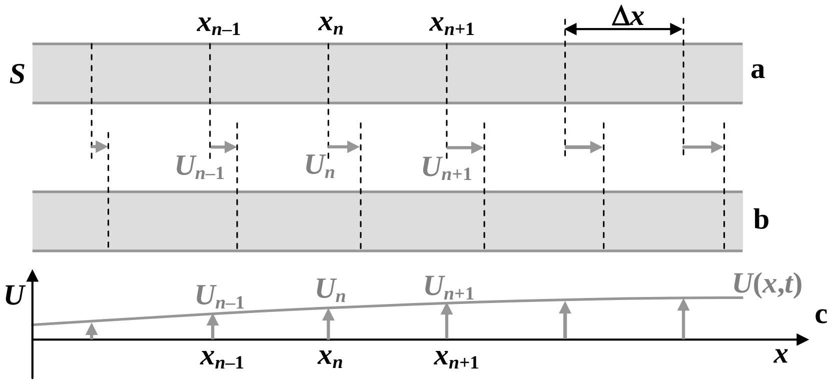
Impedancja akustyczna, czyli o odbiciu fal podłużnych

Jerzy Ginter
Wydział Fizyki UW

Jedną z podstawowych metod badań medycznych jest ultrasonografia. U podstaw jej działania leży zjawisko odbicia podłużnej fali akustycznej (ultradźwiękowej) na granicy dwóch tkanek, na przykład tkanki miękkiej i kości. Z podobnym zjawiskiem mamy do czynienia wewnątrz Ziemi, kiedy podłużne fale sejsmiczne[1] (fale *P*) odbijają się od granic różnych warstw. O wartości takiego odbicia decyduje wielkość fizyczna, zwana (dość paskudnie) **impedancją**[2] **akustyczną**, którą zwykle oznacza się symbolem *Z*.

Zajmiemy się tutaj przypadkiem skrajnie uproszczonym:
– kiedy odbicie fali akustycznej zachodzi na granicy dwóch różnych cieczy,
– kiedy fala akustyczna pada prostopadle na taka granicę.

Fala podłużna w ośrodku jednorodnym



Rys. 1

Falę podłużną rozchodzącą się poziomo w ośrodku jednorodnym przedstawia schematycznie rysunek 1. Wydzieliliśmy myślowo słup cieczy o polu przekroju równym *S*.

a. Sytuację, kiedy nie ma fali, przedstawia górna część rysunku. Słup cieczy został myślowo podzielony liniami przerywanymi na jednakowe elementy

[1] Ładna animacja impulsu fal podłużnych: *P-waves*, Wikipedia. Patrz też: Ginter, *Fale podłużne*, YouTube.
[2] Łacińskie słowo *impeditus* ma wiele znaczeń, między innymi – ociężały.

objętości („plasterki”) o długości równej Δx. Współrzędne x położenia tych linii zostały oznaczone symbolami x_n.

b. Kiedy w ośrodku rozchodzi się fala podłużna, następują lokalne przesunięcia ośrodka, linie przerywane z górnej części rysunku zostają przemieszczone – tak jak to przedstawia środkowa część rysunku. Wektory przesunięć oznaczone są symbolami U_n.

c. Jeżeli chcemy przejść do opisu ciągłego, musimy wychylenia ośrodka opisać funkcją dwóch zmiennych $U(x,t)$, gdzie x oznacza położenie przed przemieszczeniem, a t oznacza czas. Sens tej funkcji przedstawia dolna część rysunku.

Ciśnienie akustyczne

Lokalne przesunięcia ośrodka wywołują w nim zmiany ciśnienia. Zależność ciśnienia $p(x,t)$ od położenia i czasu można przedstawić funkcją:

$$p(x,t) = p_0 + P(x,t). \tag{1}$$

- Człon stały p_0 oznacza ciśnienie panujące w cieczy w nieobecności fali akustycznej (na przykład ciśnienie atmosferyczne) i oczywiście zawsze jest nieujemny.
- Człon $P(x,t)$ opisuje zmiany ciśnienia, wywołane w ośrodku przez falę akustyczną – i może przyjmować wartości zarówno dodatnie, jak i ujemne.

