Zadanie z egzaminu maturalnego z fizyki 2016

Sławomir Brzezowski

W tegorocznym zestawie maturalnym z fizyki w „nowej” formule (zakres rozszerzony) pojawiło się zadanie nr 3, którego części 3.1 nie dało się rozwiązać.

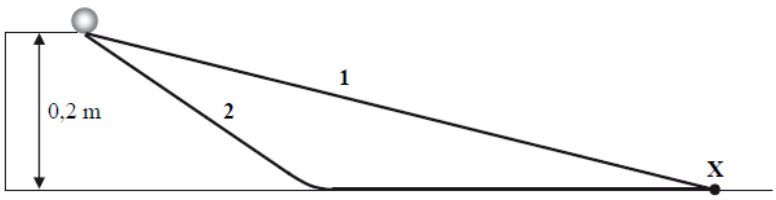
Zadanie 3[*]

Jednorodna kulka K1 zaczyna toczyć się bez poślizgu z wysokości 0,2 m po pochylni 1, a druga taka sama kulka K2 – z tej samej wysokości po pochylni 2, tak jak pokazano na rysunku. Obie kulki po pewnym czasie docierają do punktu X. Pomijamy straty energii kulek.

Wskazówki:

Moment bezwładności jednorodnej kuli względem osi przechodzącej przez jej środek wynosi $I = 0{,}4 \cdot m \cdot R^2$.

Energia kinetyczna toczącej się kulki jest sumą energii ruchu postępowego środka masy i energii kinetycznej ruchu obrotowego wokół środka masy.



Zadanie 3.1. (0–1)

Zaznacz właściwe dokończenie zdania wybrane spośród A i B oraz jego poprawne uzasadnienie wybrane spośród 1.–3.

Czas toczenia się kulki K2 do punktu X jest

<table>
<tr><td rowspan="2">A.</td><td rowspan="2">krótszy niż</td><td rowspan="3">czas toczenia się kulki K1, ponieważ</td><td>1.</td><td>kulka K2 przebyła dłuższą drogę niż kulka K1.</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>obie kulki staczały się z tej samej wysokości.</td></tr>
<tr><td>B.</td><td>taki sam jak</td><td>3.</td><td>kulka K2 miała początkowo większe przyspieszenie niż kulka K1.</td></tr>
</table>

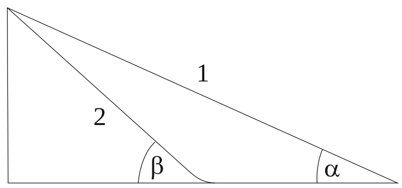
[*] https://www.cke.edu.pl/images/_EGZAMIN_MATURALNY_OD_2015/Arkusze_egzaminacyjne/2016/formula_od_2015/MFA-R1_1P-162.pdf

Chodziło zatem o porównanie czasów tych dwóch przebiegów. Na ten temat zaproponowano sześć zdań, spośród których trzeba było wskazać zdanie prawdziwe.

Aby je wybrać należałoby najpierw wykonać odpowiednie obliczenia. Jak się niżej okaże, bez ich przeprowadzenia i bez znajomości kątów nachylenia równi (a te nie zostały podane), nie da się wskazać prawdziwego zdania. Zauważmy na marginesie, że zadanie jest nisko punktowane.

Rozwiązanie zadania

Niech równia „1" będzie nachylona pod kątem α, równia „2" pod kątem β.



Porównywane czasy oznaczmy odpowiednio t_α i t_β. Udowodnimy, że różnica tych czasów może być dodatnia, zerowa lub ujemna, w zależności od wyboru obydwu kątów (w zakresie $\alpha < \beta$, jak sugeruje rysunek z arkusza maturalnego).

Z równi pochyłej nachylonej pod kątem α kula stacza się z przyspieszeniem kątowym o wartości:

$$\varepsilon = \frac{mgr\sin\alpha}{I_0 + mr^2} = \frac{mgr\sin\alpha}{0{,}4mr^2 + mr^2} = \frac{mgr\sin\alpha}{1{,}4mr^2} = \frac{5}{7}\frac{g\sin\alpha}{r},$$

czyli przyspieszenie liniowe kuli wynosi $a = \frac{5}{7} g \sin\alpha$.

Obliczamy czasy toczenia, osobno dla równi o kącie α i osobno dla równi o kącie β (z „dobiegiem" poziomym).

Proste rachunki prowadzą do wyników:

$$t_\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{\frac{5}{7}g}} = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{14h}{5g}}$$

$$t_\beta = \frac{1}{\sin\beta}\sqrt{\frac{14h}{5g}} + \left(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta\right)\sqrt{\frac{7h}{10g}}.$$

Obliczamy różnicę:

$$t_\beta - t_\alpha = \frac{1}{\sin\beta}\sqrt{\frac{14h}{5g}} + (\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}\beta)\sqrt{\frac{7h}{10g}} - \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{14h}{5g}} - =$$

