaniem. Jeśli sprawi ci ono trudność, odłóż je na kilka dni, po czym spróbuj zaatakować je jeszcze raz. Po zakończonych zmaganiach zapraszam ponownie do tego artykułu. Poniżej będziesz mógł/mogła skonfrontować swój wynik z moimi obliczeniami oraz dowiedzieć się co nieco o równaniach rekurencyjnych. Powodzenia!

I. Rozwiązanie

Zanim podejmiemy wyzwanie rozwiązania pełnego problemu N silników cieplnych warto wcześniej rozważyć przypadek połączenia szeregowego dwóch silników cieplnych, jednego o sprawności η_1, a drugiego o sprawności η_2. Niech Q_1 oznacza ciepło pobrane z grzejnicy przez pierwszy silnik, a Q_2 to ciepło oddane przez ten silnik chłodnicy. Praca wykonana przez czynnik roboczy pierwszego silnika wynosi W_1. Ponieważ energia wewnętrzna w pełnym cyklu nie zmienia się, na podstawie pierwszej zasady termodynamiki, otrzymujemy związek: $Q_1 + Q_2 + W_1 = 0$, przy czym W_1 i Q_2 są ujemne. Sprawność pierwszego silnika definiujemy jako $\eta_1 \equiv \frac{|W_1|}{Q_1}$, czyli stosunek wykonanej przez ten silnik pracy do dostarczonego ciepła. Analogicznie, sprawność drugiego silnika $\eta_2 \equiv \frac{|W_2|}{Q_3}$. Przez Q_3 oznaczyliśmy tutaj ciepło pobrane przez ten silnik z grzejnicy. Ponieważ grzejnica silnika 2 jest jednocześnie chłodnicą silnika 1, zachodzi związek $Q_3 = -Q_2$. Ponadto, przez W_2 oznaczyliśmy pracę wykonaną podczas pełnego cyklu przez drugi silnik.

Wypadkową sprawność rozważanego szeregowego układu możemy więc zapisać jako:

$$\eta \equiv \frac{|W_1|+|W_2|}{Q_1} = \frac{\eta_1 Q_1 + \eta_2 Q_3}{Q_1}, \tag{1}$$

gdzie wykorzystaliśmy wprowadzone wcześniej definicje sprawności η_1 i η_2. Ponieważ $Q_3 = -Q_2 = Q_1 + W_1$, dostajemy

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 \left(1 + \frac{W_1}{Q_1}\right), \tag{2}$$

a stąd, wykorzystując ponownie definicję η_1, oraz fakt, że dla ujemnego W, zachodzi $|W| = -W$, otrzymujemy szukane wyrażenie:

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \cdot \eta_2. \tag{3}$$

Sprawność układu szeregowego dwóch silników cieplnych wyraża się jako suma ich sprawności pomniejszona o iloczyn tych sprawności. Prawda, że mało intuicyjne?

Otrzymany wzór (3) chcielibyśmy teraz wykorzystać do obliczenia sprawności N silników o zadanej wartości, połączonych szeregowo. Oznaczmy taką sprawność przez η_N. Znając regułę sumowania sprawności (3) możemy teraz kolejno dodawać do siebie otrzymywane sprawności, konstruując układ zawierający coraz to więcej elementów. Jeśli każdy z silników ma sprawność η_0 to oczywiście $\eta_1 = \eta_0$. Wykorzystując następnie wzór (3), dla dwóch identycznych silników, dostajemy $\eta_2 = 2\eta_0 - \eta_0^2$. Chcąc otrzymać wyrażenie na η_3, do układu o sprawności η_2, stosując ponownie równanie (3), dodajemy silnik z $\eta_1 = \eta_0$, dostając $\eta_3 = 3\eta_0 - 3\eta_0^2 + \eta_0^3$. I tak dalej, i tak dalej. Szukamy jednak czegoś więcej, chcielibyśmy dysponować funkcją, która dla danego N da nam bezpośrednio szukane wyrażenie. Jedną z metod na znalezienie jej postaci jest zgadywanie. Wypiszmy sobie na przykład pięć pierwszych wyrazów i spróbujmy znaleźć szukane wyrażenie. Dla wygody i przejrzystości oznaczmy $x \equiv \eta_0$, a ponieważ η_N jest funkcją x, będziemy stosować zapis $\eta_N(x)$. Otrzymane wyrażenia zebrano w tabelce:

