Dlaczego samolot nie spada?

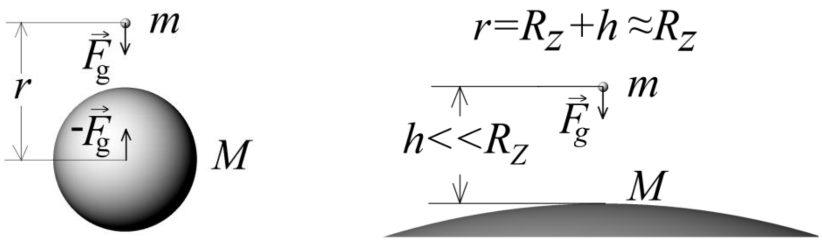
Piotr Pierański
Politechnika Poznańska

Wbrew temu, czego pewnie ode mnie, jako zawodowego fizyka, oczekujecie, zacznę od stwierdzenia, że fizyka nie jest nauką prostą. Można znać na pamięć wszystkie jej prawa i wzory, a mimo to być nadal bezradnym, gdy trzeba ich użyć, by wyjaśnić przebieg jakichś zdarzeń. By uchwycić sens jej praw, i nauczyć się ich używać, musimy uruchomić wyobraźnię i zacząć tworzyć w niej uproszczone modele sytuacji rzeczywistych. Trzeba rozpocząć od modeli najprostszych, tych, których zachowania są oczywiste dla naszej intuicji, opisać je używając praw fizyki, a dopiero potem zabrać się za sytuacje bardziej skomplikowane.

Spójrzmy na lecący nad nami samolot i zadajmy sobie pytanie: dlaczego on nie spada? Przecież doświadczenie uczy nas, że przedmiot tak ciężki nie może wisieć sobie w powietrzu. Gdy podniesiemy w górę kamień i uwolnimy go, on spadnie. Dlaczego więc, do licha, lecący samolot nie spada?

Zacznijmy może od pytania prostszego: dlaczego kamienie uniesione nad powierzchnię Ziemi spadają? Odpowiedź wszyscy znają: spadają, bo Ziemia je przyciąga. To odpowiedź poprawna, ale zbyt ogólnikowa, by można było się nią zadowolić. Fizyk wymaga, by odpowiedź była bardziej szczegółowa, w szczególności, byśmy podali wzór, który opisze wartość siły, pod wpływem której kamień zaczyna spadać. Ten wzór to prawo grawitacji Newtona. Napisanie go wymaga, byśmy w naszej wyobraźni stworzyli model tego, co chcemy opisać. Jak ja to widzę w mojej wyobraźni? Widzę olbrzymią, wiszącą w kosmicznej próżni kulę o promieniu R_Z = 6400 km = $6{,}4 \cdot 10^6$ m, i tuż obok niej, w odległości h od powierzchni Ziemi mikroskopijną (w skali rozmiaru Ziemi) kuleczkę – to model mojego kamienia. Zakładam, że kula ziemska jest idealna, jednorodna, a jej całkowita masa wynosi M. Zakładam, że kuleczka reprezentująca kamień jest też idealna, jednorodna, a jej masa wynosi m. Oczywiście, $m \ll M$. Dlaczego uparłem się, by i Ziemia i kamień były w mej wyobraźni reprezentowane przez kule? Ano dlatego, że siła grawitacji, z jaką kule te przyciągają się, zależy wyłącznie od odległości r między ich środkami. Prawo grawitacji mówi, iż masy, które rozważam, przyciągają się siłami równymi co do wielkości, lecz skierowanymi przeciwnie: Ziemia przyciąga kamień, a kamień przyciąga Ziemię (zob. rys.1).

$$F_g = G\frac{mM}{r^2}.$$



Rys. 1. Oddziaływanie grawitacyjne dwóch mas mających kształt kul. Gdy odległość *h* masy *m* od powierzchni masy *M* jest znacznie mniejsza od jej promienia R_Z, wtedy odległość *r* między ich środkami jest niemal równa R_Z