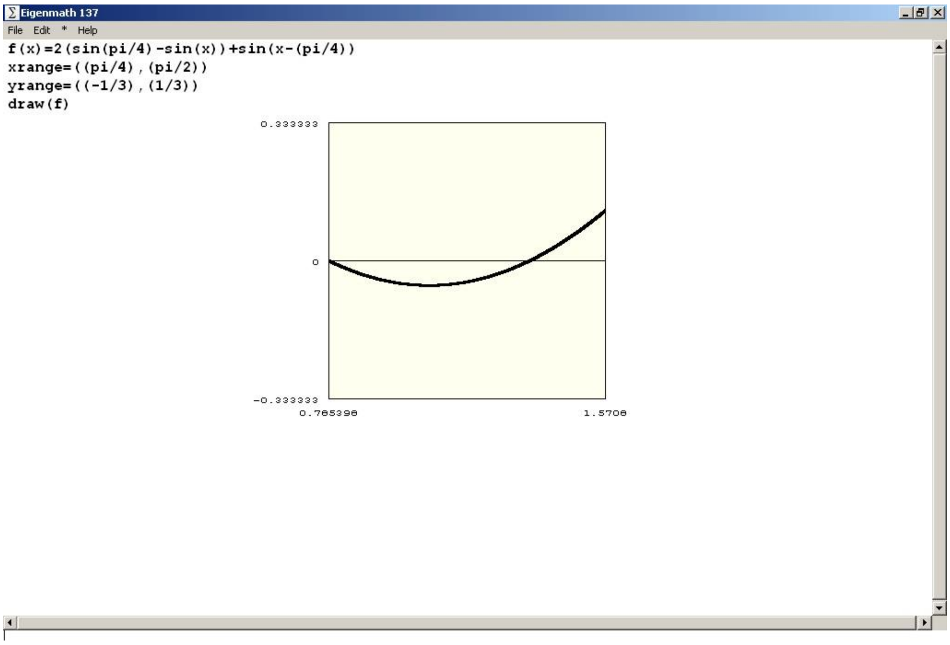
$$= \sqrt{\frac{7h}{10g}}\left[\frac{2}{\sin\beta} - \frac{2}{\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{7h}{10g}}\left[\frac{2(\sin\alpha - \sin\beta) + \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{7h}{10g}}\left[\frac{2(\sin\alpha - \sin\beta) + \sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}\right]$$

O znaku tego wyrażenia decyduje znak licznika. Numeryczne wyznaczenie przebiegu funkcji

$f(x) = 2(\sin\alpha - \sin x) + \sin(x - \alpha)$ dla przykładowego kąta $\alpha = \frac{\pi}{4}$ i przedziału $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ dają wynik:



Zatem w poszukiwanym przedziale kąta β badana różnica bywa dodatnia, zerowa i ujemna. Określenie jej znaku nie jest więc możliwe bez znajomości kątów α i β.

Zważywszy niską punktację tego zadania, oczekiwano, że zdający będą mogli udzielić odpowiedzi bez przeprowadzania rachunków. Formalnie rzecz biorąc, żadne z sześciu zdań, które można zbudować na podstawie tabeli z tematu zadania nie jest prawdziwe, chociaż na przykład zdania A-3 i B-3 bywają prawdziwe przy odpowiednim wyborze kątów.

Postawmy się w roli zdającego. Po namyśle zrozumiał, że w kreowaniu czasu staczania się z równi „2", współzawodniczą dwa przeciwstawne czynniki: większe przyspieszenie (czyli większa szybkość średnia) i wydłużenie drogi. Zdający nie wiedział, który z tych czynników przeważy i bez przeprowadzenia rachunków nie miał możliwości tego sprawdzić. Dlatego odpowiedzi A i B były dla niego w równym stopniu dopuszczalne.

Próbował więc eliminować:

Możliwość A-1 powinien był odrzucić od razu.

Możliwość A-2 – dlaczego nie? Przecież gdyby kule staczały się z różnych wysokości, na przykład kula „2" z większej, to miałaby dalej do celu i to by wydłużyło czas jej toczenia się. Może dopiero jednakowa wysokość daje $t_\beta < t_\alpha$? Skąd uczeń miał wiedzieć, że jest inaczej?

Możliwość A-3 (Centralna Komisja Egzaminacyjna to właśnie zdanie uznała za jedyne prawdziwe). Ew. do przyjęcia dla ucznia. Na równi „2" mamy zwiększoną szybkość, więc być może poziomy fragment toru nie jest tak bardzo wydłużony, żeby to zniwelować. Być może.

Możliwość B-1. Czemu nie? Przy zwiększonej szybkości wydłużenie drogi może akurat skasować wpływ szybkości. I tak rzeczywiście może się stać przy odpowiednio dobranych kątach α i β, jak to wyżej pokazaliśmy.

Możliwość B-2. Podobnie, jak A-2, czyli skąd uczeń miał wiedzieć, że zrównanie wysokości nie skutkuje jednakowymi czasami staczania się? Może tylko dla jednakowych wysokości te czasy są jednakowe?

Możliwość B-3. <u>Dokładnie</u>, jak A-3. Zwiększona szybkość kasowałaby w tym przypadku wpływ wydłużonej drogi, wiec i tak mogło się stać (i tak się rzeczywiście może stać dla właściwie dobranego kąta β).

Zadanie 3.1 jest głęboko wadliwe i powinno było być wyłączone z oceniania.

Problem został zgłoszony do CKE, która jednak utrzymuje, że w zadaniu wszystko jest w porządku.