

Quo vadis, maturalna beczka

Grzegorz Koczan¹, Juliusz Ziomek²

Artykuł złożony 13.02.2018, zaakceptowany do druku 14.03.2018

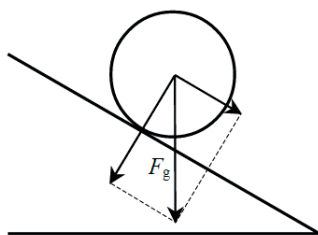
Wbrew pozorom nie chodzi o rozważania na temat reform edukacyjnych. Celem artykułu jest odpowiedź na pytanie, czy beczka z zadania maturalnego toczy się 20 m, zgodnie z kluczem i zasadą zachowania energii, czy też 13,33 m zgodnie z drugą zasadą dynamiki. Analiza tego zaskakującego paradoksu ma formę gorącej dyskusji autorów odgrywających rolę sceptyka i zwolennika utartych poglądów fizycznych. Dyskusja jest opatrzona podsumowaniem i wnioskami, odzwierciedlającymi rzeczywiste poglądy autorów. Zarysowana została także geneza problemu oraz jego historia, a także pewne nowe koncepcje autorskie.

Zadanie 1. Beczka (12 pkt) (matura rozszerzona z fizyki, maj rok 2008)

Do hurtowni chemicznej przywieziono transport blaszanych beczek z gipsem. W celu wyładowania beczek z samochodu położono pochylnię, tworząc w ten sposób równię pochyłą. Wysokość, z jakiej beczki staczały się swobodnie bez poślizgu, wynosiła 100 cm. Beczki były ściśle wypełnione gipsem, który nie mógł się przemieszczać, i miały kształt walca o średnicy 40 cm. Masa gipsu wynosiła 100 kg. W obliczeniach przyjmij wartość przyspieszenia ziemskiego równą 10 m/s^2 , a beczkę potraktuj jak jednorodny walec. Masę blachy, z której wykonano beczkę, pomini. Moment bezwładności walca, obracającego się wokół osi prostopadłej do podstawy walca i przechodzącej przez jej środek, jest równy $I = mr^2/2$.

Zadanie 1.1 (2 pkt)

Uzupełnij rysunek o pozostałe siły działające na beczkę podczas jej swobodnego staczania. Zapisz ich nazwy.



	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 60^\circ$
$\sin \alpha$	0,50	0,87
$\cos \alpha$	0,87	0,50
$\text{tg } \alpha$	0,58	1,73
$\text{ctg } \alpha$	1,73	0,58

¹ Wydział Technologii Drewna SGGW, Katedra Nauki o Drewnie i Ochrony Drewna, Katedra Fizyki, gkoczan@fuw.edu.pl

² CXXII LO im. I. Domeyki w Warszawie, uczestnik olimpiad fizycznych, juliusz.ziomek@gmail.com

Zadanie 1.2 (2 pkt)

Oblicz wartość siły nacisku beczki na równię podczas staczania, jeżeli kąt nachylenia pochylni do poziomu wynosi 30° .

Zadanie 1.3 (4 pkt)

Wykaż, że wartość prędkości liniowej beczki po stoczeniu się z pochylni jest równa $3,65$ m/s.

Zadanie 1.4 (2 pkt)

Oblicz, korzystając ze związku pomiędzy energią i pracą, zasięg toczenia się beczki po poziomej trawiastej powierzchni. Przyjmij, że podczas toczenia się beczki po trawie działa na nią stała siła oporu o wartości 50 N, a wartość prędkości liniowej beczki po stoczeniu się z pochylni jest równa $3,65$ m/s.

Zadanie 1.5 (2 pkt)

Wykaż, że zmiana zawartości beczki z gipsu na cement (o innej niż gips masie), również ściśle wypełniający beczkę, nie spowoduje zmiany wartości przyspieszenia kąowego, z jakim obraca się beczka wokół osi prostopadłej do podstawy beczki i przechodzącej przez jej środek.

Dyskusja

JULEK: No i znowu się zaczyna szukanie dziury w całym i odkrywanie Ameryki na nowo. Błąd w kluczu w punkcie 1.5 został rozpoznany bardzo szybko po maturze i odbił się szerokim echem w mediach [1]. Został on nawet dawno usunięty z oficjalnej strony CKE, ale można go odnaleźć na stronach archiwalnych lub w ówczesnych zbiorach z arkuszami maturalnymi. Do dziś na wielu stronach internetowych można przeczytać rozpracowanie tego błędu przez prof. Łukasza Turskiego z CFT PAN [2, 3]. Zresztą to nie był błąd w zadaniu, a jedynie w kluczu. Zatem po co to znowu rozgrzebywać?

GRZEGORZ: Jak zawsze jesteś niepoprawnym optymistą wierzącym w nieomyślność egzaminatorów i profesorów. Tak się składa, że według mnie zauważono „drzazgę” w punkcie 1.5, a nikt nie zauważył „belki” w punkcie 1.4. I bynajmniej nie chodzi mi tutaj tylko o błąd w wyjaśnianiu niekwestionowanej tezy, jak w 1.5, ale o istotny błąd w rozwiązaniu albo nawet w sformułowaniu punktu 1.4. Zaś w kwestii 1.5 zgadzam się z prof. Turskim i zdziwiłem się, że dyrektor CKE Marek Legutko zaprzeczał błędowi w kluczu odwołując się do najczęstszych rozwiązań uczniów [4]. Dopiero przed chwilą znalazłem, że między innymi ta sprawa przyczyniła się do dymisji tego dyrektora.

JULEK: Uważaj sobie co chcesz o 1.4, ale zarówno z energii potencjalnej beczki na górze pochylni oraz z całkowitej energii kinetycznej na dole wynika ten sam zasięg toczenia s :

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{mr^2}{2} \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 = F_{op} \cdot s \quad (1)$$

Dla masy beczki $m = 100$ kg, przyspieszenia ziemskiego $g = 10$ m/s², wysokości $h = 1$ m, prędkości $v = 3,6515$ m/s; siły oporu $F_{op} = 50$ N wychodzi:

$$s = \frac{mgh}{F_{op}} = \frac{3mv^2}{4F_{op}} = 20 \text{ m} \quad (2)$$

Jest to tak proste rozwiązanie, że nie ma się tutaj do czego przyczepić. Przecież nie będziemy się czepiać 2-centymetrowej niedokładności numerycznej wyniku ($s \approx 19,98$ m) powstającej na skutek zastosowanego przez CKE przybliżenia prędkości tylko do dwóch miejsc po przecinku ($v \approx 3,65$ m/s).