Skutek działania obu sił opisany jest drugą zasadą dynamiki Newtona. Siła działająca na jakieś ciało zmienia jego prędkość nadając mu przyspieszenie proporcjonalne do działającej siły i odwrotnie proporcjonalne do masy ciała, na którą ona działa:

$$a = \frac{F_g}{m} = G\frac{M}{r^2}.$$

Jeśli przyjmiemy, że kamień znajduje się w chwili $t = 0$ na wysokości *h* nad Ziemią, wartość przyspieszenia się konkretyzuje:

$$a = G\frac{M}{(R_Z + h)^2}.$$

Jak widać, jest ono zależne od wysokości. Jeśli jednak przyjmiemy, zgodnie z rzeczywistością, że $h \ll R_Z$, mianownik tego wyrażenia można uprościć pomijając w nim *h*:

$$a = G\frac{M}{R_Z^2}.$$

W tym bardzo dobrym przybliżeniu przyspieszenie nie zmienia się z wysokością *h*. Jak widać, nie zależy też ono od masy kamienia. Jest tak, ponieważ, choć siła grawitacji jest do niej proporcjonalna, to przyspieszenie jest do niej odwrotnie proporcjonalne i masa znika z wzoru na przyspieszenie.

Przyspieszenie, które obliczyliśmy, to przyspieszenie, z jakim w pobliżu powierzchni Ziemi spadają wszystkie ciała, bez względu na swą masę. Nazywamy je przyspieszeniem grawitacyjnym i oznaczamy przez *g*. Oczywiście uczyniliśmy tu jedno, bardzo ważne, ukryte założenie, że nie bierzemy pod uwagę siły oporu powietrza. Siła ta, oznaczmy ją przez F_o, działa przeciwnie do kierunku ruchu ciała, jest zależna od jego rozmiaru (w przypadku kuli, jej promienia *R*) i rośnie z prędkością v.

Jeśli siłę oporu powietrza weźmiemy pod uwagę, to obliczając przyspieszenie, z jakim ciało spada, otrzymamy wyrażenie:

$$a(R,v)=\frac{F_g-F_o(R,v)}{m}.$$

Ponieważ siła oporu powietrza $F_o(R,v)$ wzrasta z prędkością spadającego ciała w miarę, jak prędkość ta rośnie, przyspieszenie maleje dążąc asymptotycznie do zera. Przyspieszenie znika, a więc ciało spada ruchem jednostajnym, gdy widoczna w liczniku suma sił działających na ciało (siła oporu powietrza działa przeciwnie do siły grawitacji, stąd minus) równa się zero. Wartość tej granicznej, maksymalnej prędkości spadania możemy znaleźć rozwiązując równanie:

$$F_g-F_o(R,v_{max})=0.$$

Oczywiście postać tego rozwiązania zależy od postaci zależności $F_o(R,v)$. Gdy ciało ma kształt kuli i porusza się niezbyt prędko (co sprawia, że ruch opływającego je powietrza jest laminarny), wyrażenie na wartość siły oporu jest szczególnie proste:

$$F_o=6\pi\eta Rv$$

gdzie η jest lepkością ośrodka, przez który ciało o kształcie kuli się porusza. Wyrażenie to zostało podane w 1851 roku przez George'a Stokesa.

Sprecyzowanie postaci funkcji opisującej zależność siły oporu od rozmiaru ciała i jego prędkości konkretyzuje równanie, które musimy rozwiązać, by znaleźć prędkość graniczną. Jak łatwo sprawdzić, równanie to przyjmuje teraz postać:

$$\frac{4}{3}\pi R^3\rho g-6\pi\eta Rv_{max}=0$$

gdzie ρ jest gęstością materiału, z jakiego wykonana jest kula. Pierwszy człon tego równania to oczywiście ciężar kuli, a drugi siła oporu powietrza.

