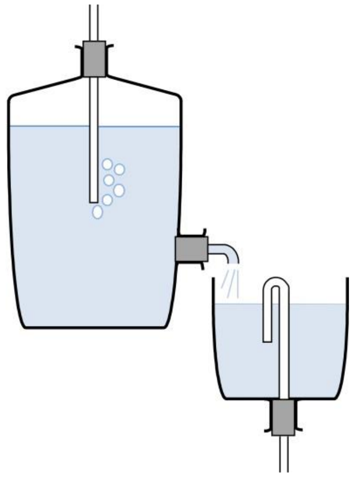
Badanie wypływu wody z lewara i butelki Mariotte'a

Zadanie z IX Olimpiady fizycznej 1959/1960[1]

Opracował Tadeusz M. Molenda

Zawody Stopnia III, zadanie doświadczalne

Zestaw układ doświadczalny według rys. 1. Do naczynia z lewarem można wlewać wodę z butli, regulując jej prędkość wypływu zmianą głębokości zanurzenia rurki.



Rys. 1.

Napełnij górne naczynie wodą i obserwuj zmiany poziomu wody w dolnym naczyniu. Wyjaśnij działanie urządzenia oraz przebieg obserwowanego zjawiska. Powtórz doświadczenie kilka razy i sporządź wykres zależności wysokości

[1] Zadanie zostało udostępnione z bazy zadań Olimpiady Fizycznej w Szczecinie (www.OF.szc.pl) i dla *Fotonu* przygotowane przez przewodniczącego Komitetu Okręgowego OF w Szczecinie dra Tadeusza Molendę.

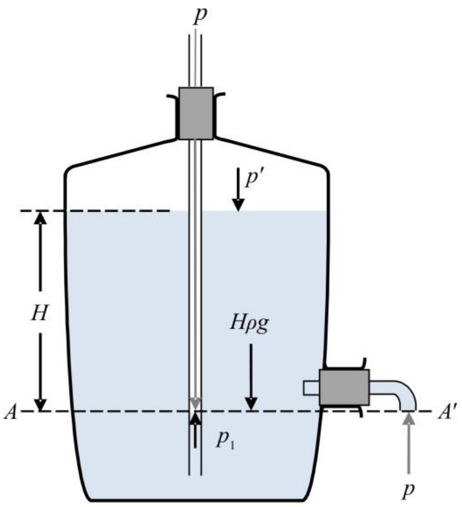
Zadanie wraz z rozwiązaniem zostało opublikowane w zbiorach: *Olimpiady Fizyczne IX i X*, PZWS, Warszawa 1965, s. 62–69, przygotowane do zbioru przez Stefana Czarneckiego, ówczesnego kierownika organizacyjnego w Komitecie Głównym OF; *Olimpiada fizyczna. Wybrane zadania doświadczalne z rozwiązaniami*. Stowarzyszenie „Symetria i Własności Strukturalne", Poznań 1994, s. 38, 104–106, przez Waldemara Gorzkowskiego i Andrzeja Kotlickiego.

Zadania z olimpiad fizycznych są na ogół oryginalne. Pomysły pochodzą z różnych źródeł; są także składane przez nauczycieli i samych zawodników olimpiady. Propozycje zadań były zmieniane w wyniku dyskusji w Komitecie Głównym OF i często nie przypominają tekstu pomysłodawcy (przyp. – Tadeusz Molenda, Instytut Fizyki, Uniwersytet Szczeciński).

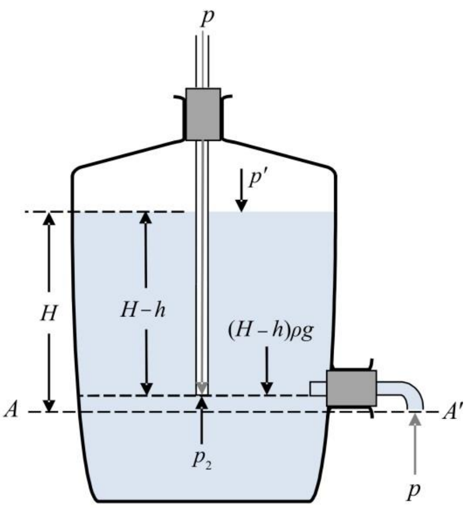
poziomu wody w naczyniu dolnym od czasu. Od czego zależy częstotliwość wypływu wody z dolnego naczynia?