Własności sprężyste cieczy opisuje wzór

$$\Delta P = -K\frac{\Delta V}{V} = -K\frac{S\Delta l}{Sl} = -K\frac{\Delta l}{l}. \tag{2}$$

- Wielkość K nazywamy modułem sprężystości cieczy (jest to odwrotność współczynnika sprężystości κ).
- Symbol V oznacza objętość początkową, a ΔV zmianę objętości.
- Dwa ostatnie człony dotyczą sytuacji, kiedy mamy do czynienia ze słupem cieczy o stałym przekroju S, a zmiennej długości. Symbol l oznacza długość początkową, a Δl zmianę długości.

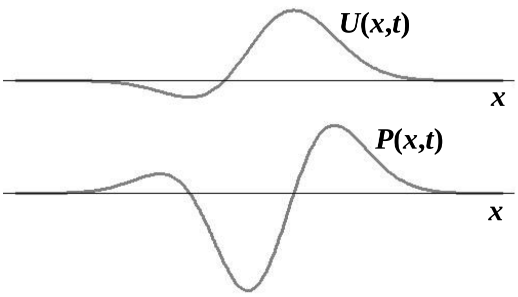
Zastosujmy ten wzór do elementu długości słupa cieczy, zawartego w stanie początkowym pomiędzy x_n a x_{n+1}.

$$\Delta P = -K\frac{\Delta l}{l} = -K\frac{U_{n+1} - U_n}{\Delta x} = -K\frac{\Delta U}{\Delta x}. \qquad (3).$$

Przechodząc do zapisu ciągłego, napiszemy

$$P(x,t) = -K\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}. \tag{4}$$

Ciśnienie akustyczne jest proporcjonalne do minus pochodnej przestrzennej $U(x,t)$. Dla pewnej dowolnie wybranej funkcji[3] przedstawia to rys. 2.



Rys. 2

Można też zauważyć, że w przykładzie z rysunku 1 ciśnienie akustyczne wszędzie jest ujemne, bo pochodna przestrzenna funkcji $U(x,t)$ jest dodatnia. Ale to dość oczywiste – wszystkie narysowane elementy objętości są porozciągane.

Równanie falowe

W dalszym ciągu będziemy przyjmować, że funkcja wychylenia $U(x,t)$ spełnia klasyczne równanie falowe[4]:

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}\,. \tag{5}$$

Symbol v oznacza **prędkość fali**, która dana jest wzorem

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \tag{6}$$

gdzie K jest modułem sprężystości (wzór (3)), a ρ gęstością cieczy w stanie stacjonarnym (bez fali).

Równanie to ma dwa typy rozwiązań.

1. Odpowiadające fali biegnącej bez zmiany kształtu z prędkością o wartości v w prawo, czyli zgodnie z dodatnim zwrotem osi x:

---

[3] Na rysunku została przedstawiona funkcja $f(w) = (1+2w)e^{-w^2}$.

[4] Patrz na przykład: Andrzej Januszajtis, *Fizyka dla politechnik*, t. III. *Fale*, PWN, Warszawa 1991.

$$U_{\rightarrow}(x,t) = f(x - vt). \tag{7}$$

Funkcja kształtu jednej zmiennej $f(w)$ jest dość dowolna, musi jednak posiadać dwie pochodne (co oczywiste), być ograniczona i mieć ograniczoną pochodną. Ani lokalne wychylenie, ani lokalne ciśnienie nie mogą przyjmować zbyt dużych wartości, co zakłada się przy wyprowadzaniu wzoru (5).