Rozwiązanie powyższego równania ze względu na v_{max} daje wyrażenie:

$$v_{max}=\frac{2}{9}\frac{\rho gR^2}{\eta}.$$

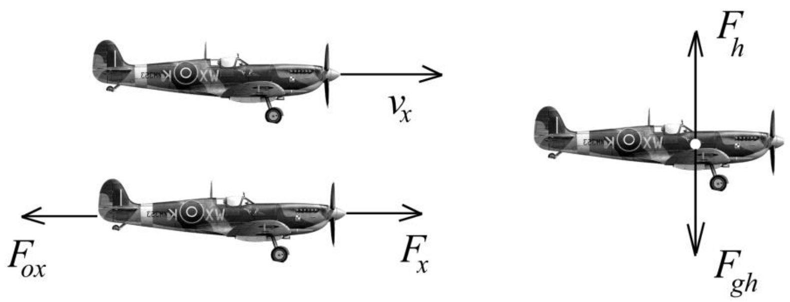
Widzimy więc, że prędkość graniczna v_{max}, z jaką spadają kuliste ciała, jest proporcjonalna do kwadratu ich promienia: im mniejsze ciało, tym mniejsza prędkość spadania. Tak więc duży kulisty kamień i małe kuliste ziarnko piasku, choć składają się z tego samego materiału, osiągają różną prędkość v_{max}: ziarenko spada znacznie wolniej od kamienia. Jeśli to ziarenko jest mikroskopijne, jak ziarenka pyłu unoszonego przez pędzący samochód po piaszczystej drodze, dostrzeżemy, że prędkość opadania tych ziarenek będzie znikoma. To właśnie dlatego wzniesiony przez pędzący samochód pył opada tak wolno.

Podobną sytuację mamy ze spadającymi kropelkami wody. Deszcz i mgła z punktu widzenia swego składu, to dokładnie to samo: po prostu woda, w przybliżeniu kuliste kropelki wody. Jedyna różnica, to rozmiar tych kropelek: promień kropli deszczu wynosi około 1 milimetra, zaś promień kropli mgły około 10 mikrometrów, a więc 100 razy mniej. Iloraz kwadratów promieni tych kropelek, wynosi 10 000. Krople mgły spadają więc 10 000 razy wolniej od kropelek deszczu.

Zauważmy, że w powyższych rozważaniach nie wspomnieliśmy o Ziemi. Przecież i na nią działa siła grawitacji. Dlaczego? Z formalnego punktu widzenia oddziaływanie grawitacyjne powoduje, że oba ciała, Ziemia i kamień, poruszają się ruchem przyspieszonym: kamień zbliża się do Ziemi, Ziemia zbliża się do kamienia. Patrząc z zewnątrz dostrzeżemy wyłącznie ruch kamienia, a Ziemi nie. Dlaczego? Bo ze względu na jej olbrzymią masę siła grawitacji nadaje jej przyspieszenie tak nikłe, że nie jesteśmy w stanie go wykryć.

Powróćmy do wyjściowego pytania: dlaczego lecący nad naszymi głowami samolot nie spada? Patrząc w niebo widzimy, że porusza się on nad nami ruchem jednostajnym w kierunku równoległym do powierzchni Ziemi. A przecież powinien spadać!

Wyjaśnienie musimy podzielić na dwie części. Zajmijmy się najpierw odpowiedzią na pytanie, dlaczego w ogóle się porusza. Utrzymanie stałej składowej poziomej prędkości v_x wymaga pokonywania oporu powietrza. Musi być więc tak, że na samolot działa w kierunku ruchu siła F_x, która równoważy działającą w przeciwnym kierunku siłę oporu powietrza F_{ox}.



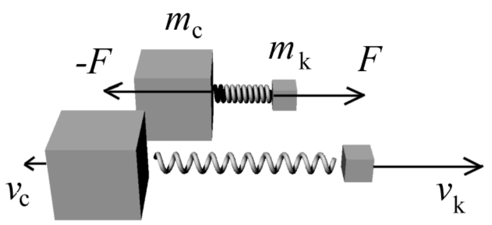
Rys. 2. Utrzymanie stałej prędkości samolotu w kierunku poziomym wymaga zrównoważenia siły oporu powietrza F_{ox}. Napędzane przez silnik śmigło zmusza powietrze do ruchu wstecz. Proces ten powoduje powstanie działającej w kierunku ruchu siły F_x. Podobnie utrzymanie stałej wysokości wymaga zrównoważenia działającej w dół siły grawitacji F_{gh}. Zadanie to spełniają skrzydła samolotu zmuszając powietrze, przez które się poruszają, do ruchu w dół. Proces ten powoduje powstanie działającej w górę siły F_h

Zerowa wartość składowej pionowej prędkości lecącego na stałej wysokości samolotu, $v_h = 0$, wymaga, by prócz siły grawitacji F_{gh} działała na samolot siła F_h skierowana przeciwnie, czyli do góry.