N	$\eta_N(x)$
1	x
2	$2x - x^2$
3	$3x - 3x^2 + x^3$
4	$4x - 6x^2 + 4x^3 - x^4$
5	$5x - 10x^2 + 10x^3 - 5x^4 + x^5$

Można z niej odczytać, że dla danego N funkcja $\eta_N(x)$ ma postać wielomianu stopnia N. Co więcej, można zauważyć, że współczynniki przy potęgach x sumują się do jedynki. Możemy więc wywnioskować, że $\eta_N(1) = 1$. Co jest zgodne z intuicją – szeregowe połączenie silników idealnych jest również silnikiem idealnym. Oprócz tego, na podstawie powyższej tabelki można stwierdzić, że współczynnik przy najniższej potędze wynosi N. Powyższe obserwacje mogą nam pomóc odgadnąć ogólne wyrażenie na $\eta_N(x)$. Co jednak mamy zrobić, gdy metoda zgadywania nie doprowadzi nas do oczekiwanego rezultatu?

Zauważmy, że zamiast dodawać kolejne elementy układu i dla każdej nowej konfiguracji obliczać wypadkową sprawność, możemy postawić sprawę trochę inaczej. Rozważny mianowicie układ N silników o wypadkowej sprawności $\eta_N(x)$ i połączmy go z silnikiem o sprawności $\eta_0 \equiv x$. Korzystając ze wzoru (3) możemy stąd wyprowadzić wyrażenie na sprawność układu $N + 1$ silników znając sprawność układu N silników:

$$\eta_{N+1}(x) = \eta_N(x) + x - \eta_N(x)x = (1-x)\eta_N(x) + x, \tag{4}$$

razem z tak zwanym warunkiem początkowym $\eta_1(x) = x$.

Wyrażenie (4) jest przykładem *równania rekurencyjnego*, a dokładniej, jest to równanie rekurencyjne liniowe i niejednorodne. Liniowość odzwierciedla tu fakt, że prawa strona równania (4) nie zawiera potęg $\eta_N(x)$ różnych od 0 i 1. Niejednorodność wskazuje natomiast na obecność stałego członu x.

Istnieje wiele sposobów rozwiązywania tego typu równań, z których tu chciałbym przedyskutować dwa: metodę czynnika sumacyjnego oraz metodę funkcji tworzących. Narzędzia te są bardzo przydatne przy rozwiązywaniu wielu problemów. Korzystając z dyskutowanego zagadnienia będziemy mogli wytłumaczyć zasadę ich działania.

II. Metoda czynnika sumacyjnego

Rozważmy pozornie niezwiązany problem. Mianowicie, obliczenie sumy $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_N$, gdzie a_n są elementami pewnego ciągu liczbowego. Istotną, z naszego punktu widzenia, obserwacją jest to, że sumę S_N możemy przedstawić w postaci równania rekurencyjnego:

$$S_{N+1} = S_N + a_{N+1}, \tag{5}$$

razem z warunkiem początkowym $S_1 = a_1$. Stąd, $S_2 = S_1 + a_2 = a_1 + a_2$, a następnie $S_3 = S_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3$, i tak dalej, aż do wartości N, której potrzebujemy. Potrafiąc więc obliczyć sumę S_N, co niekiedy nie jest zadaniem trudnym, możemy znaleźć rozwiązanie równania (5).

Równanie (4), które chcemy rozwiązać, różni się od równania (5). Są one jednak na tyle podobne, że można je z sobą powiązać. Mianowicie, zastanówmy się, co należy zrobić żeby równanie (4) przekształcić do postaci (5)? Po chwili zastanowienia, można zauważyć, że warto spróbować podzielić obustronnie równanie (4) przez czynnik $(1 - x)^{N+1}$. Dostajemy wtedy równanie

$$\frac{\eta_{N+1}}{(1-x)^{N+1}} = \frac{\eta_N}{(1-x)^N} + \frac{x}{(1-x)^{N+1}}, \tag{6}$$

w którym pozbyliśmy się członu $(1 - x)$ mnożącego η_N w równaniu (4). Z równań (5) i (6) można odczytać, że $S_N = \frac{\eta_N}{(1-x)^N}$ oraz $a_{N+1} = \frac{x}{(1-x)^{N+1}}$. Funkcja $\frac{1}{(1-x)^{N+1}}$, która pozwoliła przekształcić równanie (4) do postaci (5), nosi nazwę czynnika sumacyjnego.