Rozwiązanie

Zanim przystąpimy do właściwego rozwiązania zadania, zajmiemy się najpierw pierwszą częścią przygotowanego zestawu eksperymentalnego, która pozwala, jak to wynika z tekstu, na regulowanie prędkości wypływu wody z butli. Jest to proste urządzenie, zwane butelką Mariotte'a (rys. 2). Butelka ta jest bardzo wygodna przy wielu doświadczeniach z wypływem cieczy[2], gdyż zapewnia stałość szybkości wypływu przez dolne odprowadzenie.



Rys. 2.



Rys. 3.

Wyobraźmy sobie (rys. 2) naczynie ze zwężoną szyjką, zaopatrzoną w szczelny korek z przeprowadzoną pionową rurką. Rurkę można przesuwać w korku w górę i w dół z zachowaniem szczelności.

W dolnej części naczynia znajduje się dodatkowa szyjka (tzw. tubus), również zatkana korkiem z przeprowadzoną rurką, którą będziemy dalej nazywać rurką odpływową. Załóżmy dalej, że w naczyniu znajduje się woda, przy czym jej powierzchnia swobodna pozostaje na wysokości H ponad poziomem zewnętrznego otworu rurki odpływowej (poziom ten na rysunku oznaczono linią przerywaną $A - A'$).

Rozpatrzymy dwa przypadki, z których pierwszy przedstawia rys. 2. Rurka pionowa została tak opuszczona, że jej dolny koniec leży poniżej poziomu

[2] Porównaj z artykułem: *Wyznaczamy współczynnik lepkości cieczy*, S. Bednarek, *Foton* 122.

otworu rurki odpływowej. Łatwo zauważyć, że poziom wody w rurce pionowej musi znajdować się na wysokości końca rurki odpływowej, na poziomie $A - A'$. Na powierzchnię wody w obu rurkach wywierane jest wówczas takie samo ciśnienie atmosferyczne p, równoważone przez ciśnienie p_1, będące sumą ciśnienia p', panującego w górnej części butli ponad swobodną powierzchnią wody i ciśnienia hydrostatycznego słupa wody o wysokości H. Mamy więc tutaj

$$p' + \rho g H = p_1 = p, \tag{1}$$

gdzie ρ – gęstość wody, g – wartość przyspieszenia ziemskiego.

Wyobraźmy sobie teraz, że rurka pionowa została przesunięta w korku w górę tak, że dolny jej koniec znajduje się na wysokości h ponad poziomem $A - A'$. Ten przypadek przedstawiony został na rys. 3. Tym razem równowaga ciśnień nie będzie zachowana. Rozpatrzmy sytuację w dolnym wylocie pionowej rurki. Z góry wywierane jest ciśnienie atmosferyczne p, z dołu zaś ciśnienie p_2 mniejsze od p_1, choć bowiem ciśnienie p' pozostało w pierwszym momencie niezmienione, to jednak ciśnienie hydrostatyczne jest mniejsze ze względu na zmniejszenie się wysokości słupa wody. Mamy teraz:

$$p' + (H - h)\rho g = p_2 < p. \tag{2}$$

W wyniku tego przez rurkę pionową zacznie się wdzierać powietrze i gromadzić w górnej części naczynia. Dalszym skutkiem będzie wypieranie cieczy z naczynia, która zacznie się wylewać rurką odpływową.