2. Odpowiadające fali biegnącej bez zmiany kształtu z prędkością o wartości v w lewo, czyli zgodnie z ujemnym zwrotem osi x:

$$U_{\leftarrow}(x,t) = f(x + vt). \tag{8}$$

Impedancja – po raz pierwszy

Można zauważyć, że dla fali opisanej wzorem (7), lokalna prędkość ośrodka $V(x,t)$ jest proporcjonalna do lokalnego ciśnienia $P(x,t)$.

Lokalna prędkość ośrodka $V(x,t)$ jest czasową pochodną lokalnego wychylenia $U(x,t)$:

$$V(x,t) = \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}. \tag{9}$$

Dla fali opisanej wzorem (7) wyrażenie na lokalną prędkość ośrodka ma postać:

$$V(x,t) = -vf'(x - vt) \tag{10}$$

gdzie funkcja jednej zmiennej $f'(w)$ jest pochodną funkcji $f(w)$ względem jej naturalnego argumentu w:

$$f'(w) = \frac{\mathrm{d}f(w)}{\mathrm{d}w}. \tag{11}$$

Zauważmy: funkcja $V(x,t)$ spełnia równanie falowe analogiczne do (5). Wynika to ze zróżniczkowania (5) względem t po obu stronach.

Dla fali opisanej wzorem (7) wzór na lokalne ciśnienie (4) przyjmuje postać:

$$P(x,t) = -K\frac{\partial f(x - vt)}{\partial x} = -Kf'(x - vt). \tag{12}$$

Porównując wzór (12) z wzorem (10) możemy napisać:

$$V(x,t) = v\frac{P(x,t)}{K} = \frac{1}{Z}P(x,t). \tag{13}$$

Stałą proporcjonalności

$$Z = \frac{K}{v} \tag{14}$$

nazywa się **impedancją akustyczną** ośrodka. Zwykle przedstawia się ją w innej postaci. Korzystając z wzoru (6) można napisać:

$$K = \rho v^2, \tag{15}$$

a stąd

$$Z = \frac{K}{v} = \frac{\rho v^2}{v} = \rho v. \tag{16}$$

Jest to iloczyn statycznej gęstości ośrodka i prędkości dźwięku.

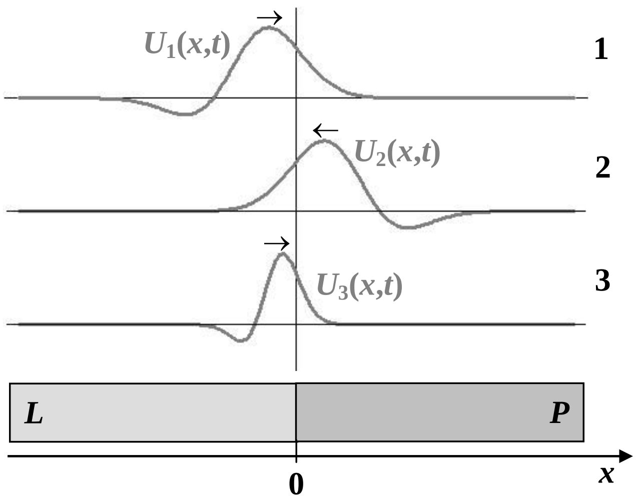
Z wzoru (13) widać, że przy określonym ciśnieniu akustycznym $P(x,t)$ lokalna prędkość $V(x,t)$ jest tym mniejsza, im większa jest wartość impedancji Z [5].

Zauważmy jeszcze: ponieważ funkcja $V(x,t)$ spełnia równanie falowe analogiczne do (5), to i funkcja $P(x,t)$ spełnia takie równanie. Wynika to z proporcjonalności $P(x,t)$ i $V(x,t)$, czyli z wzoru (13).

Na razie jeszcze nie widać, jaki miałby być związek impedancji z odbiciem fali.

Odbicie impulsu falowego

Rozważmy teraz dwa ośrodki, które stykają się ze sobą. Niech w warunkach bez fali akustycznej granica pomiędzy ośrodkami znajduje się w $x = 0$. Wszystkie wielkości, dotyczące ośrodka po lewej stronie granicy będziemy oznaczać indeksem L, a dotyczące ośrodka po prawej stronie granicy – indeksem P.



