Prawo propagacji niepewności bez pochodnych

Andrzej Zięba
AGH, Kraków

W doświadczeniach szkolnych często wykonuje się *pomiar* dwóch wielkości fizycznych, by na ich podstawie *obliczyć* inną, dla której bezpośredni pomiar jest trudny lub niemożliwy. Na przykład, gęstość materiału wyznacza się z pomiaru masy m i objętości V, $\rho = m/V$, zaś moc elektryczną obliczyć można jako iloczyn wskazań amperomierza i woltomierza $P = I\,U$. Załóżmy w ogólności, że znamy niepewności $u(x_1)$ oraz $u(x_2)$ wielkości mierzonych bezpośrednio. Jak określić niepewność $u_c(y)$ wielkości obliczanej ze znanej funkcji $y(x_1, x_2)$? Na pytanie to odpowiada *prawo propagacji niepewności*[1], zwane też *prawem przenoszenia niepewności*.

Standardowe sformułowanie prawa (dla dowolnej liczby zmiennych wejściowych x_i) wyraża wzór

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_k \left[\frac{\partial y}{\partial x_k} u(x_k)\right]^2}, \tag{1}$$

który znajdziemy w każdej uczelnianej instrukcji opracowania wyników pomiarów w Pracowni Fizycznej. Wzór jest słuszny przy standardowych założeniach: zmienne x_i (traktowane jako zmienne losowe) są nieskorelowane oraz niepewności $u(x_i)$ są małe w porównaniu z wartościami x_i.

Elementarne przedstawienie prawa propagacji niepewności jest najbardziej zaawansowanym elementem nauczania rachunku niepewności pomiaru w szkołach średnich. Może być przedmiotem nauczania tylko dla poziomu rozszerzonego fizyki, i to jako wymaganie maksymalne. Nie musi być realizowane obowiązkowo, bo nie występuje ani w aktualnie obowiązującej podstawie programowej [1] dla liceum 3-letniego, ani w zatwierdzonej już podstawie programowej dla przyszłego liceum i technikum (4- i 5-letniego) [2]. Przegląd podręczników [3], [4] pokazuje, że niektórzy autorzy podejmują ten temat, często z użyciem wzoru „akademickiego” (1) wykorzystującego pochodne cząstkowe. Prawo propagacji niepewności (w dowolnej formie) włączone jest też do wymagań międzynarodowych konkursów fizycznych [5].

[1] Nazwa wprowadzona przez polskie tłumaczenie *Przewodnika GUM*, w pełni równoważna z tradycyjnym terminem *prawo przenoszenia niepewności*.

Trudność dydaktyczna w szkole średniej wynika z braku potrzebnych podstaw z matematyki. Główny problem to wykorzystanie pochodnej i to pochodnej cząstkowej – symbol $\partial y/\partial x_k$ jest dla uczniów niezrozumiały. Geometryczne sumowanie udziałów niepewności stanowi mniejszą trudność, gdyż sprowadza się do wykorzystania znanych operacji algebraicznych. Wreszcie, odstręczać może Σ jako symbol sumowania. Wprawdzie program matematyki rozszerzonej przewiduje nauczanie elementów rachunku różniczkowego i elementów statystyki matematycznej, ale dzieje się to na ostatnim roku szkoły średniej. Natomiast obliczanie niepewności jest potrzebne wcześniej.

1. Prawo propagacji niepewności w projekcie Rekomendacji PTF

Próbą zaradzenia omawianej trudności – i ogólnie przyczynkiem do uporządkowania nauczania o niepewności pomiaru – jest opracowanie pt. *Rekomendacja Polskiego Towarzystwa Fizycznego nt. analizy wyników doświadczeń w nauczaniu szkolnym*, w skrócie dalej *Rekomendacja*. Dokument został przedstawiony na 44 Zjeździe Fizyków Polskich we Wrocławiu [6] i dostępny jest na portalu Polskiego Towarzystwa Fizycznego (w czasie pisania tego artykułu był przedmiotem publicznych konsultacji). Skierowany jest do nauczycieli fizyki szkół wszystkich szczebli, autorów i recenzentów podręczników oraz innych osób mających wpływ na nauczanie fizyki w polskich szkołach.