Obliczymy teraz efektywne ciśnienie p_{ef}, wywołujące ostatecznie wypływanie wody przez boczną rurkę. Jest ono oczywiście równe różnicy ciśnień p_1 i p_2:

$$p_{ef} = p_1 - p_2 = p' + H\rho g - \left[p' + (H - h)\rho g \right],$$

czyli

$$p_{ef} = \rho g h. \tag{3}$$

Doszliśmy do bardzo istotnego wniosku. Oto w uzyskanym wyrażeniu (3) na ciśnienie efektywne nie występuje wcale H, czyli początkowa wysokość słupa wody w naczyniu. Ciśnienie efektywne jest stałe aż do chwili, gdy opadający poziom wody w naczyniu nie osiągnie dolnego wylotu pionowej rurki. Ciśnienie to, jak widzimy, jest równe ciśnieniu hydrostatycznemu nie całego słupa wody, a jedynie jego części zawartej między poziomami wylotów obu rurek.
Dalszy płynący stąd wniosek to stałość prędkości wypływu. Stosując znany wzór Torricellego mamy:

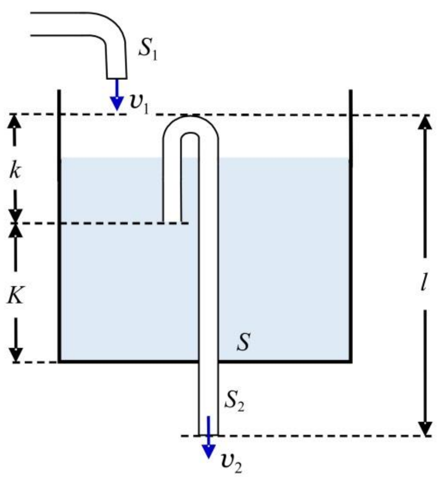
$$v = \sqrt{2gh}, \tag{4}$$

gdzie h jest stałą różnicą między poziomami wylotów rurek.

Tak więc butelka Mariotte'a pozwala w bardzo wygodny sposób regulować prędkość wypływu wody przez zmianę głębokości zanurzenia rurki pionowej. Możemy uzyskiwać stałą prędkość wypływu cieczy z naczynia i to z możliwością regulacji w pewnych granicach tej prędkości przez proste dobieranie wartości h.

Znając działanie butelki Mariotte'a, przejdziemy do rozważań nad tym, co się dzieje w naczyniu z lewarem (taką nazwę nosi dolne naczynie na rys. 1 z zagiętą rurką), gdy z rurki odpływowej butli wpływać będzie do niego woda strumieniem o stałej prędkości.

Obserwacje wykazują, że gdy poziom wody podnosząc się w naczyniu osiągnie górne zagięcie lewara, nastąpi wypływ wody przez lewar. Przy tym, jeśli prędkość wypływu wody przez lewar jest większa niż prędkość dopływu wody z butelki Mariotte'a, to poziom wody opada stopniowo do poziomu otworu wlotowego rurki lewara. W tym momencie wypływ wody przez lewar ustanie. Wskutek jednak ciągłego dopływu wody z butli poziom zacznie się znowu podnosić aż do ponownego osiągnięcia górnego zagięcia rurki. Zjawisko to powtarzać się będzie periodycznie, a powierzchnia swobodna wody w naczyniu będzie oscylować między górnym poziomem kolanka lewara a jego otworem wlotowym.



Rys. 4.

Powtarzając eksperyment przy różnych położeniach rurki regulacyjnej w butelce Mariotte'a stwierdzimy, że okres powtarzającego się zjawiska zależy od wartości h, czyli tym samym od prędkości wody napływającej do dolnego naczynia. Wykreślenie zależności wysokości poziomu cieczy w naczyniu z lewarem od czasu wykazuje, że choć jest to funkcja periodyczna, to jednak odbiega od typowych funkcji periodycznych, do jakich przywykł uczeń w czasie nauki szkolnej. Wykres przedstawia linię łamaną podobną do ostrza piły o niesymetrycznych zębach.

Do takich wniosków prowadzi obserwacja. Postaramy się jednak zjawisko to wyjaśnić i uzasadnić nieco ściślej. W tym celu posłużymy się schematycznym rysunkiem naczynia z lewarem (rys. 4).

