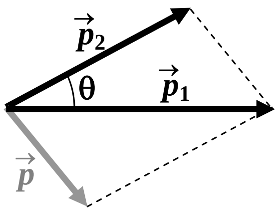
Zjawisko Comptona – opis pół relatywistyczny

Jerzy Ginter
Wydział Fizyki UW

Zderzenie fotonu ze spoczywającym elektronem

Przy omawianiu dualizmu korpuskularno-falowego – jako jeden z pięknych przykładów – prezentowane jest zjawisko Comptona. Jest ono interpretowane jako sprężyste zderzenie fotonu z początkowo nieruchomym elektronem (rys. 1). W zderzeniu tym zachowane są pęd i energia.



Rys. 1. Wektory pędu elektronu $(\vec{p})$ oraz fotonu padającego $(\vec{p}_1)$ i rozproszonego $(\vec{p}_2)$ w zjawisku Comptona

Przyjmijmy oznaczenia:
- E_1 i $\vec{p}_1$ – energia i pęd fotonu padającego,
- E_2 i $\vec{p}_2$ – energia i pęd fotonu rozproszonego,
- E i $\vec{p}$ – energia i pęd elektronu.

W ramach mechaniki relatywistycznej wykazuje się, że w takim zderzeniu energia fotonu rozproszonego E_2 jest mniejsza od energii fotonu padającego E_1 i wyraża się wzorem[1]

$$E_2 = \frac{E_1}{1 + \frac{E_1}{mc^2}(1 - \cos\theta)}, \tag{1}$$

gdzie m oznacza masę spoczynkową elektronu, c – prędkość światła, a θ – kąt pomiędzy kierunkiem biegu fotonu padającego i fotonu rozproszonego.

[1] Zob. np. Wikipedia, *Zjawisko Comptona*.

Obecna podstawa programowa

Niestety relatywistyczny opis zjawiska Comptona znalazł się poza zasięgiem obecnej podstawy programowej. W IV etapie edukacyjnym – zakresie rozszerzonym:

1. nie ma w ogóle elementów szczególnej teorii względności;
2. nie wspomina się o pędzie fotonów;
3. jest natomiast enigmatyczne hasło: (uczeń) „określa długość fali de Broglie'a poruszających się cząstek". Aby je zrealizować trzeba podać związek pomiędzy wartością pędu p a długością fali λ cząstek z niezerową masą spoczynkową, czyli

$$\lambda = \frac{h}{p}\,. \tag{2}$$

Propozycja opisu pół relatywistycznego

Dla typowych promieni Roentgena energia fotonów jest rzędu kilkudziesięciu kiloelektronowoltów. Jest więc w przybliżeniu o rząd mniejsza od energii spoczynkowej elektronu mc^2 = 511 keV. Dla tego przypadku zupełnie dobre wyniki opisu zjawiska Comptona można uzyskać, stosując do elektronu nierelatywistyczny związek pomiędzy wartością pędu p a energią kinetyczną E_k, czyli wzór

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}\,, \tag{3}$$

gdzie $\vec{v}$ jest prędkością elektronu. Energia kinetyczna elektronu jest oczywiście proporcjonalna do kwadratu wartości pędu.

Jedyne istotne założenie – spoza podstawy programowej – które trzeba zrobić, polega na przyjęciu, że wzór (2) obowiązuje także dla fotonów.

Energia fotonu E_f jest równa:

$$E_f = h\nu\,, \tag{4}$$

gdzie ν oznacza częstotliwość fali elektromagnetycznej, a h jest stałą Plancka. Ze wzorów (2) i (4) wynika, że dla fotonu wartość pędu p_f jest równa:

$$p_f = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{\lambda\nu} = \frac{E_f}{c}\,, \tag{5}$$

gdzie $c = \lambda\nu$ jest prędkością światła. Energia fotonu E_f jest proporcjonalna do wartości pędu fotonu p_f – w potędze pierwszej.

Podsumujmy. W proponowanych obliczeniach:
– elektron traktowany jest jak cząstka nierelatywistyczna;
– fotony traktowane są jak cząstki relatywistyczne z zerową masą spoczynkową.

Obliczenia

Obliczmy w ramach podanego powyżej przybliżenia pół relatywistycznego energię rozproszonego fotonu.

