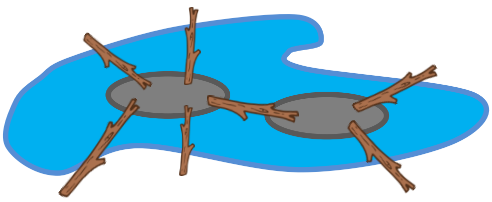
Laboratorium dla matematyka

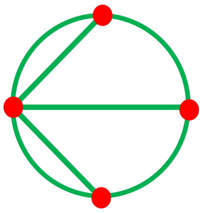
Zasław Adamaszek

Zapewne znamy powiedzenie, że matematykom do pracy wystarczą trzy akcesoria: kartka, ołówek i kosz na śmieci. A filozofom nawet mniej, bo obywają się bez kosza. Mniejsza na razie o tych drugich, ale czy rzeczywiście matematykę można uprawiać tylko w sferze abstrakcji? Albo inaczej, czy na wczesnym etapie poznawania minimalizm służy czy raczej przeszkadza kształtowaniu wyobrażenia o liczbie, operacji, przekształceniu etc.? Myślę tu nie tylko o przedszkolu, kiedy formuje się w umyśle dziecka pojęcie liczby. Nie tylko o wczesnoszkolnych potyczkach z matematyką sprowadzonych do sumowania jabłek z guzikami. Tak na marginesie konia z rzędem temu, kto wyjaśni, po co w praktyce taka suma jest potrzebna – a przykład został zaczerpnięty z jednego z podręczników. Taką sumą ani się najeść ani pozapinać, więc co autor miał na myśli? Matematyka jest doskonałym narzędziem do opisywania i badania nie tyko rzeczywistości materialnej. Lecz nim adept królowej nauk osiągnie wyżyny abstrakcji, nabywa wprawy w kontakcie z realnym światem. Czyli bawi się. Zdaniem autora najlepszym do tego – zabawy – miejscem jest laboratorium. Matematyczny umysł jest tu w sytuacji uprzywilejowanej, bo swoje laboratorium może urządzić wszędzie i wyposażyć dowolnie. Proszę, oto przykład: letni ogród, gdzie paprocie rozłożyły swe pióropusze, a słoneczniki zakwitają żółtymi tarczami to wyśmienite miejsce do badania cech symetrii lub struktur fraktalnych. Albo: sznurówki wyciągnięte z butów są dobrym narzędziem do badania węzłów i splotów. Można z nich tworzyć węzły poskromione, ale czy dadzą się ułożyć w węzeł dziki?

Spróbujmy takiej praktyki laboratoryjnej. Po pierwsze czekamy na deszcz. Następnie wyszukujemy dużą kałużę. Wrzucamy do niej dwie stare pokrywki lub sypiemy dwa kopce z błota (kto tego w dzieciństwie nie robił?). Teraz z patyków układamy siedem mostów pomiędzy brzegiem a wyspami tak, jak pokazuje to rysunek obok. I mamy gotowy problem badawczy. W wyobraźni redukujemy się do rozmiarów mrówki i czynimy jedno założenie: przez każdy patyk można przebiec tylko raz. Rozstrzygnijmy, czy startując z lewej wyspy możemy przejść przez wszystkie mosty tak, by spacer skończyć na niej? A z prawej? Lub w wersji klasycznej znanej jako problem mostów królewieckich kałużę zamieniamy na strumień. Czy można odbyć spacer przez wszystkie mosty, każ-



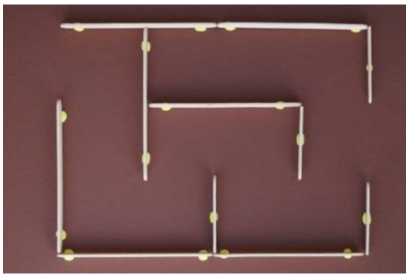
dy z nich przekraczając tylko jednokrotnie? Pamiętajmy, że strumień ma dwa rozłączne brzegi.