Wykorzystując otrzymane wyrażenie na współczynniki a_n, możemy zapisać $S_N = \sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N \frac{x}{(1-x)^n} = x\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{1-x}\right)^n$. Ostatnia suma jest przykładem sumy ciągu geometrycznego, oznaczmy ją przez $\Sigma_N \equiv \sum_{n=1}^N t^n$. Dodając i odejmując od tej sumy wyraz t^{N+1}, możemy zapisać równanie $\Sigma_N = t + t\Sigma_N - t^{N+1}$, które, po rozwiązaniu, prowadzi do wyrażenia $\Sigma_N = t\frac{1-t^N}{1-t}$. Korzystając z tego wyniku, dla $t = \frac{1}{1-x}$, dostajemy

$$S_N = x\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{1-x}\right)^n = \frac{x}{1-x}\,\frac{1-\left(\frac{1}{1-x}\right)^N}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{(1-x)^N} - 1. \tag{7}$$

Wykorzystując, znaleziony wcześniej związek pomiędzy S_N a η_N, otrzymujemy poszukiwany wynik:

$$\eta_N(x) = (1-x)^N S_N = 1-(1-x)^N. \tag{8}$$

III. Metoda funkcji tworzących

Przejdźmy teraz do alternatywnego sposobu znalezienia wyrażenia na $\eta_N(x)$, wykorzystując metodę funkcji tworzących. W tym celu, zdefiniujmy następującą funkcję:

$$f(t) \equiv \sum_{N=1}^{\infty} \eta_N(x) t^N, \tag{9}$$

gdzie $0 \le t < 1$. Wyłączmy z powyższej sumy pierwszy wyraz i przemianujmy wskaźniki w pozostałej sumie:

$$f(t) = \eta_1(x)t + \sum_{N=2}^{\infty} \eta_N(x) t^N = xt + \sum_{N=1}^{\infty} \eta_{N+1}(x) t^{N+1}. \tag{10}$$

Współczynniki $\eta_{N+1}(x)$ możemy, w oparciu o równanie rekurencyjne (4), wyrazić za pomocą współczynników $\eta_N(x)$, co pozwala zapisać wyrażenie na funkcję $f(t)$ w następującej postaci:

$$\begin{aligned} f(t) &= xt + \sum_{N=1}^{\infty} \left(x + (1-x)\eta_N(x) \right) t^{N+1} = \\ &= xt + x\sum_{N=1}^{\infty} t^{N+1} + t\sum_{N=1}^{\infty} \eta_N(x) t^N - xt\sum_{N=1}^{\infty} \eta_N(x) t^N = \\ &= xt + t(1-x) f(t) + xt\sum_{N=1}^{\infty} t^N, \end{aligned} \tag{11}$$

gdzie ponownie skorzystaliśmy z definicji (9). Pozostaje nam jeszcze suma $\sum_{N=1}^{\infty} t^N$. Ale to jest po prostu suma nieskończonego ciągu geometrycznego, której wartość możemy z łatwością obliczyć. Oznaczmy $\Sigma \equiv \sum_{N=1}^{\infty} t^N$. Zapiszmy $\Sigma = t + t^2 + t^3 + \ldots = t + t\Sigma$, co wynika z faktu, że suma ta jest nieskończona. Rozwiązanie otrzymanego równania $\Sigma = t + t\Sigma$ ma postać $\Sigma = \frac{t}{1-t}$. Alternatywnie, wynik ten można uzyskać wykorzystując wcześniej znalezione wyrażenie $\Sigma_N = t\frac{1-t^N}{1-t}$ i rozważając granicę $N \to \infty$. Stąd, po podstawieniu obliczonej sumy do równania (11), dostajemy równanie

$$f(t) = xt + t(1-x) f(t) + \frac{xt^2}{1-t}, \tag{12}$$

które, po rozwiązaniu na $f(t)$, można zapisać jako

$$f(t) = \frac{xt}{(1-t)(1-t+xt)}. \tag{13}$$

Łatwo zauważyć, że powyższą funkcję można zapisać przez sumę ułamków prostych:

$$f(t) = \frac{1}{1-t} - \frac{1}{1-(1-x)t}. \tag{14}$$

Korzystając natomiast z reprezentacji funkcji $\frac{1}{1-y}$ w postaci szeregu Taylora

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{N=0}^{\infty} y^N, \tag{15}$$

możemy funkcję $f(t)$ wyrazić jako

$$f(t) = \sum_{N=0}^{\infty} t^N - \sum_{N=0}^{\infty} (1-x)^N t^N = \sum_{N=1}^{\infty} \left[1-(1-x)^N\right] t^N, \tag{16}$$

gdzie wyraz $N = 0$ naturalnie nie daje wkładu do powyższej sumy.