Rekomendacja powstała w wyniku półtorarocznej pracy 6-osobowego zespołu powołanego przez Zarząd Główny PTF. Inicjatorem przedsięwzięcia i głównym redaktorem kolejnych wersji był nauczyciel fizyki Włodzimierz Natorf. Miałem przyjemność być członkiem zespołu i będę wspominał pracę nad *Rekomendacją* jako najbardziej zbiorowe przedsięwzięcie w życiu zawodowym – z pięcioma spotkaniami w Warszawie i niezliczoną liczbą maili, w których dyskutowaliśmy nad *circa* dziesięcioma wersjami dokumentu.

Proponowany sposób obliczania niepewności złożonej był zainspirowany sposobem ujęcia prawa propagacji niepewności w *Przewodniku GUM* [7], będącym najważniejszym dokumentem międzynarodowych uzgodnień [8] określających nazewnictwo, symbolikę i sposoby obliczania niepewności pomiaru. Algorytm obliczania $u(y)$ jest tam wyraźnie rozdzielony na dwa kroki. Pierwszym jest obliczanie *udziałów niepewności* $u_i(y)$ pochodzących od kolejnych zmiennych wejściowych. Krok drugi to składanie udziałów w celu uzyskania niepewności złożonej. Udziały niepewności można obliczyć z wykorzystaniem pochodnej,

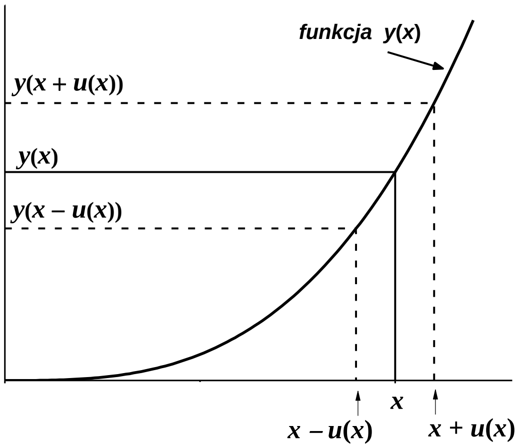
$$u_i(y) = \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} u(x_i) \right|, \tag{2}$$

ale również za pomocą wzoru algebraicznego.

W przypadku funkcji jednej zmiennej wzór ten ma postać[2]

$$u_1(y) \equiv u(y) = \frac{1}{2} \left| \, y(x + u(x)) - y(x - u(x)) \, \right| . \tag{3}$$

Jego ilustracją jest rys. 1. Symbol wartości bezwzględnej we wzorach (2), (3) i (4) jest potrzebny, żeby niepewność była liczbą dodatnią.



Rys. 1. Ilustracja prawa propagacji niepewności na przykładzie funkcji jednej zmiennej $y = x^3$

Właściwe prawo propagacji niepewności dotyczy funkcji wielu zmiennych. W *Rekomendacji* proponujemy ograniczenie do dwóch zmiennych (ew. rozszerzenie na większą ich liczbę jest oczywiste). Krok pierwszy to obliczenie udziałów niepewności analogicznie jak w przypadku jednej zmiennej, co formalnie wyrażają wzory:

$$\begin{aligned} u_1(y) &= \frac{1}{2} \left| \, y(x_1 + u(x_1), \, x_2) - y(x_1 - u(x_1), \, x_2) \, \right| , \\ u_2(y) &= \frac{1}{2} \left| \, y(x_1, \, x_2 + u(x_2)) - y(x_1, \, x_2 - u(x_2)) \, \right| . \end{aligned} \tag{4}$$

Porównanie udziałów niepewności $u_1(y)$ i $u_2(y)$ pozwala ustalić, która z wielkości wejściowych ma największy wpływ na niepewność złożoną.

Krok drugi to obliczenie niepewności złożonej jako sumy geometrycznej obydwu udziałów,

$$u(y) = \sqrt{u_1^2(y) + u_2^2(y)} \, . \tag{5}$$

[2] W *Przewodniku GUM* jest to nienumerowany wzór w pkt. 5.3.1.

Sumowanie geometryczne wynika z faktu, że wszędzie mamy do czynienia z niepewnościami standardowymi, będącymi według *Przewodnika GUM* podstawowym sposobem wyrażania niepewności. Jeżeli znamy niepewności graniczne Δx należy je przedtem zamienić na standardowe, zwykle za pomocą wzoru $u(x) = \Delta x / \sqrt{3}$.