Tak przez taplanie się błocie właściwe radosnemu dzieciństwu gładko wchodzimy w teorię grafów. Kopce błota i brzegi kałuży zamieniamy w wierzchołki, patyki zaś to krawędzie. Taki oto graf równoważny jest wspomnianym już królewieckim mostom. To znaczy dwóm wyspom na rzece. Przeszliśmy więc zgrabnie od sytuacji rzeczywistej do zapisu symbolicznego. Czy potrafisz Czytelniku uzupełnić krawędzie pokazanego grafu tak, by reprezentował przypadek z kałużą?

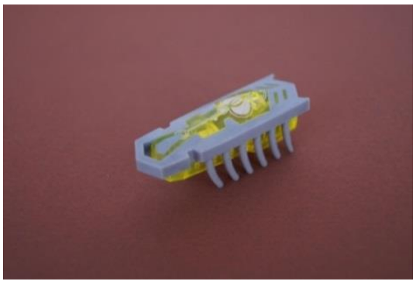
Własności grafów można opisać jednoznacznie z pomocą algorytmów. Czyli ciągu zdefiniowanych i uporządkowanych czynności potrzebnych do realizacji określonego procesu. Niech za przykład posłuży nam labirynt. Algorytmem opiszemy metodę wyjścia z niego. A co to jest labirynt? Prosta droga do celu zagmatwana ponad wszelką miarę. Budowano je, by np. utrudnić dostęp osobom niepowołanym. Labirynty buduje też natura, co ciekawe w celu zgoła odwrotnym, niż człowiek. Meandryczna struktura jelita cienkiego, kłębuszków nerkowych lub ślimaka w uchu wewnętrznym ułatwia wyciągnięcie maksimum korzyści dla organizmu.

My jednak trzymamy się w naszym matematycznym laboratorium pierwotnej funkcji labiryntu, czyli utrudnienia osiągnięcia celu. Najstarszy znany algorytm na przebycie labiryntu to reguła stałego kontaktu. Kładziemy jedną dłoń, na przykład prawą, na ścianie labiryntu i posuwamy się naprzód. Dłoń musi stale pozostawać w styczności ze ścianą. Proponuję budowę praktycznego modelu eksperymentalnego. To atrakcyjne i bardzo przekonujące doświadczenie. Labirynt ułożymy z patyczków takich, jak do lodów. Są dostępne w sklepach papierniczych pod nazwą „patyczki kreatywne". Na twardym, tekturkowym podłożu z pomocą kleju lub plasteliny możemy wymodelować dowolny labirynt. Na początek nie za duży, oparty na siatce komórki o wymiarach 4x3.



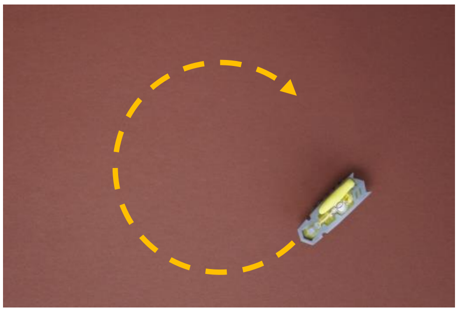
Można go przebyć (palcem) samodzielnie, ale dużo atrakcyjniej jest zaprząc do tego robota. Prawdziwego. Z wbudowanym algorytmem śledzenia ściany. Nie proponuję Czytelnikom żadnych zaawansowanych prac warsztatowych, raczej wycieczkę do sklepu z zabawkami. Za kilka złotych kupimy tam wibrobota. To bardzo sprytna zabawka, zasilana miniaturową bateryjką. Silniczek z mimośrodowo osadzoną masą wprawia korpus zabawki w szybkie drgania.