Ponieważ równania (9) i (16) są równoważnymi wyrażeniami na funkcję $f(t)$, porównując ich prawe strony dochodzimy do wniosku, że

$$\eta_N(x) = 1-(1-x)^N. \tag{17}$$

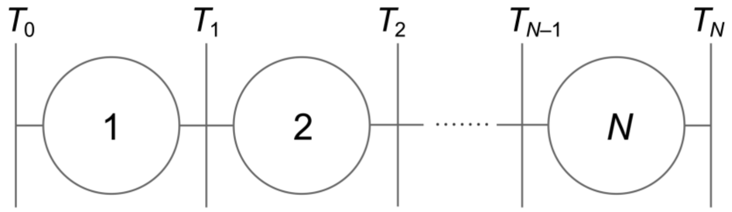
IV. Wnioski

Powracając do oryginalnych oznaczeń $x = \eta_0$, obydwie zastosowane metody pozwalają nam wyprowadzić szukaną wypadkową sprawność N połączonych szeregowo silników cieplnych, każdy o sprawności η_0:

$$\boxed{\eta = 1-(1-\eta_0)^N}. \tag{18}$$

Warto zauważyć, że ponieważ $\eta_0 < 1$, to w granicy $N \to \infty$, wypadkowa sprawność szeregowego układu połączonych silników będzie dążyła do jedności $(\lim_{N\to\infty} \eta_N = 1)$, czyli zwiększając N będziemy zbliżać się do przypadku silnika o idealnej sprawności.

Nie jest to wynik sprzeczny z oczekiwaniami, kiedy rozważymy szczególny przypadek silnika Carnota. W silniku Carnota zarówno pobieranie jak i oddawanie ciepła przez substancję roboczą następuje przy stałej temperaturze – procesy wymiany ciepła przebiegają izotermicznie. Niech w takim przypadku, pierwsza grzejnica w układzie ma temperaturę T_0, pierwsze chłodnica, która jest zarazem grzejnicą dla silnika 2, ma temperaturę T_1 i tak dalej, aż do, zamykającej szereg, chłodnicy o temperaturze T_N. Schematycznie, sytuację tę przedstawiono na rysunku poniżej.



W przypadku szeregu silników Carnota, sprawność każdego z silników można wyrazić poprzez stosunek temperatury chłodnicy względem grzejnicy:

$$\eta_0 = 1 - \frac{T_1}{T_0} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \ldots = 1 - \frac{T_N}{T_{N-1}}. \quad (19)$$

Ponieważ założyliśmy równość sprawności poszczególnych silników, dla każdego z nich stosunek temperatury chłodnicy względem temperatury grzejnicy będzie wyrażał się jako:

$$\frac{T_{N+1}}{T_N} = 1 - \eta_0. \quad (20)$$

Stąd łatwo dojść do wniosku, że stosunek temperatury ostatniej chłodnicy do temperatury pierwszej grzejnicy dany jest przez wyrażenie:

$$\frac{T_N}{T_0} = (1 - \eta_0)^N, \quad (21)$$

co po podstawieniu do równania (18) daje nam następujące wyrażenie na sprawność szeregowego układu N silników Carnota:

$$\eta_N = 1 - \frac{T_N}{T_0}. \quad (22)$$

Otrzymana wypadkowa sprawność wyraża się więc identycznie jak sprawność pojedynczego silnika Carnota o temperaturze grzejnicy T_0 i temperaturze chłodnicy T_N. Na podstawie równania (21) widzimy, że przy ustalonym T_0 temperatura ostatniej chłodnicy maleje w postępie geometrycznym wraz ze wzrostem N. W granicy $N \to \infty$ otrzymujemy więc $T_N \to 0$, co przekłada się na $\eta_N \to 1$.