2. Intuicyjny charakter metody algebraicznej

Wzór (3) jest intuicyjnie zrozumiały, szczególnie w powiązaniu z rys. 1. Powiększenie zmiennej wejściowej x o niepewność $u(x)$ powoduje, dla rosnącej funkcji $y(x)$, powiększenie zmiennej wyjściowej y o różnicę $|y(x+u(x)) - y(x)|$. Analogiczne zmniejszenie zmiennej x o niepewność $u(x)$ zmniejsza zmienną wyjściową o wartość $|y(x-u(x)) - y(x)|$. Nie wiemy, czy błąd pomiaru prowadzi do powiększenia czy też obniżenia wartości y w stosunku do nieznanej wartości rzeczywistej, zatem rozsądnie jest przyjąć za $u(y)$ wartość średniej arytmetycznej obydwu różnic.

3. Porównanie wzoru algebraicznego z formalizmem wykorzystującym rachunek różniczkowy

Obydwa formalizmy dla nieliniowej funkcji pomiaru $y(x)$ dają wyniki nieco różne. Można zapytać, który z konkurencyjnych wzorów (2) i (3) jest dokładny, a który przybliżony?

Odpowiedź jest następująca: obydwa są przybliżone. Postępowanie dokładne na gruncie teorii prawdopodobieństwa polega na:

a) Przyjęciu określonego rozkładu prawdopodobieństwa $g(x)$ dla zmiennej wejściowej. Na przykład rozkładu normalnego, w którym niepewność $u(x)$ utożsamiamy z odchyleniem standardowym σ_x funkcji Gaussa.
b) Obliczeniu rozkładu prawdopodobieństwa $g(y)$ zmiennej y dla zadanej funkcji pomiaru $y(x)$. Współcześnie, najwygodniej to uzyskać przy wykorzystaniu metody Monte Carlo. Funkcja rozkładu $g(y)$ nie jest przeskalowaną funkcją $g(x)$. W szczególności, gdy funkcja $g(x)$ jest symetryczna, rozkład $g(y)$ staje się nieznacznie asymetryczny.
c) Dla uzyskanej funkcji $g(y)$ obliczamy odchylenie standardowe, które utożsamiamy z niepewnością zmiennej wyjściowej, $u(y) \equiv \sigma_y$.

Postępowanie to bywa nazywane *prawem propagacji rozkładów* (prawdopodobieństwa). Jego wykorzystanie do obliczania niepewności złożonej i rozszerzonej jest głównym tematem *Suplementu 1* [9] konwencji GUM. Metoda propagacji rozkładów znajduje zastosowanie w nielicznych sytuacjach, gdy „zwykłe" prawo propagacji niepewności nie może być stosowane, np. gdy funkcja $y(x)$ jest nieanalityczna lub silnie nieliniowa.

Dla liniowej funkcji pomiaru $y(x) = ax + b$ wszystkie trzy omówione wyżej formalizmy są w pełni równoważne (dają identyczne wyniki). W przypadku nieliniowej funkcji pomiaru prawo przenoszenia niepewności, czy to z wykorzystaniem pochodnych, czy też metody algebraicznej, jest przybliżeniem wystarczającym w większości wypadków. Można to uzasadnić w szczególności tym, że nie warto silić się na dokładność w sytuacji, gdy samą wartość niepewności znamy bardzo niedokładnie.

Prawo przenoszenia niepewności z wykorzystaniem pochodnych zasadza się na zastąpieniu nieliniowej (w ogólności) funkcji przez jej przybliżenie liniowe, $y(x) = y(x_0) + (dy/dx)\big|_{x=x_0}(x - x_0)$. Wzór algebraiczny (3) można z kolei rozumieć też jako przybliżenie liniowe, ale zdefiniowane przy pomocy różnic skończonych. Przy czym symetryczny charakter tego wzoru eliminuje wiodącą nieliniowość drugiego rzędu. Dlatego wzór (3) jest bardziej dokładny od jeszcze prostszej formuły

$$u(y) = \left| y(x + u(x)) - y(x) \right|. \tag{6}$$

Zbadajmy to numerycznie na przykładzie funkcji $y = x^3$ i przesadnie dużej wartości niepewności $u(x) = 0{,}1 \cdot x$ (jak na rys. 1) dla $x = 1$:

a) z wzoru z pochodnymi (2) otrzymujemy $u(y) = 0{,}3$,

b) wzór algebraiczny (3) daje wynik $u(x) = 0{,}301$,

c) przy użyciu „niesymetrycznego" wzoru (6) uzyskujemy $u(x) = 0{,}331$.