GRZEGORZ: Brawo, zrobiłeś to dokładnie tak jak przewiduje klucz. Ja jednak hołduję zasadzie, że zadanie, które nie zostanie rozwiązane dwiema metodami, nie jest zadaniem w pełni rozwiązaniem. Wobec tego rozwiążę to zadanie za pomocą zasady dynamiki ruchu postępowego. Opóźnienie jest tutaj zdeterminowane siłą oporu, co do której naturalnie zakładam, że jest całkowitą siłą oporu i tym samym siłą wypadkową w ogóle:

$$a = \frac{F_{op}}{m} = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (3)$$

Z podstawowych wzorów kinematyki można teraz obliczyć czas:

$$t = \frac{v}{a} = \frac{mv}{F_{op}} = 7,3 \text{ s} \quad (4)$$

oraz prawidłowy zasięg toczenia beczki:

$$z = vt - \frac{at^2}{2} = \frac{mv^2}{2F_{op}} = 13,33 \text{ m} \quad (5)$$

Jak widać zgodnie z prawem ruchu Newtona zasięg jest o 1/3 mniejszy.

JULEK: To rzeczywiście jest bardzo zaskakujące, ale na pewno czegoś nie uwzględniłeś – np. warunku braku poślizgu. Można jeszcze przecież zastosować drugą zasadę dynamiki ruchu obrotowego. Załóżmy, że siła oporu jest przyłożona w środku ciężkości beczki (rys. 1) i beczka obraca się względem chwilowej osi obrotu zlokalizowanej wzdłuż jej kontaktu z podłożem. Wówczas z prawa ruchu obrotowego możemy obliczyć opóźnienie kątowe:

$$\varepsilon = \frac{F_{op} \cdot r}{mr^2 / 2 + mr^2} = \frac{2F_{op}}{3mr} = 0,833 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \quad (6)$$

Analogicznie do (4) obliczamy czas hamowania dla początkowej prędkości kątowej $\omega = v/r$:

$$\tau = \frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{3mv}{2F_{op}} = 10,95 \text{ s} \quad (7)$$

Czas determinuje kąt obrotu:

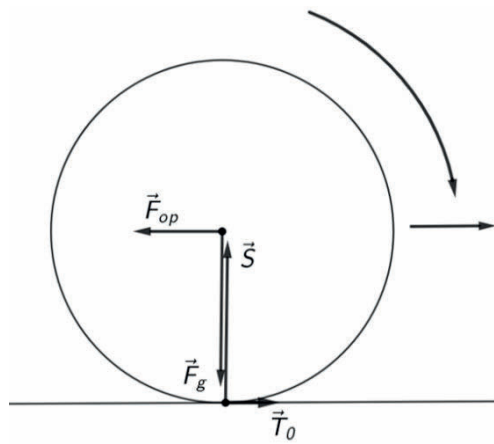
$$\alpha = \omega\tau - \frac{\varepsilon\tau^2}{2} = \frac{3mv^2}{4F_{op} \cdot r} = 50 \text{ rad} \quad (8)$$

Na tej podstawie zasięg toczenia wynosi $s = \alpha r = 20 \text{ m}$ i jest zgodny z pierwotnym rozwiązaniem (2). Zatem przykro mi, ale już dwa rozwiązania przemawiają za wynikiem z klucza.

GRZEGORZ: Przyznaję, że zacięcie bronisz ustalonej odgórnie tezy i dobrze ci to wychodzi. Ale coś mi się tutaj nie zgadza. Jeżeli bowiem będziemy analizować ruch obrotowy względem osi przechodzącej przez środek ciężkości to musimy wprowadzić siłę tarcia statycznego T_0 , która będzie hamowała ruch obrotowy. Siła ta powinna być przyłożona typowo w miejscu kontaktu z podłożem, ale skierowana w kierunku ruchu beczki (rys. 1). Jej wartość możemy obliczyć na podstawie drugiej zasady dynamiki ruchu obrotowego względem środka oraz równania (6):

$$\varepsilon = \frac{T_0 \cdot r}{mr^2 / 2} \Rightarrow T_0 = \frac{1}{3} F_{op} = 16,67 \text{ N} \quad (9)$$

Ta siła tarcia umniejsza siłę oporu o 1/3, więc efektywna siła oporu wynosi tutaj w rzeczywistości 33,33 N, a nie 50 N.



Rys. 1. Pierwszy wariant układu sił działających na beczkę, który prowadzi do wyniku 20 m. W wariantcie tym wypadkowa siła oporu i tarcia jest mniejsza od $F_{op} = 50 \text{ N}$ i wynosi 33,33 N

JULEK: Zgadza się, właśnie znalazłeś brakujący element układanki, który uzgadnia rozwiązanie energetyczne (1)–(2) i dynamiczno-obrotowe (6)–(8) z Twoim rozwiązaniem dynamiczno-postępowym typu (3)–(5), ale zmodyfikowanym o dodatkową siłę T_0 . Jest to siła tarcia statycznego, która nie wykonuje pracy z powodu braku poślizgu, więc nie powinna być włączana do siły oporu ruchu, tym bardziej, że ma ona przeciwny zwrot. Zatem sam zasiałeś wątpliwości i sam doprowadziłeś do rozwiązania paradoksu.

GRZEGORZ: Nie, nic nie jest jeszcze rozwiązane, a tylko rozgrzebane w ten sposób, że pozornie i przypadkowo wygląda to tak, jakbyś miał rację wraz z CKE. Powiedz mi, jakim cudem podłoże (murawa) może działać poziomą siłą przyłożoną bezpośrednio do środka masy? To nie może być poprawny model rozważanej sytuacji fizycznej! Problem trzeba opisać bardziej profesjonalnie i technicznie za pomocą momentu siły reakcji sprężystej podłoża³.