Siłę F_x równoważącą opór powietrza i siłę F_h równoważącą siłę grawitacji musi wytworzyć sam samolot. By zrozumieć, jak to czyni, rozważmy najpierw zupełnie inną sytuację.

Wyobraźmy sobie, że wisimy nieruchomo w kosmicznej próżni, z dala od gwiazd i planet, trzymając w ręce kamień. Niech masa naszego ciała wynosi m_c, zaś masa kamienia m_k. Pchnijmy kamień przykładając do niego siłę F.

Sytuację tę schematycznie przedstawiliśmy na rysunku 3, gdzie prostopadłościany odpychane są od siebie przez ściśniętą uprzednio sprężynę.



Rys. 3. Między ciało o masie m_c a ciało o masie m_k włożono urządzenie, które zaczyna te ciała odpychać od siebie stałą siłą F. Urządzenie to jest na rysunku przedstawione jako wstępnie ściśnięta sprężyna. (Sprężyna realna działa inaczej: siła maleje w miarę rozprostowywania!) Prędkości, jakie oba ciała uzyskują po tym, jak urządzenie przestanie działać, wynoszą odpowiednio v_c i v_k (patrz tekst)

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki kamień zacznie poruszać się ruchem przyspieszonym, a jego przyspieszenie wyniesie:

$$a_k = \frac{F}{m_k}.$$

Jeśli siła działała przez czas t, to w momencie ustania jej działania kamień będzie poruszał się z prędkością

$$v_k = a_k t = \frac{F}{m_k} t.$$

Pchając kamień czujemy, że i on działa na nas jakąś siłą. Siła ta równa jest $-F$. Jej wartość wyrażona w newtonach jest taka sama, jak ta, którą nasza ręka działa na kamień, lecz jest skierowana przeciwnie, stąd minus. Pod wpływem tej siły nasze ciało porusza się również ruchem jednostajnie przyspieszonym, a przyspieszenie wynosi:

$$a_c = \frac{-F}{m_c}.$$

Po czasie t prędkość naszego ciała wyniesie więc

$$v_c = a_c t = \frac{-F}{m_c} t.$$

Spytajmy o pęd. Pęd jest iloczynem masy poruszającego się ciała i jego prędkości. W chwili początkowej $t = 0$ zarówno prędkość naszego ciała, jak i kamienia były zerowe, więc i ich pędy były zerowe. Pęd sumaryczny był też oczywiście zerowy.

Po czasie t pęd kamienia wynosi

$$p_k = m_k v_k = m_k \frac{F}{m_k} t = Ft.$$

W tej samej chwili pęd naszego ciała wynosi

$$p_c = m_c v_c = m_c \frac{-F}{m_c} t = -Ft.$$

A pęd sumaryczny $p_k + p_c$? Wynosi oczywiście zero, tak jak było to na samym początku. Sumaryczny pęd się nie zmienił. Czy będzie tak zawsze, bez względu na to, co uczynimy? Tak. To **zasada zachowania pędu**. Jeśli rozważamy izolowany od otoczenia układ, to bez względu na to, co dzieje się w jego wnętrzu, sumaryczny pęd się nie zmieni.

Zasada zachowania pędu, to zasada potężna, pozwala nam bowiem zrozumieć przebieg wielu zjawisk bez wchodzenia w szczegóły.

Analizując szczegóły rachunku, który przedstawiliśmy wyżej, zauważamy, że pod wpływem działania siły pęd kamienia zmienił się: był zerowy, a następnie jego wartość wzrosła do wartości p_k. Siła była stała i wynosiła F. Czas jej działania wynosił t. Pęd, jaki uzyskało ciało, wyniósł Ft. Widzimy więc, że zmiana pędu jest związana z wartością działającej siły i czasem jej działania. Analiza tej prawidłowości prowadzi do bardzo użytecznego wzoru pozwalającego określić wielkość działającej siły, gdy w czasie Δt zauważymy zmianę pędu o Δp:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}.$$

To bardzo ważny wzór, zawsze prawdziwy, również w mechanice relatywistycznej, gdzie pęd ciała zdefiniowany jest innym niż $p = mv$ wzorem.