Rys. 3

[5] Im większe Z, tym ośrodek mniej chętnie się porusza; jest tym bardziej ociężały.

Przypuśćmy, że z lewej strony pada impuls fali padającej, poruszającej się z prędkością o wartości v_L i opisany – z dokładnością do stałej mnożącej – wzorem:

$$U_1(x,t) = f(x - v_L t) \tag{17}$$

Oczywiście nie wnika on „zwyczajnie” do prawej części. Narysowany jednak został w taki sposób, aby pokazać jego pełny kształt. Kiedy impuls ten dojdzie do granicy ośrodków, pojawią się dwie nowe fale:

– biegnąca w lewo w ośrodku lewym fala odbita, poruszająca się z prędkością o wartości v_L,
– biegnąca w prawo w ośrodku prawym fala przechodząca, poruszająca się z prędkością o wartości v_P. Na rysunku $v_P = \frac{1}{2} v_L$.

Pierwszy warunek ciągłości

Pierwszy warunek ciągłości polega na zażądaniu, aby dla $x = 0$ funkcja falowa była ciągła dla dowolnej chwili t. Funkcja odbita i funkcja przechodząca muszą odpowiadać takiej samej zależności od czasu, co fala padająca, czyli zmienności typu

$$U_1(0,t) = f(-v_L t). \tag{18}$$

Można zauważyć, że tak będzie, jeżeli:

1. do opisu fali odbitej posłużymy się funkcją pomocniczą (drugi wykres na rys. 3):

$$U_2(x,t) = f(-x - v_L t) = f\left[-(x + v_L t)\right], \tag{19}$$

2. a do opisu fali przechodzącej, poruszającej się z prędkością o innej wartości, czyli v_P, funkcją (trzeci wykres na rys. 3):

$$U_3(x,t) = f\left[\frac{v_L}{v_P}(x - v_P t)\right]. \tag{20}$$

Spójrzmy na nasz problem odrobinę ogólniej.

– Przyjmijmy, że fala po stronie lewej jest superpozycją fali $U_1(x,t)$ i fali $U_2(x,t)$, ale z dodatkowymi współczynnikami A i B odpowiednio, czyli ma postać:

$$U_L(x,t) = Af(x - v_L t) + Bf(-x - v_L t), \tag{21}$$

– a fala po stronie prawej jest opisana funkcją $U_3(x,t)$, pomnożoną przez współczynnik C:

$$U_P(x,t) = Cf\left[\frac{\upsilon_L}{\upsilon_P}(x - \upsilon_P t)\right]. \tag{22}$$

Pierwszy warunek – to warunek **ciągłości funkcji falowej** dla $x = 0$, czyli

$$U_L(0,t) = U_P(0,t) \tag{23}$$

dla dowolnego t. Oznacza on, że ruch płaszczyzny, odpowiadającej w stanie początkowym $x = 0$, opisuje jednakowo funkcja $U_L(x,t)$ i funkcja $U_P(x,t)$**.**

Z (21), (22) i (23) wynika więc:

$$Af(-\upsilon_L t) + Bf(-\upsilon_L t) = Cf(-\upsilon_L t); \tag{24}$$

czyli po prostu

$$A + B = C. \tag{25}$$

Drugi warunek ciągłości

Drugi warunek ciągłości polega na żądaniu, aby ciśnienie akustyczne było ciągłe, czyli aby dla dowolnej chwili t po obu stronach granicy przyjmowało taką samą wartość. Wzory na ciśnienie dla obu stron granicy można napisać, korzystając z wzoru (4).