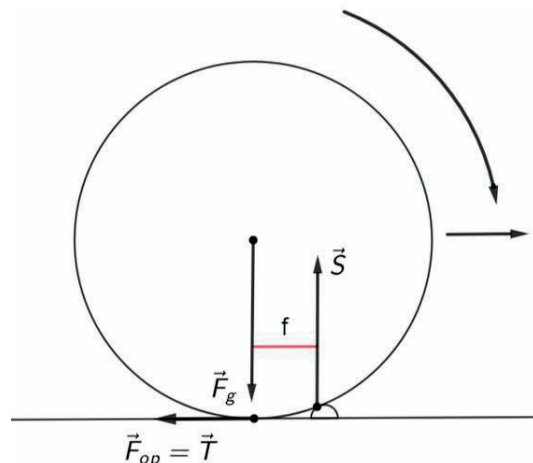
JULEK: Tonący brzytwy się chwyta. Zadanie maturalne to nie jest poziom akademicki. Natomiast, jeśli da się do zadania podejść jeszcze ogólniej, to nie będę protestował. Dopiero teraz zainteresowałeś mnie problemem, bo przypomniałem sobie, że dwa lata temu na olimpiadzie było zadanie z tarcie tocznym [5]. Pytanie tylko, czy tę metodykę, o której wspomniałeś, da się zaimplementować do tego zadania, które przecież nie było pod nią układane?

GRZEGORZ: Szczęśliwie wygląda na to, że się da. Poza tym to nie musi być wcale poziom akademicki czy olimpijski – pierwszy raz widziałem takie podejście w podręczniku do mechaniki kuzyna, który chodził do technikum. Idea tarcia tocznego polega na przesunięciu punktu przyłożenia siły sprężystej reakcji podłoża S o odległość f w kierunku ruchu (rys. 2). W zadaniu nie znamy współczynnika f , ale jego wartość da się obliczyć z siły oporu. Wówczas naturalne jest utożsamić tę siłę oporu z siłą tarcia statycznego przyłożoną do miejsca kontaktu beczki z podłożem (rys. 2).

JULEK: Rozumiem, brzmi rozsądnie. Sądzę, że warunek braku poślizgu ($a = \varepsilon r$) wraz z prawami ruchu postępowego i obrotowego umożliwia obliczenie współczynnika tarcia tocznego:

$$\frac{F_{op}}{m} = \frac{mg \cdot f}{mr^2 / 2 + mr^2} r \Rightarrow f = \frac{3F_{op}}{2mg} r = 0,015 \text{ m} \quad (10)$$

³ Tak określaną siłę traktujemy z definicji jako prostopadłą do podłoża, zaś pełna siła reakcji jest wypadkową siły sprężystej reakcji i siły tarcia.



Rys. 2. Drugi wariant układu sił działających na beczkę zgodny ze standardowym technicznym opisem tarcia tocznego prowadzi do wyniku zasięgu 13,33 m

GRZEGORZ: Doskonale. Natomiast nie wiem czy zauważyłeś, ale użyte tutaj po lewej stronie przyspieszenie liniowe jest tożsame mojemu przyspieszeniu (3). W związku z tym przyspieszenie kątowe jest tu większe niż w (6) i wynosi $1,25 \text{ rad/s}^2$. Chyba nie muszę przekonywać, że oznacza to alternatywne rozwiązanie 13,33 m w tym wariacie.

JULEK: Owszem, o dziwo to podejście daje rozwiązanie tożsame z tym, które postulowałeś. Jednak ja bym się nie łudził, że odkryliśmy Amerykę. Według (10) wyszło po twojemu, ale jak zastosujemy encyklopedyczny wzór na siłę oporu tocznienia to wyjdzie inaczej:

$$F_{op} = \frac{f'}{r} \cdot mg \Rightarrow f' = \frac{F_{op}}{mg} r = 0,01 \text{ m} \quad (11)$$

Nietrudno się domyślić, że taki mniejszy współczynnik tarcia daje rozwiązanie 20 m zgodne z kluczem.

GRZEGORZ: Czy ty zawsze musisz być takim malkontentem do samego końca? Już chciałem zaprotestować: jacy my odkryliśmy Amerykę i w tej samej chwili zrozumiałem, że rzeczywiście wzory (10) i (11), które wyprowadziłeś opisują dwie wersje siły oporu tocznienia – nazwijmy je dynamiczną i kinetyczną. Zadanie maturalne dotyczy wersji dynamicznej (10) i użycie formuły (11) jest tutaj nieuprawnione.

JULEK: Rozumiem, chcesz powiedzieć, że formuła (11) nie jest jednocześnie konsystentna z warunkiem braku poślizgu oraz zasadami dynamiki ruchu postępowego i obrotowego.

GRZEGORZ: Tak, formuła (11) jest słuszna dla ruchu jednostajnego, a nie dla swobodnego zwalniania.

JULEK: Mimo to zastanawiam się, czy zadania nie da się zrobić jeszcze inaczej, bez wprowadzania współczynników f, f' , czy dodatkowej siły tarcia T_0 . Być może istnieje jakiś szczególny (choćby abstrakcyjny) punkt przyłożenia siły oporu, który zapewnia zgodność wszystkich warunków: zasady zachowania energii, warunku braku poślizgu, zasad dynamiki ruchu postępowego i obrotowego.

GRZEGORZ: Ooo, co to się stało – czyżbyś chciał dorzucić kolejne rozwiązanie i kolejny wynik?

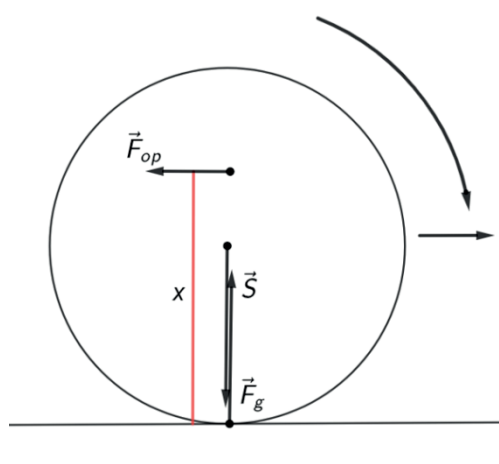
JULEK: Mam nadzieję, że nie doprowadzi to do trzeciej wartości liczbowej, a jedynie, że to będzie rozstrzygająca metoda.

GRZEGORZ: Bardzo dobrze, bo cokolwiek to będzie, to musi być zgodne z prawem Newtona w wersji (3). Jeśli wysokość przyłożenia siły oporu przyjąć jako niewiadomą x (rys. 3), to mamy rzeczywiście trzy niewiadome i trzy podstawowe równania. Wobec tego powinno się dać to rozwiązać.