Klasycznym problemem, w którym wzór ten wykorzystujemy, jest siła ciągu silnika rakietowego. Jeśli w czasie Δt, do jego komory zostanie wtryśnięta masa Δm paliwa z utleniaczem, a potem zobaczymy tę masę wylatującą, również w czasie Δt, w postaci produktów spalania z prędkością v_{ex}, to wiemy, że jej pęd, który był początkowo zerowy, wzrósł o

$$\Delta p = \Delta m v_{ex}.$$

Stało się to w czasie Δt, więc musiała na niego działać siła

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta m v_{ex}}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} v_{ex} = \mu v_{ex}.$$

Przez μ oznaczyliśmy tu iloraz masy substancji spalonych w komorze silnika rakietowego przez czas, w którym to się stało. Jej sens zatem to masowa prędkość spalania. Widzimy więc, że siłę ciągu silnika rakietowego możemy zawsze łatwo obliczyć jeśli wiemy, że do jego komory wtryskiwane są substancje w ilości μ kilogramów na sekundę, a prędkość wylotowa produktów spalania wynosi v_{ex} (m/s).

Proponuję małe ćwiczenie. Obliczmy ciąg jednego z trzech silników głównych promu kosmicznego. Silniki te zamontowane są w samym promie, a paliwo do niego – wodór i utleniacz (tlen) – dostarczane są z olbrzymiego zbiornika, do którego przymocowany jest prom (i wodór i tlen znajdują się tam w fazie ciekłej!).

W zbiorniku zewnętrznym znajduje się około 106 ton wodoru i 630 ton tlenu. Zbiornik ten zostaje opróżniony po około 500 sekundach. Wodór i tlen podawane są w równej ilości do każdego z trzech silników rakietowych. Prędkość wylotowa (z dyszy) produktów spalania wynosi około 4000 m/s. Oblicz siłę ciągu F jednego silnika.

Zauważmy coś fascynującego. Jeśli wyobrazimy sobie wiszącą nieruchomo w przestrzeni kosmicznej rakietę, której silnik zostanie uruchomiony, zobaczymy jak z jej dyszy wyrzucany jest z dużą prędkością v_{ex} strumień gazów, a sama rakieta zaczyna poruszać się w przeciwną stronę. Gdy silnik skończy pracę zobaczymy znajdującą się już z dala od nas, i ciągle oddalającą się, rakietę i ciągnący się za nią długi strumień poruszających się w kierunku przeciwnym gazów. Ile wynosi sumaryczny pęd tego układu? Wiemy ile! Zero. Dlaczego? Ano dlatego, że jego sumaryczny pęd początkowy był zerowy. Troszkę bardziej wyrafinowane rozumowanie przekona nas, że środek masy tego układu pozostał tam, gdzie był w chwili uruchomienia silników.

Ten sam wzór zastosujemy w oszacowaniu zupełnie innej wielkości, a mianowicie minimalnej mocy, jaką musi mieć silnik elektryczny taśmociągu, poruszającego się z prędkością 2 m/s, na który wysypywany jest piasek w tempie 1 tony na sekundę. Musimy tu po prostu obliczyć siłę, jaka jest konieczna, by zsypujący się piasek wprawić w ruch i pomnożyć wartość tej siły przez prędkość taśmociągu.

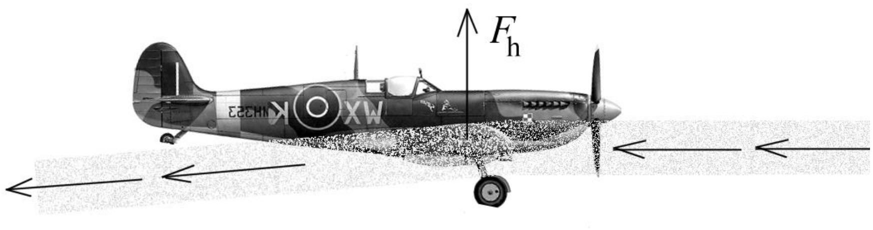
Wróćmy do zagadnienia, od którego rozpoczęliśmy, do sił, jakie samolot musi sam sobie wytworzyć, by poruszać się z prędkością v_x w kierunku poziomym pozostając ciągle na tej samej wysokości.