$$P_L(x,t) = -K_L \frac{\partial U_L(x,t)}{\partial x} \tag{26}$$

$$P_P(x,t) = -K_P \frac{\partial U_P(x,t)}{\partial x} \tag{27}$$

Warunek ciągłości ciśnienia oznacza więc:

$$P_L(0,t) = P_P(0,t); \tag{28}$$

czyli

$$K_L\left(\frac{\partial U_L(x,t)}{\partial x}\right)_{x=0} = K_P\left(\frac{\partial U_P(x,t)}{\partial x}\right)_{x=0} \tag{29}$$

1. Wzór na ciśnienie po lewej stronie napiszemy, korzystając z (21):

$$P_L(x,t) = -K_L \frac{\partial U_L(x,t)}{\partial x} = -K_L[Af'(x - \upsilon_L t) - Bf'(-x - \upsilon_L t)], \tag{30}$$

2. a na ciśnienie po prawej:

$$P_P(x,t) = -K_P \frac{\partial U_P(x,t)}{\partial x} = -K_P C \frac{\upsilon_L}{\upsilon_P} f'\left[\frac{\upsilon_L}{\upsilon_P}(x - \upsilon_P t)\right]. \tag{31}$$

Warunek ciągłości ciśnienia (28), czyli $P_L(0,t) = P_P(0,t)$; oznacza:

$$-AK_L f'(-v_L t) + BK_L f'(-v_L t) = -CK_P \frac{v_L}{v_P} f'(-v_L t); \tag{32}$$

Po skróceniu takich samych wyrazów po obu stronach i dodatkowo podzieleniu obu stron przez K_L dostajemy:

$$A - B = \frac{K_P}{K_L}\frac{v_L}{v_P} C. \tag{33}$$

Impedancja – po raz drugi

Skorzystajmy jeszcze z definicji impedancji akustycznej, czyli wzoru (14), i zauważmy, że wyrażenie

$$\frac{K_P}{K_L}\frac{v_L}{v_P} = \frac{K_P}{v_P}\frac{v_L}{K_L} = \frac{Z_P}{Z_L} \tag{34}$$

jest stosunkiem impedancji. Pojęcie impedancji akustycznej pojawiło się w naszych rozważaniach po raz drugi – i tym razem już w kontekście odbicia fali.

Obliczenie *B* i *C*

Korzystając z (25), (33) i (34) można obliczyć B i C. Mamy układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi:

$$A + B = C \tag{35}$$

$$A - B = \frac{Z_P}{Z_L} C. \tag{36}$$

Podstawmy C z (35) do (36). Otrzymamy:

$$A - B = \frac{Z_P}{Z_L}(A + B) \tag{37}$$

$$\left(1 - \frac{Z_P}{Z_L}\right) A = \left(1 + \frac{Z_P}{Z_L}\right) B; \tag{38}$$

$$B = \frac{1 - \frac{Z_P}{Z_L}}{1 + \frac{Z_P}{Z_L}} A = \frac{Z_L - Z_P}{Z_L + Z_P} A. \tag{39}$$

Stałą C można obliczyć korzystając z (35) i (39):

$$C = A + B = A + \frac{Z_L - Z_P}{Z_L + Z_P} A = \left(1 + \frac{Z_L - Z_P}{Z_L + Z_P}\right) A = \frac{Z_L + Z_P + Z_L - Z_P}{Z_L + Z_P} A = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_P} A. \tag{40}$$

Podsumujmy: wzory, wyrażające stałe B i C przez stałą A, czyli (39) i (40), uzyskaliśmy dla w zasadzie dowolnej funkcji kształtu $f(w)$, fali padającej na granicę ośrodków.

Fale harmoniczne

W zastosowania bardzo często posługujemy się harmoniczną falą ultradźwiękową – o określonej częstości kołowej ω.

Wzory (39) i (40) zostały wyprowadzone dla dowolnej funkcji kształtu $f(w)$, można je więc natychmiast zastosować do fali harmonicznej, wybierając na przykład:

$$f(w) = \cos(k_L w); \tag{41}$$

gdzie $k_L = \dfrac{2\pi}{\lambda_L}$, a λ_L to długość fali w lewym ośrodku.