JULEK: Tak, wystarczy rozwinąć warunek braku poślizgu analogicznie do (10):

$$\frac{F_{op}}{m} = \frac{F_{op} \cdot x}{mr^2 / 2 + mr^2} r \Rightarrow x = \frac{3}{2} r = 0,3 \text{ m} \quad (12)$$

Czyli punkt przyłożenia takiej siły oporu znajduje się w środku górnego pionowego promienia beczki (na wysokości $3/4$ średnicy).



Rys. 3. W trzecim wariantcie siła oporu toczenia beczki przyłożona jest w punkcie zapewniającym jednocześnie hamowanie ruchu postępowego i obrotowego. Prowadzi to do wyniku 13,33 m

GRZEGORZ: Świetnie, już teraz widać, że metoda ta daje takie same przyspieszenia liniowe i kątowe jak w metodzie prowadzącej do zasięgu 13,33 m.

JULEK: Tak, wygląda na to, że trzeba przyznać ci rację. Natomiast co zrobimy z uogólnioną zasadą zachowania energii w tej metodzie?

GRZEGORZ: Wbrew pozorom nie jest to takie trudne. Wystarczy zauważyć, że punkt przyłożenia siły oporu ma prędkość 1,5 raza większą niż beczka. Wobec tego droga we wzorze na pracę będzie półtora razy większa od szukanej drogi toczenia beczki.

JULEK: Sprytnie. A jak sobie poradzimy z uogólnioną zasadą zachowania energii w modelu opartym na współczynniku f ?

GRZEGORZ: Paradoksalnie pracy nie wykonuje tutaj siła oporu, która jest siłą tarcia statycznego, ale przesunięta siła sprężystej reakcji podłoża.

JULEK: Rzeczywiście to całkowicie rozwiązuje problem, ale jednocześnie jeszcze bardziej oddala nas od sposobu myślenia autora zadania. W wariancie ze współczynnikiem f praca jest wykonywana tylko w ruchu obrotowym, a nie postępowym. Ironią losu jest to, że wzór na pracę momentu siły pojawia się w niektórych zbiorach lub podręcznikach.

GRZEGORZ: I kto to mówi? Zmuszasz mnie do bycia adwokatem diabła przez chwilę. Na upartego można pracę momentu siły reakcji sprężystej interpretować w kategoriach tarcia ślizgowego – przecież punkty beczki poruszają się względem punktu (kierunku) przyłożenia tej siły. Zresztą jest to analogiczne do wariantu z przesunięciem x siły oporu.

JULEK: Gratuluję świetnej interpretacji, ba dwóch świetnych interpretacji.

GRZEGORZ: Ten pochlebny ton bierze się pewnie stąd, że to Ty naprowadziłeś nas na to drugie rozwiązanie z x . To jest nawet równoważny, ale alternatywny sposób opisu tarcia tocznego.

JULEK: Tak czy siak mówimy ciągle o rozwiązaniach prowadzących do wyniku 13,33 m, a nie 20 m.

GRZEGORZ: Co prawda, to prawda.

Podsumowanie dyskusji

Mimo całej staranności przygotowania powyższej dyskusji czytelnik mógł stracić rachubę liczby przedstawionych sposobów rozwiązań. Dla uporządkowania rozróżnimy pojęcie wariantu (przypadku) zadania od metod rozwiązywania. Bogactwo wariantów bierze się z niezamierzonego przez autora zadania braku doprecyzowania punktu przyłożenia oraz charakteru siły oporu. W dyskusji zostały przedstawione trzy najbardziej charakterystyczne i autokonsistentne warianty zadania. W pierwszym wariancie (rys. 1) siła oporu jest przyłożona do środka ciężkości, ale towarzyszy jej jeszcze siła tarcia statycznego przyłożona do styku beczki z podłożem. W wariancie drugim (rys. 2) siła oporu

jest tożsama z siłą tarcia statycznego przyłożonego do styku beczki z podłożem, zaś siła reakcji sprężystej podłoża jest przesunięta o współczynnik tarcia tocznego f . W wariacie trzecim (rys. 3) nie ma w ogóle typowego tarcia statycznego, a wysokość przyłożenia siły oporu wynika z równań. Ich rozwiązanie określa tę wysokość na $3/4$ średnicy beczki.

Jeśli chodzi o metody rozwiązania, to szczegółowo można wyróżnić cztery oparte na: uogólnionej zasadzie zachowania energii mechanicznej, drugiej zasadzie dynamiki ruchu postępowego, drugiej zasadzie dynamiki ruchu obrotowego względem punktu styczności z podłożem oraz względem środka ciężkości. Dodatkowo zakładamy warunek braku poślizgu, który uzgadnia metody ruchu postępowego z obrotowym. Dla danego wariantu zwykle najwygodniejsza jest określona metoda lub dwie połączone metody. Wszystkie metody poprawnie stosowane są niesprzeczne i prowadzą do jednoznacznego wyniku w ramach wariantu. Natomiast inaczej wygląda sytuacja z wariantami. Tylko wariant pierwszy prowadzi do rozwiązania 20 m, zgodnego z kluczem odpowiedzi. Ten wariant nie jest jednak w pełni poprawnym modelem fizycznym dla tarcia tocznego. Po pierwsze trudno sobie wyobrazić, w jaki sposób podłoże oddziałuje na beczkę siłą przyłożoną w środku masy. Po drugie można dyskutować, czy siła oporu w tym wariacie wynosi 50 N, czy raczej jej wypadkowa wartość to 33,33 N. Najbardziej poprawny i kompleksowy jest wariant drugi, który jest zgodny z techniczno-akademickim sposobem opisu tarcia tocznego. Wariant ten prowadzi do wyniku zasięgu beczki 13,33 m, który jest sprzeczny z kluczem odpowiedzi. Ten sam wynik potwierdza najprostszy wariant trzeci. Wariant ten jest w niniejszej pracy autorskim sposobem uproszczonego opisu dynamicznej siły oporu toczenia⁴. Termin „opis uproszczony” użyty jest tutaj w sensie otrzymywania równoważnych wyników.