Załóżmy, że z butelki Mariotte'a wlewa się woda do naszego naczynia przez rurkę o przekroju S_1 z prędkością υ_1. Na jednostkę czasu dopływa zatem objętość wody równa $\upsilon_1 \cdot S_1$. Obliczymy najpierw czas potrzebny na to, by powierzchnia swobodna wody podniosła się na wysokość K, czyli do poziomu otworu wlotowego lewara. Czas ten wyniesie:

$$t_1 = \frac{KS}{\upsilon_1 S_1} = \frac{KS}{S_1\sqrt{2gh}}, \tag{5}$$

gdzie S jest polem przekroju poprzecznego naczynia. W podobny sposób obliczamy czas podnoszenia się powierzchni swobodnej wody od poziomu otworu wlotowego do kolanka lewara. Wyniesie on

$$t_2 = \frac{kS}{\upsilon_1 S_1} = \frac{kS}{S_1\sqrt{2gh}}. \tag{6}$$

Całkowity czas podnoszenia się wody w naczyniu od początku doświadczenia będzie zatem równy

$$t = t_1 + t_2 = \frac{S}{\upsilon_1 S_1}(K + k). \tag{7}$$

Od tej chwili poziom wody w naczyniu przestaje się podnosić, napełnia się kolanko, potem prawe ramię lewara i równowaga zostaje zachwiana. Wskutek ciśnienia hydrostatycznego w prawym ramieniu lewara, wynoszącego $l\rho g$, rozpoczyna się wylewanie wody przez lewar z początkową prędkością równą:

$$\upsilon_2 = \sqrt{2gl}\,. \tag{8}$$

Ściśle biorąc, wzór (8) jest słuszny jedynie „w pierwszej chwili". Jeżeli poziom w naczyniu zacznie się obniżać, to i ciśnienie hydrostatyczne w dłuższym ramieniu lewara, wywołujące wylewanie się wody, będzie malało. Wielkość l występująca we wzorze (8) nie jest przecież długością lewara, ale różnicą poziomów między powierzchnią swobodną wody w naczyniu a dolnym otworem prawego ramienia lewara. Jeżeli jednak lewe ramię lewara jest znacznie krótsze od prawego, jak też i jest w istocie, czyli gdy zachodzi warunek:

$$k \ll l, \tag{9}$$

to możemy zagadnienie uprościć zakładając, że prędkość strumienia wody przelewającej się przez lewar jest stała i wyraża się wzorem (8). Przy takim zaś założeniu łatwo obliczyć, jaka objętość wody wypływa w jednostce czasu przez lewar. Wynosi ona

$$v_2 S_2 = S_2\sqrt{2gl}. \tag{10}$$

Mogą obecnie zajść trzy możliwości:

1. $v_1 S_1 > v_2 S_2$. Więcej wody dopływa do naczynia niż odpływa przez lewar. Poziom wody w naczyniu podnosi się dalej, tyle tylko, że wolniej.
2. $v_1 S_1 = v_2 S_2$. Powierzchnia swobodna wody utrzymuje się stale na wysokości kolanka lewara.
3. $v_1 S_1 < v_2 S_2$. Mniej wody dopływa do naczynia niż odpływa przez lewar. Ten przypadek jest najciekawszy i nim zajmiemy się dokładniej.

Ponieważ więcej wody odpływa przez lewar niż przypływa z butelki Mariotte'a, zatem poziom wody obniża się aż do otworu wlotowego lewara. Z lewara spływa woda, a zostaje zassane powietrze. Od tego momentu znowu poziom w naczyniu podnosi się, by po upływie czasu t_2 (wzór 6) osiągnąć kolanko lewara. Postaramy się obecnie oszacować czas t_3 – obniżania się poziomu wody w naczyniu wskutek wypływania wody przez lewar. Ponieważ na jednostkę czasu wpływa objętość v_1S_1, a odpływa v_2S_2, zatem na jednostkę czasu ubywa z naczynia