Biorąc pod uwagę zasadę, że niepewność zaokrąglamy do – co najwyżej – dwóch miejsc znaczących, pierwsze dwa wyniki są równoważne (w ramach przyjętej dokładności).

4. Prawo propagacji niepewności dla sumy i iloczynu zmiennych wejściowych

Najważniejszym przypadkiem szczególnym prawa przenoszenia niepewności jest sytuacja, gdy funkcja pomiaru ma postać sumy (różnicy) zmiennych wejściowych względnie ich iloczynu (ilorazu). Zagadnienie to jest przedstawione w prawie każdej akademickiej prezentacji prawa propagacji niepewności, z wyprowadzeniem wykorzystującym wzór (1).

Wyrażenie (3) bywa traktowane jako wzór wyłącznie do obliczeń numerycznych. Tymczasem umożliwia również *wyprowadzenie* obydwu wymienionych przypadków szczególnych – bez użycia rachunku różniczkowego. Zacznijmy od przypadku funkcji pomiaru będącej sumą zmiennych wejściowych,

$$y(x_1, x_2) = x_1 + x_2\,. \tag{7}$$

Obliczmy udział niepewności dla pierwszej zmiennej:

$$u_1(y) = \frac{\left| [(x_1 + u(x_1)) + x_2] - [(x_1 - u(x_1)) + x_2] \right|}{2} = u(x_1) \,. \tag{8}$$

Analogicznie, dla drugiej zmiennej $u_2(y) = u(x_2)$. Obydwa udziały sumujemy geometrycznie,

$$u(y) = \sqrt{u_1^2(x_1) + u_2^2(x_2)} \,. \tag{9}$$

Przedstawione wyprowadzenie można zastosować do różnicy zmiennych wejściowych i do liczby zmiennych wejściowych większej niż dwie.
Dla funkcji pomiaru w postaci iloczynu,

$$y(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \,, \tag{10}$$

obliczenie udziału niepewności dla pierwszej zmiennej wygląda następująco:

$$u_1(y) = \frac{\left| [x_1 + u(x_1)] \cdot x_2 - [x_1 - u(x_1))] \cdot x_2 \right|}{2} = \left| x_2 \, u(x_1) \right| . \tag{11}$$

W ten sam sposób obliczamy $u_2(y) = \left| x_1 \, u(x_2) \right|$. Geometryczne sumowanie udziałów daje

$$u(y) = \sqrt{[x_2 \, u(x_1)]^2 + [x_1 \, u(x_2)]^2} \,. \tag{12}$$

Obliczamy następnie złożoną niepewność względną

$$\frac{u(y)}{y} = \frac{\sqrt{[x_2 \, u(x_1)]^2 + [x_1 \, u(x_2)]^2}}{x_1 \, x_2} = \sqrt{\left[\frac{u(x_1)}{x_1}\right]^2 + \left[\frac{u(x_2)}{x_2}\right]^2} . \tag{13}$$

Udowodniliśmy, że w przypadku iloczynu wielkości mierzonych bezpośrednio, geometrycznemu sumowaniu podlegają niepewności względne. Analogiczne wyprowadzenie dla ilorazu, tj. funkcji pomiaru $f(x_1, x_2) = x_1 / x_2$, jest nieco trudniejsze, gdyż trzeba dodatkowo wykorzystać przybliżenie $\frac{1}{1+t} \cong 1 - t$, słuszne dla zmiennej $t = \left| u(x_2)/x_2 \right|$ znacznie mniejszej o jedności.

5. Przykład doświadczalny

Chcemy wyznaczyć gęstości stalowej kulki, wraz z niepewnością pomiaru. Kulka pochodzi z rozmontowanego łożyska kulkowego.

(i) **średnicę kulki** d = 12,2 mm zmierzono przy pomocy suwmiarki cyfrowej o dokładności Δd = 0,1 mm. Utożsamiamy ją z niepewnością graniczną i zamieniamy na niepewność standardową: $u(d) = 0{,}1\big/\sqrt{3}\ \text{mm} = 0{,}058\ \text{mm}$.

(ii) **objętość kulki** obliczamy z wzoru:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi}{6}d^3 = \frac{3{,}1416\cdot(12{,}2\ \text{mm})^3}{6} = 951\ \text{mm}^3.$$

Niepewność wyznaczenia objętości z wzoru (3):

$$u(V) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{6}\left|(12{,}2+0{,}058)^3 - (12{,}2-0{,}058)^3\right|\text{mm}^3 = 14\,\text{mm}^3.$$

Względna niepewność wyznaczenia objętości wynosi $(u(V)/V) \times 100\%$ = 1,5%.