Ostatecznie zatem można powiedzieć, że rozwiązanie niezgodne z kluczem odpowiedzi (13,33 m) wygrywa z rozwiązaniem zgodnym z kluczem (20 m) z wynikiem wariantów 2:1. Warto dodać, że jedyny wariant zgodny z kluczem może uchodzić za dyskusyjny. Sytuacja taka oznacza niedookreślenie zadania maturalnego 1.4 albo dopuszczenie istnienia dwóch nierównoważnych wyników tego zadania.

Wnioski dla CKE

W maju 2018 roku minie 10 lat od matury 2008 z zadaniem z beczką. Można więc mówić o swoistym przedawnieniu. Błąd w punkcie 1.4 pozostał do tej pory niezauważony i niewyjaśniony w przeciwieństwie do błędu w kluczu w punkcie 1.5 [3]. Prawdopodobnie też nie zaszkodził on wielu maturzystom, gdyż błąd był głęboko zakamuflowany, a zadanie wydawało się bardzo proste.

⁴ Rozróżnienie dynamicznej i kinematycznej siły oporów toczenia autorzy ściśle zdefiniowali w pracy [6].

Paradoksalnie poprawniejsze rozwiązanie 13,33 m (niezgodne z kluczem) mogli uzyskać jedynie mniej pilni uczniowie, którzy w bilansie energii pominęli energię kinetyczną ruchu obrotowego⁵. Taka sytuacja byłaby raczej splotem ignorancji maturzysty i przypadku uzyskania poprawniejszego wyniku. W gruncie rzeczy szanse na świadome dostrzeżenie problemu mogli mieć jedynie uczniowie na poziomie olimpijskim. Jednak najlepsi z nich (finaliści i laureaci) byli zwolnieni z matury.

Historii i archiwum matury zmienić nie można, ale jak pokazuje przykład zadania 1.5 można zmienić klucz maturalny na stronie CKE. Naszym zdaniem podobnie należy postąpić z zadaniem 1.4 poprzez dopisanie w kluczu alternatywnego (w istocie poprawniejszego) wariantu rozwiązania 13,33 m. Byłby to swoisty precedens w naukach ścisłych istnienia dwóch różnych wyników dla jednego zadania. Jednakże dwuznaczność jest tutaj spowodowana głęboko ukrytą nieściśłością zadania. Paradoksalnie nie chcemy krytykować CKE za podniesienie zadania 1.4. Wręcz przeciwnie, podjęcie tego problemu na prostym poziomie maturalnym przyczyniło się do rozwiązania problemu na poziomie akademickim [6]. Pokazuje to, że odkrywanie praw fizyki (dosłownie i w przenośni) może mieć miejsce już na poziomie szkolnym. Wynika to z potrzeby posługiwania się redukcjonizmem w fizyce, o czym często zapomina się na poziomie wyższym.

Geneza problemu

Jak to jest możliwe, że błąd w 1.4 nie został przez 10 lat zauważony, mimo że zadanie 1 było szeroko komentowane w mediach przez prof. Łukasza Turskiego z CFT PAN [2]? Taka sytuacja musi mieć, oczywiście, głębsze podłoże niż jakiegokolwiek zaniedbania pojedynczych ludzi czy ich zespołów. To zaskakujące, ale podłożem tym był brak wyczerpującej teorii tarcia tocznego. Ściśle mówiąc chodzi o brak pewnych elementów tej teorii. Owocuje to niezrozumieniem tarcia tocznego i w konsekwencji jego wyparciem z dydaktyki fizyki na poziomie średnim, a nawet akademickim. Zagadnienie jest podejmowane jedynie w technikach oraz na politechnikach, które muszą zajmować się problemami trybologicznymi. Mimo tego, zadania podobne do 1.4 na zaawansowanym poziomie średnim pojawiały się kilka razy wcześniej. Jedno takie zadanie znajduje się w zbiorze [7] przygotowanym przez kadrę AGH. Zbiór ten nie jest typowym zbiorem akademickim i może być użyteczny dla zdolnych uczniów lub olimpijczyków, czy też nauczycieli fizyki. Na XXVII Olimpiadzie Fizycznej w roku szkolnym 1977/1978 tarcie toczne pojawiło się aż dwa razy. Zadanie [8] na zawodach stopnia I jest bardziej skomplikowaną wersją zadania 1.5, zaś zadanie [9] z finału jest bardziej złożoną wersją zadania 1.4. Ponadto prof. Turski wska-

⁵ W dyskusji ten raczej nieprzejrzysty sposób rozwiązania nie był omawiany, choć jest on najszybszym sposobem prowadzącym do wyniku 13,33 m.

zywał na podobieństwo jednego zadania ze zbioru [10] do zadania 1.5. Wykaz wszystkich zadań olimpijskich z pogranicza tematycznego 1.4/1.5 i tarcia tocznego można znaleźć w pracy Molendy [11]. Najnowsze z nich to wspomniane w dyskusji zadanie doświadczalne sprzed dwóch lat [6]. Skupiając się na jego części teoretycznej należy uznać formalnie, że została ona prawidłowo rozwiązana. Niemniej jednak elementy tego zadania (które się wzajemnie znoszą) budzą wątpliwości w świetle metodyki przedstawionej w niniejszej pracy⁶. Wystarczy dodać, że to zadanie olimpijskie jest częściowo przedstawione w duchu wariantu pierwszego (rys. 1). Jednak wobec występowania tu dodatkowo siły ciężkości, zadanie to jest, być może, tematem na osobną dyskusję.

Mimo występowania zagadnienia tarcia tocznego na olimpiadach, nie zostało ono wyczerpane na dość podstawowym poziomie. Chodzi tutaj głównie o rozróżnienie kinetycznej i dynamicznej siły tarcia tocznego [6]. Bez jawnego wydzielenia takich dwóch sił, danych nieco innymi wzorami, łatwo dojść do paradoksów w szczegółowym opisie ruchu z oporami toczenia. Praca Crossa [12] potwierdza, że ten podział nie był dotychczas *explicite* rozpoznany i tym bardziej wyjaśniony. Zadania olimpijskie poprawnie postawione i rozwiązane były dodatkowo zbyt złożone, aby skonkretyzować ten podział. Dopiero zredukowanie problemu do prostego zadania maturalnego umożliwiło elementarne jego rozwiązanie w przytaczanej już pracy [6] oraz w niniejszym artykule. Warto dodać, że istota zagadnienia polega na tym, że pracę wykonuje w rzeczywistości nie żadna siła tarcia, a siła reakcji sprężystej podłoża lub ściślej jej moment. Ponadto kluczowy jest też punkt przyłożenia określonych sił.