By pokonać siłę oporu powietrza samolot musi wytworzyć siłę F_x ciągnącą go w kierunku jego lotu. Samolot śmigłowy wytwarza tę siłę, zmuszając powietrze kręcącym się śmigłem do ruchu wstecz, zmieniając tym samym jego pęd.

Iloraz zmiany pędu powietrza przez czas, w którym ta zmiana następuje, to siła. Nie wchodźmy w szczegóły, stwierdźmy jedynie, że jeśli samolot porusza się w kierunku poziomym musi za nim ciągnąć się strumień poruszającego się wstecz powietrza.

Rys. 4. Wytwarzanie siły ciągnącej samolot. Kręcące się śmigło samolotu „łapie” znajdujące się przed nim powietrze i wprawia je w ruch zmieniając składową poziomą jego pędu

A jak pokonać siłę grawitacji? Poruszający się samolot musi wytworzyć również strumień powietrza poruszającego się w dół. Zadanie to wykonują jego skrzydła. Mają taki kształt i tak są uformowane, że gdy samolot porusza się poziomo, skrzydła zmuszają powietrze do ruchu w dół, tym samym zmieniając jego pęd. Zmiana składowej pionowej pędu powietrza podzielona przez czas, w którym zmiana ta następuje, to siła nośna wytwarzana przez skrzydła. Jeśli samolot ma latać bardzo wysoko, na przykład na pułapie około 30 km, na którym latają samoloty szpiegowskie U2, jego skrzydła muszą być bardzo długie, by zagarniać w dół dostatecznie dużą masę rzadkiego powietrza, jakie się tam znajduje.



Rys. 5. Skrzydła samolotu zmuszają powietrze, przez które samolot się porusza, do ruchu w dół. W reakcji na tę zmianę na samolot działa siła F_h skierowana w górę. Rysunek wykonany jest w układzie odniesienia związanym z samolotem: samolot jest w nim nieruchomy, a powietrze się porusza

Podobne rozumowania pozwalają nam wyjaśnić zasadę lotu helikopterów i samolotów startujących pionowo.

Zasada zachowania pędu podpowiada, co wiszący nieruchomo w kabinie promu kosmicznego astronauta może zrobić, by dostać się do okna. Jedyna rzecz, która jest w stanie wprawić w ruch translacyjny jego ciało, to wyrzucenie w kierunku przeciwnym jakiegoś ciała, choćby kluczy do drzwi.

A co ma zrobić kosmonauta, gdy wisząc poziomo, brzuchem do podłogi, chciałby odwrócić się brzuchem do góry?

Jest tu pewien prosty sposób. Nasze ciała go znają. Sposób ten, nabyty w procesie ewolucji, jest gdzieś zakodowany w naszych mózgach i zostaje przywołany automatycznie, gdy na przykład stojąc na krawędzi stromego zbocza stracimy nagle równowagę. Zastanówmy się: co wtedy odruchowo robimy? Jeśli tego nie pamiętamy, zróbmy doświadczenie: stańmy tyłem do schodów na krawędzi ich pierwszego stopnia (aby nie stać wysoko nad ziemią!) i przechylajmy się do przodu, aż stracimy równowagę. Starajmy się ją zachować nie zeskakując ze stopnia. Jak to robimy? Zaczynamy rękami kręcić młynka. Gdy spojrzymy na prawą rękę, widzimy, że kręci się przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara, a lewa porusza się w ten sam sposób. Czy to kręcenie młynka może coś pomóc? Owszem. By się o tym przekonać podpowiedzmy wiszącemu w kabinie promu astronaucie by uczynił podobnie, a zobaczymy, jak jego tułów zacznie kręcić się w stronę przeciwną. Czy dzieje się tak również ze względu na jakąś zasadę zachowania? Tak. To **zasada zachowania momentu pędu.** Ale o tym następnym razem.