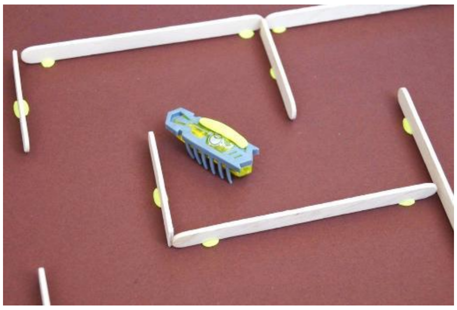
Odpowiednio uformowane gumowe nóżki powodują, że uprzywilejowanym kierunkiem jest ruch postępowy na wprost. Gdy wibrobot trafi głową w prze-



szkodę ustawia się bokiem w przypadkowym kierunku i kontynuuje ruch naprzód. Dodatkową atrakcją jest to, że zabawka nie podąża bezpośrednio po prostej, lecz trochę meandruje. To znowu niezły przyczynek do obserwacji skuteczności strategii losowych w wędrówce przez labirynt.

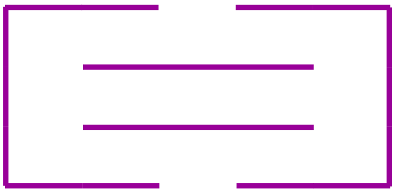
Pora na programowanie. Program będzie z plasteliny. Już brzmi dziwnie? A kto powiedział, że w matematycznym laboratorium ma być sztampowo? Jeżeli chcemy na wibrobocie wymusić uprzywilejowany kierunek skrętu, musimy przesunąć mu nieco środek ciężkości. Na prawy bok, jeżeli ma zakręcać w prawo. Program – to wałeczek plasteliny przyklejony asymetrycznie do korpusu.





Poprawność „działania programu” sprawdzamy puszczając wibrobota na płaskim, wypoziomowanym podłożu. Powinien wędrować po okręgu w zaprogramowanym kierunku. Jeżeli tak się dzieje, można go wpuścić do labiryntu.

Komplikowanie układu korytarzy jest wciągającą i pouczającą zabawą. Szybko też możemy się przekonać, że podany wyżej algorytm nie jest doskonały. Wręcz przeciwnie, może spowodować uwięzienie w labiryncie na zawsze. Zbadajmy zachowanie prawoskrętnego wibrobota w takim, jak pokazany na rysunku poniżej, układzie doświadczalnym.



W tym miejscu krytyczny Czytelnik być może zapyta: o co autorowi chodzi? To wszystko ciekawe, nawet zabawne, ale ile w tym matematyki? Powróćmy zatem do tytułu. Chemik lub fizyk doświadczalny laboratorium traktuje jako naturalne środowisko pracy. Dlaczego by nie miało tak być z matematykiem? On także może testować zadania w warunkach realnych. Warto to robić, szczególnie w odniesieniu do procesu dydaktycznego. Nie wszystkie zagadnienia dadzą się naturalnie badać ta metodą. Ale traktując jako punkt wyjścia rzeczywiste, nie tylko myślowe lub symboliczne obserwacje, łatwiej zbudujemy zasób podstawowych pojęć matematycznych w umysłach naszych podopiecznych.

Temu właśnie ma służyć książka *Laboratorium w szufladzie. Matematyka* autorstwa Łukasza Badowskiego i Zasława Adamaszka. Zawiera ona wybrany zbiór pojęć oraz modeli matematycznych odwzorowany w rzeczywistych konstrukcjach. Autorzy celowo uciekają od ściśle formalnego opisu na rzecz eksperymentowania. Zaciekawienie wywołane atrakcyjnym efektem doświadczalnym na pewno zachęci do rozwinięcia przedstawionych zagadnień w postać już czysto matematyczną. A konkretnie: to opis kilkudziesięciu doświadczeń i konstrukcji przeznaczonych do samodzielnego wykonania. Wszystkie pomysły zaczerpnięte są z życia, osadzone w realiach świata, który nas otacza. Dobrane tak, by zainspirować pasjonata nauk ścisłych, a nauczycielowi matematyki (do szczebla licealnego włącznie) podsunąć pomysły na atrakcyjne i efektowne uzupełnienie zajęć szkolnych. Bo o ile trudno ulec urokowi obrotów i translacji przed uwalaną kredą tablicą, to dobrowolne oderwanie się od budowy kalejdoskopów jest już nie lada wyzwaniem. Matematyka ma swoje efektowne i wcale nietrudne oblicze, q.e.d.*

*q.e.d – *quod erat demonstrandum* (co było do udowodnienia)