W zderzeniu sprężystym zachowana jest energia, czyli

$$\frac{m\upsilon^2}{2} + E_2 = E_1. \tag{6}$$

Zachowany jest także pęd (rys. 1):

$$\vec{p}_2 + m\vec{\upsilon} = \vec{p}_1. \tag{7}$$

Przekształćmy wzór (7):

$$\vec{p}_1 - \vec{p}_2 = m\vec{\upsilon}; \tag{8}$$

$$(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)\circ(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) = m^2\upsilon^2; \tag{9}$$

$$p_2^2 + p_1^2 - 2\vec{p}_2 \circ \vec{p}_1 = m^2\upsilon^2; \tag{10}$$

$$p_2^2 + p_1^2 - 2p_2 p_1 \cos\theta = m^2\upsilon^2. \tag{11}$$

Skorzystajmy teraz z wzoru (5). Możemy napisać:

$$\frac{E_2^2}{c^2} + \frac{E_1^2}{c^2} - 2\frac{E_2E_1}{c^2}\cos\theta = m^2\upsilon^2 \tag{12}$$

$$E_2^2 + E_1^2 - 2E_2E_1\cos\theta = c^2m^2\upsilon^2 = 2c^2m\frac{m\upsilon^2}{2} = 2mc^2(E_1 - E_2). \tag{13}$$

W ostatnim kroku skorzystaliśmy z wzoru (6), czyli zasady zachowania energii. Uzyskaliśmy w ten sposób równanie kwadratowe na E_2:

$$E_2^2 + 2(mc^2 - E_1\cos\theta)E_2 + E_1^2 - 2mc^2E_1 = 0. \tag{14}$$

Obliczmy wyróżnik tego równania:

$$\begin{aligned}\Delta &= 4(mc^2 - E_1\cos\theta)^2 - 4(E_1^2 - 2mc^2E_1) = \\ &= 4[m^2c^4 + E_1^2\cos^2\theta - 2mc^2E_1\cos\theta - E_1^2 + 2mc^2E_1] = \\ &= 4m^2c^4\left[1 + 2\frac{E_1}{mc^2}(1-\cos\theta) - \frac{E_1^2}{m^2c^4}(1-\cos^2\theta)\right] = \\ &= 4m^2c^4\left[1 + 2\frac{E_1}{mc^2}(1-\cos\theta) - \frac{E_1^2}{m^2c^4}\sin^2\theta\right].\end{aligned} \tag{15}$$

Na energię E_2 dostajemy wyrażenie (odrzucamy rozwiązanie ujemne):

$$E_2 = \frac{1}{2}\left[-2(mc^2 - E_1\cos\theta) + 2mc^2\sqrt{1 + 2\frac{E_1}{mc^2}(1-\cos\theta) - \frac{E_1^2}{m^2c^4}\sin^2\theta}\right] \tag{16}$$

Możemy je też napisać w formie:

$$E_2 = E_1\left[\frac{mc^2}{E_1}\sqrt{1 + 2\frac{E_1}{mc^2}(1-\cos\theta) - \frac{E_1^2}{m^2c^4}\sin^2\theta} - \frac{mc^2}{E_1} + \cos\theta\right] \tag{17}$$

i jako stosunek energii fotonów $\frac{E_2}{E_1}$:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{mc^2}{E_1}\sqrt{1 + 2\frac{E_1}{mc^2}(1-\cos\theta) - \frac{E_1^2}{m^2c^4}\sin^2\theta} - \frac{mc^2}{E_1} + \cos\theta. \tag{18}$$

Zauważmy: nawias we wzorze (17) zależy od kąta θ i stosunku $\frac{E_1}{mc^2}$. We wzorze tym pojawiła się energia spoczynkowa elektronu mc^2, mimo, że elektron traktowaliśmy jak cząstkę nierelatywistyczną.

Dyskusja wyników

Przedyskutujmy uzyskany wynik.

Maksymalne odchylenie (θ = 180°) oraz $E_1 = 0{,}1\,mc^2$

Na początku przyjmijmy, że nastąpiło maksymalne odchylenie, czyli kąt θ = 180°. Wtedy cos θ = –1, a sin θ = 0. Wzór (17) trochę się upraszcza i przyjmuje postać:

$$E_2 = E_1\left[\frac{mc^2}{E_1}\sqrt{1 + 4\frac{E_1}{mc^2}} - \frac{mc^2}{E_1} - 1\right] \tag{19}$$

Podstawmy do tego wzoru przykładowe dane liczbowe:

– Dla elektronu mc^2 = 511 keV.
– Przyjmijmy, że E_1= 51,1 keV, co odpowiada typowej wartości fotonów promieniowania rentgenowskiego. Wtedy $\frac{E_1}{mc^2}$ = 0,1.

$$E_2 = 51{,}1\,\text{keV}\cdot\left(10\sqrt{1{,}4} - 10 - 1\right) = 51{,}1\,\text{keV}\cdot 0{,}8322 = 42{,}52\,\text{keV}. \tag{20}$$