$$v_2 S_2 - v_1 S_1 = S_2\sqrt{2gl} - S_1\sqrt{2gh}.$$

Stąd mamy

$$t_3 = \frac{kS}{\sqrt{2g}\left(S_2\sqrt{l} - S_1\sqrt{h}\right)}. \tag{11}$$

Teraz już bardzo łatwo znajdziemy okres T naszych oscylacji korzystając z wzorów (6) i (11):

$$T = t_2 + t_3 = \frac{kS}{S_1\sqrt{2gh}} + \frac{kS}{\sqrt{2g}\left(S_2\sqrt{l} - S_1\sqrt{h}\right)}. \tag{12}$$

Część doświadczalna

Układy eksperymentalne dostarczone zawodnikom nie były identyczne. Można jednak przyjąć pewne średnie wartości:

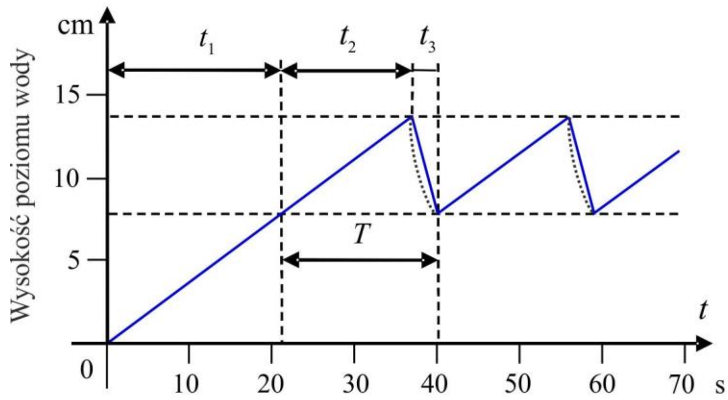
k = 6 cm, l = 30 cm, S_1 = 0,3 cm^2, S_2 = 0,8 cm^2, S = 80 cm^2, K = 8 cm.

Dla tych przeciętnych wartości i przykładowo wybranego h = 5 cm obliczymy okres oscylacji T i czas pierwszego napełnienia t_1 oraz sporządzimy wykres. Z wzoru (12) mamy:

$$T = \frac{6\cdot 80}{0{,}3\sqrt{2000\cdot 5}}\,\mathrm{s} + \frac{6\cdot 80}{\sqrt{2000}\left(0{,}8\sqrt{30} - 0{,}3\sqrt{5}\right)}\,\mathrm{s} \cong 16{,}0\,\mathrm{s} + 2{,}9\,\mathrm{s} = 18{,}9\,\mathrm{s},$$

$$t_1 = \frac{8 \cdot 80}{0{,}3\sqrt{2000 \cdot 5}}\ \mathrm{s} \cong 21{,}3\ \mathrm{s}\,.$$

Rysunek 5 przedstawia przebieg poszukiwanej zależności. Otrzymany wykres nie odzwierciedla jednak wiernie prawdziwego przebiegu procesu. Jest on nieco wyidealizowany. W rachunkach naszych poczyniliśmy szereg uproszczeń. Jednym z nich było przyjęcie, że υ_2 = const wypływające z założenia (9). W rzeczywistości prędkość υ_2 w miarę trwania wypływu wody przez lewar stopniowo, choć nieznacznie, maleje. Stąd wniosek, że krótsze, opadające odcinki naszej linii łamanej w istocie rzeczy nie są odcinkami prostoliniowymi. Na rysunku linia kropkowana przedstawia przebieg bardziej zbliżony do prawdziwego.



Rys. 5. Wykres zmian poziomu wody w dolnym naczyniu w zależności od czasu

t_1 – czas napełniania naczynia do poziomu otworu wlotowego rurki,
t_2 – czas napełniania naczynia do chwili osiągnięcia górnego zagięcia (licząc od chwili osiągnięcia poziomu otworu wlotowego rurki),
t_3 – czas wypływu wody z naczynia,
T – okres oscylacji.