Rys historyczny o mało znanym prawie Coulomba

Siły tarcia i oporu ruchu w znacznym stopniu przyczyniły się do spowolnienia rozwoju fizyki. To one sprawiły, że zasady dynamiki zostały odkryte dopiero na podstawie obserwacji ciał niebieskich, a nie ciał na Ziemi. Dopiero Newton na podstawie praw Keplera dla planet odkrył zasady mechaniki obowiązujące także wokół nas. Brak zrozumienia istnienia sił tarcia sprawił, że mechanika grecka z Arystotelesem na czele nie doprowadziła do odkrycia poprawnej pierwszej zasady dynamiki⁷. Współcześni fizycy często nieco krzywdząco przypisują ojcu fizyki Arystotelesowi błędne prawo ruchu, jakoby siła była proporcjonalna do prędkości ciała. Paradoksalnie inni twierdzą natomiast, że Arystoteles analizował jednak tarcie.

⁶ Chodzi o punkt przyłożenia siły oporu tocznego i o stosowanie wzoru na jej wartość dla ruchu jednostajnego, gdy tymczasem ruch jest jednostajnie przyspieszony. Te niefrasobliwości są niejako kompensowane *implicite* przez statyczną siłę tarcia. Zaś zgodnie z wariantem drugim (rys. 2) siła oporu toczenia jest siłą tarcia statycznego wymuszonego momentem siły reakcji sprężystej.

⁷ Znacznie lepiej stała natomiast statyka rozwinięta przez Archimedesesa.

W rzeczywistości za pioniera systematycznych badań tarcia uznaje się Leonarda da Vinci. Z jego notatek i rycin wynika, że praktycznie rozpoznał on podstawowe dwa prawa tarcia postępowego. Ten polihistor wiedział również, że tarcie toczne jest mniejsze od ślizgowego, co sprytnie wykorzystywał w swoich doświadczeniach [13]. Jednakże prawa tarcia postępowego pierwszy opublikował francuski uczone Amontons w roku 1699 [14], czyli 12 lat po pierwszym wydaniu *Principiów* Newtona. Jego prawa nie odnosiły się jednak do tarcia tocznego, może jedynie oprócz uniwersalnego prawa zależności wprost proporcjonalnej tarcia od siły nacisku. W każdym razie nie jest znane prawo tarcia Amontonsa, w którym by występował promień ciała toczącego się.

Przechodząc do tarcia tocznego warto zauważyć, że nawet nie wszyscy fizycy znają pojęcie wymiarowego współczynnika tarcia tocznego f o interpretacji ramienia przesuniętej siły reakcji (sprężystości podłoża lub nacisku). Zaś już prawie nikt nie wie, że powiązane z nim prawo tarcia tocznego zostało sformułowane przez Coulomba [15]. W źródłach polskojęzycznych nazwę „wzór Coulomba”, pierwszego ze wzorów (11), autorzy znaleźli jedynie w tłumaczeniu rosyjskiego kursu fizyki [16]. Szkolna encyklopedia fizyki nazywa ogólnikowo wszystkie wzory tarcia prawami Amontonsa-Coulomba [17]. Profesor Wróblewski w swojej książce [18] zaznacza zaś, że rozprawa Coulomba [15] przyniosła mu nagrodę francuskiej Królewskiej Akademii Nauk i wybór na jej członka. Jednak szczegółowych informacji o prawie Coulomba dla tarcia tocznego musimy szukać w źródłach zagranicznych [19]. Australijski fizyk i jej popularyzator Cross w publikacji [20] określenie prawo Coulomba dla tarcia tocznego umieścił w tytule.

O ile powszechnie znane prawo elektrostatyki Coulomba było wzorowane na prawie powszechnego ciężenia, to prawo tarcia tocznego jest absolutnie oryginalnym wkładem Coulomba. Tego pionierskiego wkładu w żaden sposób nie umniejsza późniejsze i alternatywne prawo Dupuita dla oporów toczenia [21], [6]. Ponadto prace Amontonsa nad tarcie ślizgowym, jakim się też zajmował Coulomb, nie zawierały prawa o oporach toczenia. Rodzi się zatem refleksja na temat ciągłości odkryć praw fizyki. W elektrostatyce Coulomb wzorował się na Newtonie. Newton w grawitacji zaś opierał się na hipotezie Hooke'a [18], którą dowodził na bazie praw Keplera. Natomiast w kwestii tarcia Coulomb rozwijał prace Amontonsa, ale odkrył samodzielnie unikalne prawo tarcia tocznego.

Dalej niż Coulomb

Prawo Coulomba w postaci (11) nie wyczerpało zagadnienia jeszcze na bardzo ogólnym i podstawowym poziomie. Otóż wzór (11) jest słuszny dla ruchu jednostajnego, a przy swobodnym hamowaniu oporami toczenia powinno się stosować wzór (10). Fakt ten jest w zasadzie *implicite* znany, co pokazuje np. rozwiązanie zadania olimpijskiego z 1977 czy nowsza praca Crossa z 2017

roku, który podnosi ten problem [12]⁸. Oba wzory na tarcie toczne wynikają z momentu przesuniętej siły reakcji sprężystej podłoża S :

$$M_f = f \cdot S = f \cdot F_n \quad (13)$$

gdzie: M_f – efektywny moment tarcia tocznego, f – współczynnik tarcia tocznego o wymiarze długości, F_n – składowa normalna całkowitej siły dociskającej ciało do podłoża (w zadaniu 1.4 równa ciężarowi mg). Wzór ten stanowi w powyższym sensie najogólniejszy współczesny opis zagadnienia tarcia tocznego. Mimo iż przy pewnych dodatkowych założeniach o punkcie przyłożenia siły tarcia implikuje on wzory (10) i (11), to jednak nie definiuje ich *explicite* oraz ich nie interpretuje. Takie definicje i interpretacje zostały podane w pracy [6]. Mają one następującą postać:

$$F_{op\ kin} \equiv f \left(\frac{\partial T}{\partial f} \right)_a = \frac{f}{r} F_n \quad (14)$$

$$F_{op\ dyn} \equiv f \left(\frac{\partial T}{\partial f} \right)_F = \frac{1}{\alpha + 1} \frac{f}{r} F_n \quad (15)$$