Ścisły wzór (1) dla $\theta = 180°$, $1 - \cos\theta = 2$ i $\frac{E_1}{mc^2} = 0{,}1$ daje wartość:

$$E_2 = \frac{E_1}{1 + 2\frac{E_1}{mc^2}} = 51{,}1\,\text{keV}\frac{1}{1{,}2} = 51{,}1\,\text{keV} \cdot 0{,}8333 = 42{,}58\,\text{keV}\,. \qquad (21)$$

Dokładność naszych pół relatywistycznych obliczeń dla przyjętych wartości liczbowych jest zupełnie dobra. Względny błąd E_2 jest rzędu

$$\frac{0{,}06}{43} \approx 0{,}15\% \qquad (22)$$

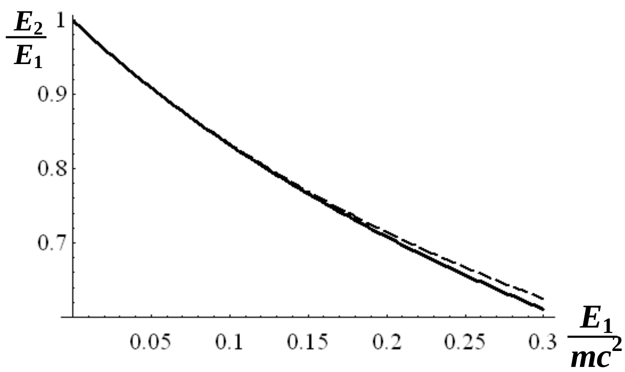
Zapytajmy jeszcze, jaka w omawianym przypadku jest energia elektronu po zderzeniu, E? Z prawa zachowania energii mamy:

$$E = E_1 - E_2 = (1 - 0{,}83)\,E_1 = 0{,}017mc^2 = 8{,}69\ \text{keV}. \qquad (23)$$

Energia kinetyczna elektronu jest rzeczywiście znacznie mniejsza od jego energii spoczynkowej.

Zależność E_2 od E_1

Zobaczmy teraz, jaka jest dokładność naszych obliczeń dla $\theta = 180°$, ale w szerszym zakresie energii fotonów padających E_1. Sporządźmy w tym celu wykresy zależności $\frac{E_2}{E_1}$ od $\frac{E_1}{mc^2}$, dla wzoru ścisłego (1) i przybliżonego (18). Przedstawia je rys. 2. Widać, że w zakresie energii fotonów, odpowiadających typowemu promieniowaniu Roentgena, krzywe niemal się pokrywają.



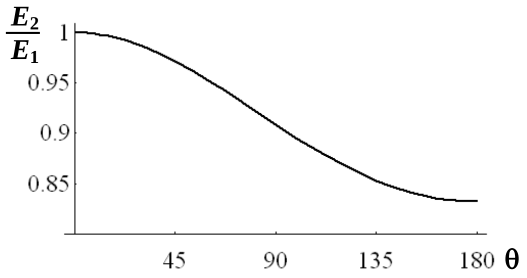
Rys. 2. Względny stosunek energii fotonów w zjawisku Comptona: linia przerywana – rachunek ścisły, linia ciągła – rachunek przybliżony

Zależność od kąta θ

Przedyskutujmy jeszcze zależność E_2 od kąta θ. Zróbmy to dla $\frac{E_1}{mc^2} = 0{,}1$. Podstawiając wartości liczbowe do wzoru (17) dostajemy

$$\frac{E_2}{E_1} = 10\sqrt{1 + 0{,}2\,(1 - \cos\theta) - 0{,}01\sin^2\theta} - 10 + \cos\theta \tag{24}$$

Wykres tej zależności przedstawia rysunek 3.



Rys. 3. Zależność energii fotonu rozproszonego od kąta θ

Wzór ścisły (1) prowadzi do wyrażenia

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{1 + 0{,}1\,(1 - \cos\theta)} \tag{25}$$

Różnica pomiędzy wykresami funkcji o równaniach (24) i (25) jest w skali rysunku niewidoczna.

Wnioski

Dla typowego promieniowania Roentgena uzyskuje się zupełnie dobre wyniki opisu zjawiska Comptona, stosując do elektronu nierelatywistyczny związek pomiędzy wartością pędu a energią kinetyczną. Przedstawione wyżej obliczenia można by chyba potraktować jako pouczające zadanie w klasach o profilu matematyczno-fizycznym.

Można też wybrać wariant prostszy, ograniczając się jedynie do zderzenia centralnego, czyli θ = 180°. Wtedy wektory pędów są do siebie równoległe i obliczenia ograniczają się do jednego wymiaru.

Od Redakcji:
https://www.youtube.com/watch?v=kzRcS5cJtNw