O twierdzeniach i paradoksach Banacha

Zofia Gołąb-Meyer

Marian Smoluchowski (ur. w 1872 roku) oraz Stefan Banach (ur. w 1892 roku), światowej sławy uczeni – fizyk i matematyk – spowodowali, że galicyjskie miasto Lwów stało się potężnym ośrodkiem matematyki. Młodszy Banach praktycznie nie miał okazji pracować naukowo ze Smoluchowskim.

Banach zawitał do Lwowa, gdy Smoluchowski przeniósł się do Krakowa. Jednakże w 1916 roku, kiedy miało miejsce słynne spotkanie młodego Stefana Banacha, Otto Nikodyma i Hugo Steinhausa na Plantach krakowskich, Smoluchowski już był w Krakowie i pracował w Collegium Witkowskiego, nieopodal którego miało miejsce to spotkanie, i gdzie obecnie znajduje się ławeczka z dyskutującymi postaciami Banacha i Nikodyma.

Ławka na krakowskich Plantach – od lewej Otto Nikodym i Stefan Banach

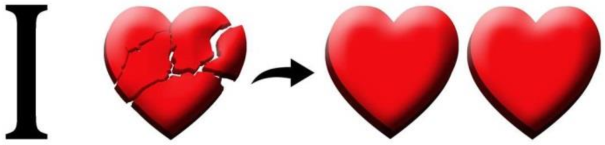
Osiągnięcia Stefana Banacha, istotne dla rozwoju matematyki, a także i fizyki teoretycznej, są niestety trudne do przedstawienia laikom. Matematycy z okazji 125 rocznicy urodzin Banacha na Międzynarodowej Konferencji Analizy Funkcjonalnej 2017 we Lwowie zaprezentowali postery dowcipnie ilustrujące niektóre sławne, twierdzenia Banacha*.

Dla wtajemniczonych są one czytelne, dla laików, z wyjątkiem paradoksu Banacha-Tarskiego, już takie nie są. Niemniej uważamy, że warto je przedstawić, by pokazać, jak matematycy wizualizują w skrócie ważne twierdzenia. Oto one.

---

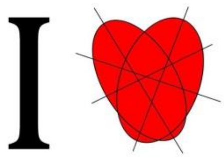
* Dzięki uprzejmości Michaela Zarichny'ego.

Paradoks Banacha-Tarskiego



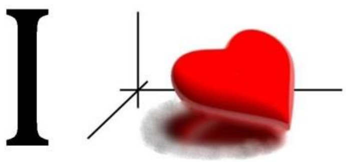
Zasada kontrakcji Banacha

Odległość Banacha-Mazura



Twierdzenie Hahna-Banacha

Twierdzenie o odwzorowaniu otwartym Banacha-Schaudera



Paradoks Banacha-Tarskiego

Pozorny paradoks polega na tym, że korzystając z pewnika wyboru można zwykłą trójwymiarową kulę „rozciąć” na skończoną liczbę części, a następnie używając wyłącznie obrotów i translacji złożyć dwie kule o takich samych promieniach, jak promień kuli wyjściowej. Nie jest to jednak istotna sprzeczność, jako że części tego podziału nie są mierzalne w sensie Lebesgue’a (nie da się określić ich *objętości*), więc naturalna argumentacja oparta na intuicjach związanych z objętością przedmiotów w świecie rzeczywistym nie ma tu zastosowania.

Podobnie nieintuicyjnym wydaje się wariant twierdzenia Banacha-Tarskiego, z którego wynika, że ziarnko grochu może być podzielone na skończenie wiele części, z których (przez izometrie) można złożyć kulę wielkości Słońca. I tutaj nie ma żadnej sprzeczności – kawałki podziału są niemierzalne (należy zauważyć, że podział fizycznego ziarnka grochu na niemierzalne części jest niemożliwy w świecie rzeczywistym).

Grobowiec Stefana Banacha na Cmentarzu Łyczakowskim we Lwowie
(w pobliżu grobowca Marii Konopnickiej) (fot. K. Meyer)