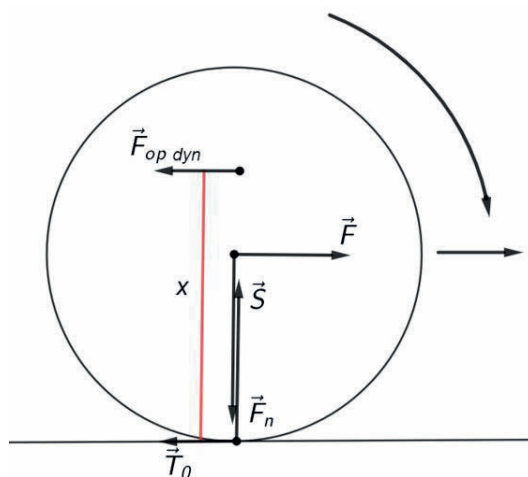
gdzie: $F_{op\ kin}$ – kinematyczna siła oporu tocznego działająca w ruchu jednostajnym, $F_{op\ dyn}$ – dynamiczna siła oporu tocznego działająca przy swobodnym zwalnianiu ciała, α – współczynnik z momentu bezwładności (1/2 dla walca, 2/5 dla kuli). Wzory te w liceum mogą wyglądać groźnie, ale w rzeczywistości pochodne cząstkowe wyznaczają jedynie współczynniki kierunkowe odpowiednich funkcji liniowych. Pochodne zwyczajne (nie cząstkowe) obecnie są w programie matematyki rozszerzonej. Formuła wzorów (14), (15) została podyktowana analogią matematyczną w definiowaniu dwóch rodzajów ciepła molowego C_p , C_V za pomocą entropii jednego mola gazu. Okazuje się zatem, że niektóre charakterystyki zjawisk, takie jak opór tocznienia czy ciepło molowe, mogą zależeć od sposobu realizacji procesu fizycznego. Dyskusja z niniejszej pracy rzuciła nowe światło na to zagadnienie. Chodzi o wariant z rys. 3, który w sposób równoważny opisuje dynamiczną siłę oporu tocznienia (15). W tym wariantcie cel jest osiągnięty nie poprzez przesunięcie siły reakcji sprężystej o f , ale poprzez podniesienie punktu przyłożenia siły oporu o x ($1,5r$ dla walca i $1,4r$ dla kuli). Zabieg ten umożliwia przestrzenne odróżnienie siły oporu tocznienia od siły zwykłego tarcia, która przyłożona jest do punktu styczności ciała z podłożem. Fenomen pomysłu opiera się na tym, że odpowiedni punkt przyłożenia siły oporu zapewnia zgodną zmianę ruchu postępowego i obrotowego przy braku poślizgu. Wariant z rys. 3 można łatwo uogólnić, uwzględniając

⁸ Praca Crossa opublikowana 19.06.2017 r. nie była jeszcze znana autorom pracy [6] zgłoszonej 31.08.2017 r. Niemniej jednak ta druga praca jest bardziej wyczerpująca, podczas gdy pierwsza tylko sygnalizuje zagadnienie.

dotychczasową siłę napędową F . Wymaga to jednak dołożenia zwykłej statycznej siły tarcia T_0 (rys. 4). W sytuacji, gdy siła napędu podtrzymuje ruch jednostajny ($a = 0$) zachodzi relacja:

$$F_{op\ kin} = F_{op\ dyn} + T_0 \quad (16)$$

Wzór ten w analogii termodynamicznej odpowiada prawu Mayera ($C_p = C_v + R_g$). Pełnię analogii zakłóca tutaj jedynie brak uniwersalnej stałej typu stała gazowa R_g , której miejsce zajmuje siła tarcia statycznego T_0 .



Rys. 4. Alternatywny, ale równoważny ogólny opis tarcia tocznego polegający na podniesieniu o x dynamicznej siły tarcia przy braku przesuwania siły reakcji sprężystej o f . Opis ten geometrycznie uplastycznia podział na dynamiczną siłę oporu względem wypadkowej kinetycznej siły oporu

Omawiany podział tarcia tocznego na kinematyczne i dynamiczne naturalnie przywołuje podział tarcia postępowego na statyczne i kinematyczne. Pojawia się więc pytanie, czy istnieje pojęcie statycznej siły tarcia tocznego? Tak, niewątpliwie takie pojęcie ma sens i bynajmniej nie chodzi o T_0 . Niezależnie od tego na ile takie pojęcie jest ugruntowane to warto określić je *explicite*⁹:

$$F_{op\ st} \leq \frac{f_{st}}{r} F_n \quad \text{lub} \quad M_{f_{st}} \leq f_{st} \cdot F_n \quad (17)$$

gdzie: $F_{op\ st}$ – siła oporu utrzymująca w spoczynku ciało, które próbuje wprawić w ruch toczny bez poślizgu zewnętrzna siła przyłożona w środku masy;

⁹ Pojęcie to można spotkać w kontekście metody pomiaru tarcia tocznego, np. na etapie wstępnym XXXI OF 1981/1982.

f_{st} – wymiarowy współczynnik statycznego oporu toczenia ($f_{st} > f$). Można teraz uporządkować malejąco rozważane siły oporu toczenia:

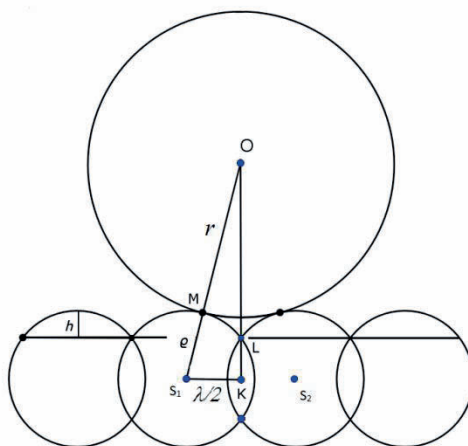
$$F_{op\ st}^{\max} > F_{op\ kin} > F_{op\ dyn} \quad (18)$$

Tę relację można przepisać dla trzech wymiarowych współczynników tarcia tocznego¹⁰:

$$f_{st} > f_{kin} \equiv f > f_{dyn} \equiv \frac{f}{\alpha + 1} \quad (19)$$

Gdyby te współczynniki podzielić przez r powstałyby bezwymiarowe współczynniki tarcia tocznego $\mu_{st} > \mu_{kin} > \mu_{dyn}$. W tych nierównościach tkwi nawet pewna logiczna reguła. Otóż im bardziej sytuacja jest statyczna tym siły oporu mogą być większe. W ten sposób spoczynek jest bardziej statyczny od ruchu jednostajnego, a ten z kolei od ruchu opóźnionego. To ostatnie stwierdzenie bazuje na traktowaniu ruchu jednostajnego w kategoriach stacjonarnych ($v = \text{const}$). Oczywiście opisanej reguły nie należy odnosić do oporu powietrza.