Wtedy fala padająca we wzorze (21) przybierze postać:

$$A\cos\left[k_L\left(x - v_L t\right)\right] = A\cos(k_L x - \omega t). \tag{42}$$

gdzie częstość kołowa fali ω jest równa:

$$\omega = k_L v_L. \tag{43}$$

Fala odbita we wzorze (21) będzie opisana wzorem:

$$Bf\left(-x - v_L t\right) = B\cos\left[k_L\left(-x - v_L t\right)\right] = \frac{Z_L - Z_P}{Z_L + Z_P} A\cos(k_L x + \omega t). \tag{44}$$

Wykorzystaliśmy wzór (39) i zauważyliśmy, że cosinus jest funkcją parzystą. Natomiast wyrażenie na falę przechodzącą przybierze postać:

$$\begin{aligned} U_P(x,t) &= Cf\left[\frac{v_L}{v_P}(x - v_P t)\right] = C\cos\left\{k_L\left[\frac{v_L}{v_P}(x - v_P t)\right]\right\} = \\ &= C\cos\left(k_L \frac{v_L}{v_P} x - k_L v_L t\right) = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_P} A\cos(k_P x - \omega t). \end{aligned} \tag{45}$$

W ostatnim kroku wykorzystaliśmy wzory (40) i (43). Oczywiście częstość kołowa ω musi być taka sama i dla fal po lewej, i po prawej stronie. Wprowadziliśmy także nowe oznaczenie:

$$k_P = k_L \frac{\upsilon_L}{\upsilon_P}. \tag{46}$$

Wynika stąd, że długość fali po prawej stronie λ_P jest równa:

$$\lambda_P = \frac{2\pi}{k_P} = \frac{\upsilon_P}{\upsilon_L}\frac{2\pi}{k_L} = \frac{\upsilon_P}{\upsilon_L}\lambda_L. \tag{47}$$

Jeżeli prędkość fali po prawej stronie jest mniejsza, to i długość fali jest mniejsza.

Fale USG[6]

	moduł sprężystości kg/ms × 10^{-9}	gęstość kg/m^3	prędkość dźwięku m/s	impedancja akustyczna kg/m^2s × 10^6
powietrze	$1{,}34\cdot10^{-5}$	1,2	330	0,0004
woda	2,19	1000	1480	1,48
krew	2,47	1057	1057	1,62
tkanka miękka	2,51	1060	1540	1,63
tkanka tłuszczowa	2,00	952	1450	1,38
wątroba	2,54	1,060	1550	1,64
kość	32,0	1912	4080	7,8

Fale poprzeczne

Zauważmy na zakończenie, że dla fal poprzecznych na dwóch połączonych różnych sznurach gumowych obowiązuje warunek ciągłości, różny od (29). Przyjmuje się wyrażenie prostsze:

$$\left(\frac{\partial U_L(x,t)}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial U_P(x,t)}{\partial x}\right)_{x=0}. \tag{48}$$

Oznacza ono, że pochodna funkcji falowej jest ciągła, czyli że w punkcie połączenia sznurów nie ma załamania[7].

Warunek (48) mogą spełniać w szczególnym przypadku także fale podłużne. Ma to miejsce wtedy, kiedy moduły sprężystości obu ośrodków są równe, czyli $K_P = K_L$ (por. wzór (29)). Gęstości rozpatrywanych ośrodków mogą przy tym być różne[8].

[6] Lech Padée *Aparatura ultrasonograficzna* (w Internecie).
[7] Odbicie fal na granicy dwóch ośrodków – ale tylko poprzecznych – patrz: Ginter, *Fala na granicy dwóch ośrodków*, YouTube.
[8] Zachowanie fal na granicy dwóch ośrodków – ale tylko dla fal spełniających warunek (48) – patrz: Ginter, *Fala na granicy dwóch ośrodków*, YouTube.