(iii) **masę kulki** m = 7,48 g wyznaczamy przez jej zważenie przy użyciu elektronicznej wagi kieszonkowej o dokładności 0,01 g (np. YWG1). Niepewność względna: $u(m)/m = [(0{,}01\big/\sqrt{3}\,)/7{,}48]\cdot 100\% = 0{,}08\%$.

(iv) **gęstość materiału kulki** obliczamy z wzoru definicyjnego:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{7{,}48\ \text{g}}{0{,}951\ \text{cm}^3} = 7{,}87\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

Funkcja użyta do wyznaczenia gęstości jest ilorazem, zatem stosuje się do niej zasada składania niepewności względnych wyrażona wzorem (13). Zatem

$$\frac{u(\rho)}{\rho} = \sqrt{\left[\frac{u(V)}{V}\right]^2 + \left[\frac{u(m)}{m}\right]^2}\cdot 100\% = \sqrt{1{,}5^2 + 0{,}08^2}\,\% = 1{,}5\%.$$

Z uzyskanej niepewności względnej obliczyć można niepewność (bezwzględną) pomiaru gęstości jako: $u(\rho)$ = (1,5% / 100%) · 7,87 g/cm^3 = 0,12 g/cm^3.

W pokazanym przykładzie praktycznie cała niepewność pomiaru złożonego pochodzi od niepewności pomiaru średnicy. Sytuacja, gdy jeden z pomiarów bezpośrednich, ten mniej dokładny, decyduje o niepewności pomiaru złożonego jest typowa. Sytuacja, gdy obydwa pomiary wnoszą porównywalne udziały do niepewności złożonej zdarza się niezbyt często.

Wyznaczona gęstość materiału kulki jest zgodna z literaturowym przedziałem gęstości stali 7,86–7,9 g/cm^3 [10].

Podsumowanie

W artykule omówiono prawo propagacji niepewności wyrażone z wykorzystaniem wyłącznie formalizmu algebraicznego, z przeznaczeniem do nauczania opracowania wyników pomiaru w szkołach ponadpodstawowych. Znajomość tego formalizmu poszerza też zrozumienie prawa propagacji niepewności na poziomie akademickim, gdzie właściwym jest użycie algorytmu wykorzystującego pochodne cząstkowe.

Dziękuję Bernardowi Jancewiczowi, Andrzejowi Majhoferowi i Tadeuszowi Molendzie za cenne uwagi oraz szczególnie Zofii Gołąb-Meyer za sugestię dodania przykładu pochodzącego z rzeczywistego pomiaru.

Referencje

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 27 sierpnia 2012 r. *w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół*. Dz.U. 2012, Poz. 977

[2] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 stycznia 2018 r. *w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia. Załącznik nr 1*

[3] Red. J. Salach, autorzy: K. Fiałkowski, M. Fiałkowska, M. Godlewska, M. Godlewski, B. Sagnowska, J. Salach, *Wybieram fizykę. Zakres rozszerzony z fizyki dla szkół ponadgimnazjalnych*. Cześć 1. ZamKor, 2006

[4] B. Sagnowska. *Fizyka i astronomia dla każdego*, ZamKor, 2010

[5] IPHO SYLLABUS. Accepted 2014 in Astana, amended 2015 in Mumbai

[6] W. Natorf, A. Zięba, J. Grabski, A. Majhofer, T. Molenda, J. Mostowski, *Rekomendacja PTF na temat metod analizy wyników pomiarów w nauczaniu szkolnym*. Referat na sesji: Dydaktyka i popularyzacja Zjazdu, streszczenie na s. 86 książki konferencyjnej

[7] Angielski tekst *Przewodnika GUM* dostępny w sieci: JCGM 100:2008. *Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement*

[8] Więcej nt. dokumentów [7] i [9] w: A. Zięba, *Dwadzieścia lat konwencji GUM oceny niepewności pomiaru. Część I: Powstanie i rozwój*, Postępy Fizyki **67** (2016), 138–143

[9] JCGM 101:2008. *Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" – Propagation of distributions using a Monte Carlo method*

[10] *CRC Handbook of Chemistry and Physics*[3], 75th edition, Florida: Chemical Rubber Co, 1994

[3] Kultowy poradnik fiz.-chem. w USA, 97 wydań od 1914 r.