Niezależnym od podziału sił tarcia tocznego zagadnieniem jest kwestia, czy wymiarowy współczynnik tarcia f zależy od promienia r ciała toczącego się. Według oryginalnego prawa Coulomba jest on stały, a według prawa Dupuita jest on wprost proporcjonalny do pierwiastka z r .



Rys. 5. Geometryczny model „kocich łbów” tarcia tocznego dla dużych kulek zgodny z prawem Coulomba, a dla małych – bardziej od niego racjonalny (dla $r < f$)

¹⁰ Warto zauważyć, że w dyskusji zadania maturalnego współczynnik f_{dyn} został obliczony w (11) jako f' .

Badania doświadczalne przeprowadzone przez autorów dla kulek (nie walców) doprowadziły do sformułowania modelu „kocich łbów”, który asymptotycznie jest zgodny z prawem Coulomba:

$$f(r) = \frac{r}{r + \rho} \cdot \frac{\lambda}{8} \approx \frac{\lambda}{8} \quad (20)$$

gdzie: ρ – promień nierówności powierzchni (np. kamienia brukowego), λ – odległość sąsiednich zaokrąglonych nierówności powierzchni (np. kamieni brukowych). Ideę modelu „kocich łbów” najlepiej ilustrują rys. 5. Warto dodać, że gdyby „kocie łby” były ostro zakończone, to współczynnik f we wzorze (20) byłby dwa razy większy, co i tak stanowiłoby połowę jego pozornej statycznej wartości $\lambda/2$. Za pierwszy czynnik $1/2$ odpowiada zaokrąglenie „kociego łba”, a drugi czynnik $1/2$ można zinterpretować uśrednianiem po czasie punktu styczności ciała z nierównością podłoża.

Źródła

- [1] <https://www.pressreader.com/poland/gazeta-wyborcza/20080517/281565171498987>
- [2] <http://www.rp.pl/artukul/135001-Blad-na-maturze-z-fizyki-.html>
- [3] http://www.wiadomosci24.pl/artukul/matura_z_fizyki_jest_blad_w_kluczu_66624.html
- [4] <https://wiadomosci.wp.pl/legutko-w-rozwiazaniu-zadania-maturalnego-z-fizyki-nie-ma-bledu-6037545483048065a>
- [5] LXV Olimpiada fizyczna (2015/2016), *Wyznaczenie współczynnika tarcia tocznego stalowej kulki na gumowej równi pochyłej oraz momentu bezwładności kulki*, stopień II, część doświadczalna, <http://www.kgof.edu.pl/archiwum/65/>
- [6] Koczan G., Ziomek J. (2017), *Badanie zależności tarcia tocznego od promienia kulki łożyskowej*, Przegląd Mechaniczny 1: 21–26
- [7] Kalisz J., Massalska M., Massalski J.M. (1980) (1987) (w. XI, XII), *Zbiór zadań z fizyki z rozwiązaniami*, PWN, Warszawa: zad. 2.317
- [8] XXVII Olimpiada fizyczna (1977/1978), *Ruch kulki na równi z uwzględnieniem tarcia potoczystego i posuwistego*, stopień I, zadanie teoretyczne T1, www.of.szc.pl (zadanie, rozwiązanie)
- [9] XXVII Olimpiada fizyczna (1977/1978), *Opis ruchu kulki po poziomym stole z uwzględnieniem tarcia posuwistego i potoczystego*, stopień III, zadanie teoretyczne T2, www.of.szc.pl (zadanie, rozwiązanie – patrz „Spadające stożki”)
- [10] Blinowski J., Trylski J. (1973), *Fizyka dla kandydatów na wyższe uczelnie*, PWN, Warszawa: 147, zad. 5.2
- [11] Molenda T.M. (2016), *Prędkość kulki staczającej się z równi pochyłej – Zadanie z XXI Olimpiady fizycznej 1971/1972*, Foton 132: 50–56
- [12] Cross R. (2017), *Origins of rolling friction*, Physics Education 52/5

- [13] Hutchings I.M. (2016), *Leonardo da Vinci's studies of friction*, *Wear* 360–361, 51–66
- [14] Amontons G. (M.) (1699), *De la resistance cause dans les Machines, tant par les frottemens des parties qui les composent, que par roideur des cordes qu'on y employe, la maniere de calculer l'un l'autre* (O oporze wytwarzanym w maszynach, zarówno poprzez pocieranie ich części, jak i przez sztywność lin w nich używanych oraz sposoby jego obliczania), *Memoires de l'Academie Royale*
- [15] Coulomb C.A. (1785), *Théorie des machines simples en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages* (Teoria maszyn prostych z naciskiem na tarcie ich części i sztywność liny), *Mém. des Mith. Phys.*: 161–342
- [16] Jaworski B., Dietlaf A., Miłkowska L., Siergiejew G. (1984), *Kurs fizyki, Tom 1, Mechanika, podstawy fizyki cząsteczkowej i termodynamiki*, PWN, Warszawa
- [17] Januszajtis A., Langer J. (1987), *Fizyka – ilustrowana encyklopedia dla wszystkich*, WNT, Warszawa
- [18] Wróblewski A.K. (2007), *Historia fizyki*, PWN, Warszawa: 121–127, 265
- [19] Kragelskii I.V., Dobychin M.N., Komalov V.S. (1982), *Friction and wear – calculation methods*, Pergamon Press
- [20] Cross R. (2016), *Coulomb's Law for rolling friction*, *Am. J. Phys.* 84(3): 221–230
- [21] Dupuit A.J.E.J. (1837), *Essai et expérience sur le tirage des voitures et sur le frottement de seconde espèce* (Podsumowanie pracy na temat trakcji pojazdów i tarcia drugiego rzędu), *C. R. Aca. Sci.* 9: 659–700, 779