W naszym rozumowaniu przyjęliśmy także jeszcze inne uproszczenia. Oto pominęliśmy szczególnie trudne do ścisłego ujęcia procesy zachodzące w momentach napełniania się lewara, gdy poziom wody podnosi się i dochodzi do kolanka, oraz gdy opada i osiąga otwór wlotowy lewara. Tym momentom odpowiadają na wykresie punkty załamania. W procesach tych odgrywa rolę cały szereg czynników, takich jak zwilżanie, napięcie powierzchniowe, kształt menisku, lepkość, kształt kolanka lewara i inne. Te rozmaite czynniki komplikują przebieg procesów i wywołują miedzy innymi „złagodzenie” ostrych załamań na wykresie w postaci zaokrągleń, które występują szczególnie wtedy, gdy lewar jest wykonany z nieco grubszej rurki. Uczniowie wykonywali wykres w oparciu o dane pomiarowe. Mierzyli oni wysokość poziomu wody w naczyniu w rozmaitych fazach zjawiska za pomocą linijki oraz czas, posługując się stoperem. Ci z nich, którzy dokonywali pomiarów szczególnie starannie, uzyskali na swych wykresach wspomniane wyżej zaokrąglenia załamań.

Pozostało nam do omówienia, jakie czynniki wpływają na długość okresu, czy też, inaczej mówiąc, na częstotliwość naszych oscylacji. Na podstawie wzoru (12) stwierdzamy przede wszystkim, że okres jest wprost proporcjonalny do długości krótkiego ramienia lewara k oraz do przekroju S naczynia. Zależny jest on jednak i od innych parametrów. Są nimi przekroje rurek S_1 i S_2, długość l prawego ramienia lewara i wreszcie „efektywna różnica poziomów" h w butelce Mariotte'a. Ostatnie cztery wyliczone parametry wpływają jednak na oba składniki okresu t_2 i t_3 w różny sposób. Zmiana każdego z nich, prócz wpływu na okres, daje zmianę stosunku t_2/t_3, czyli zmienia tym samym kształt naszej linii łamanej, np. wzrost l nie wpływa na t_2, ale za to skraca t_3. Podobną własność posiada S_2.

Uczniowie mogli eksperymentalnie prześledzić jedynie wpływ h na wartość okresu. (Inne parametry były narzucone w gotowej konstrukcji urządzenia). Rola tego parametru jest interesująca. Jego wzrost skraca t_2 a wydłuża t_3 tak jednak, że okres oscylacji ulega skróceniu (12). Dla przykładu obliczymy t_2, t_3 i T dla „efektywnej różnicy poziomów" w butelce Mariotte'a dwa razy większej: h = 10 cm.

$$t_2 = \frac{6 \cdot 80}{0{,}3\sqrt{2000 \cdot 10}}\,\mathrm{s} \cong 11{,}3\,\mathrm{s}, \quad t_3 = \frac{6 \cdot 80}{\sqrt{2000}\left(0{,}8\sqrt{30} - 0{,}3\sqrt{10}\right)}\,\mathrm{s} \cong 3{,}1\,\mathrm{s},$$

$$T \cong 14{,}4\ \mathrm{s}.$$

Widzimy, że t_2 zmalało z 16 s na 11,3 s, a t_3 wzrosło z 2,9 s do 3,1 s. Natomiast okres uległ skróceniu z 18,9 s na 14,4 s. „Zęby piły" stały się bardziej symetryczne. Poziom wody w naczyniu w czasie oscylacji podnosi się szybciej, ale wylew przez lewar odbywa się nieco wolniej.

Zjawisko „oscylacji wodnych" występujących w tym zadaniu jest związane bardzo bliską analogią z tzw. elektrycznymi drganiami relaksacyjnymi – patrz np. zadanie doświadczalne III stopnia z VII Olimpiady fizycznej (*Olimpiady fizyczne VII–VIII*, PZWS, s. 66–75).