

Wyprowadzanie promieniowania Hawkinga

Część I. Grawitacja i termodynamika czarnych dziur

Grzegorz Koczan¹

Wydział Technologii Drewna SGGW,
Katedra Nauki o Drewnie i Ochrony Drewna, Katedra Fizyki

Sądzę, że to ważne, by naukowcy wyjaśniali, na czym polega ich praca.
Stephen Hawking

Na okoliczność śmierci wielkiego astrofizyka autor postanowił w sposób elementarny wyprowadzić entropię i temperaturę czarnych dziur bez stosowania kwantowej teorii pola, teorii strun i cząstek o ujemnej energii, a nawet bez liczb zespolonych. Pierwsza część stanowi przygotowanie gruntu geometrycznego i termodynamicznego dla tego śmiałego celu. Ponadto część ta zawiera wstępne dwa wyprowadzenia heurystyczne promieniowania czarnych dziur: fenomenologiczno-termodynamiczne oraz półklasyczne.

Wstęp

W trzecim miesiącu bieżącego roku dnia 14 (w notacji amerykańskiej $3,14 \approx \pi$) zmarł legendarny astrofizyk Stephen Hawking. Data jego śmierci zbiegła się z datą dzienną urodzin Einsteina. Natomiast data urodzin Hawkinga przypadła co do dnia 300 lat po śmierci Galileusza i co do roku 300 lat po urodzinach Newtona² oraz 399 lat po śmierci Kopernika. Hawking przeżył pełne 76 lat, z czego 55 lat z diagnozą choroby stwardnienia zanikowego bocznego. Choroba całkowicie sparaliżowała ruchowo uczonego, włącznie z narządem mowy, ale nie zaatakowała mózgu [1].

Ceremonia pogrzebowa Stephena Hawkinga odbyła się 31 marca w Cambridge. Jednak ostatecznie prochy Hawkinga zostały 15 czerwca złożone w krypcie obok grobu Newtona w Opactwie Westminsterskim w Londynie. Na tej krypcie umieszczono wzór opisujący największe naukowe dokonanie Hawkinga. Pierwotnie miał być to dokładny wzór na entropię S czarnych dziur:

$$S = \frac{\pi k_B c^3}{2hG} A = \frac{k_B c^3}{4\hbar G} A \quad (0)$$

gdzie: A – pole powierzchni horyzontu czarnej dziury, k_B – stała Boltzmanna, c – prędkość światła w próżni, h – stała Plancka, G – stała grawitacji,

¹ gkoczan@fuw.edu.pl

² Przyjmując grudniową, a nie styczniową datę urodzin Newtona.

$\hbar = h / (2\pi)$ – kreślona stała Plancka (stała Diraca). Ostatecznie jednak na krypcie Hawkinga znalazł się wzór na temperaturę T_H czarnej dziury (rys. 1):

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B} \cdot \frac{1}{M}, \quad (1)$$

która jest odwrotnie proporcjonalna od jej masy M . Źródła internetowe podawały, że wybór wzoru (0) spośród formuł na entropię i temperaturę Hawkinga zadeklarował w jednym z wywiadów w roku 2002 z okazji 60. urodzin. Taki wybór mógł być podyktowany dwoma aspektami. Po pierwsze wzór na temperaturę czarnych dziur był równoważny formułom uzyskanym przez innych uczonych w kontekście promieniowania Unruha [2]. Zaś dla entropii Hawking uściślił wartość stałej względem heurystycznego wyniku Bekensteina. Po drugie Hawking pragnął nawiązać do największego fizyka statystycznego Ludwiga Boltzmana zajmującego się termodynamiką. Na grobie Boltzmana umieszczony jest wzór na entropię w ujęciu stanów mikroskopowych, który zawiera jego stałą.



Rys. 1. Tablica krypty z prochami Hawkinga znajdująca się na posadzce w Opactwie Westminsterskim w Londynie, z wzorem (1) na temperaturę czarnej dziury (<https://i.redd.it/xrqrp97jq0511.jpg>, garfton)

W analogii do stałej Boltzmana wprowadźmy na cześć Hawkinga stałą Hawkinga k_H , która uprości wzór na entropię czarnej dziury³:

$$k_H := \frac{S}{A} = \frac{k_B c^3}{4\hbar G} = 1,321 \cdot 10^{46} \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{K}} \quad \Leftrightarrow \quad S = k_H A =: S_H \quad (2)$$

³ Stałe te związane są nawet prostą zależnością $k_B = 4l_p^2 k_H$ zawierającą długością Plancka l_p .

Przykładowo wspomniany już Bekenstein próbował wcześniej określić tą stałą, ale podał ponad 9 razy mniejszą wartość:

$$k_{\text{H-Bekenstein}} = \frac{\ln 2}{2\pi} k_{\text{H}} \approx 0,1103 k_{\text{H}} \approx \frac{1}{9} k_{\text{H}} \quad (3)$$

Mimo ważnej roli entropii ostatecznie na grobie Hawkinga znalazł się jednak wzór na temperaturę. Prawdopodobnie zdecydował tu czynnik prostoty pojęcia temperatury względem abstrakcyjnej entropii. W dobrej wierze można założyć, że właśnie taka była ostatnia wola zmarłego. Jednak podczas wyprawień warto będzie zastanowić się czy wybór pomiędzy entropią i temperaturą został dokonany trafnie czy też nie stanowi to szczególnej różnicy.

Hawking w swoim życiu pokazał, że o trudnej fizyce można mówić prostym językiem bez zaawansowanego aparatu matematycznego [3]. Niniejsza praca w zamierzeniu jest realizacją tej idei mistrza, przy czym chodzi w niej nie tylko o popularnonaukowe omówienie zagadnienia, ale także o wyprowadzenie możliwie najprostszym sposobem parametrów promieniowania czarnych dziur. Czy uda się osiągnąć ten trudny cel czytelnik przekona się czytając obie części artykułu. Warto zaznaczyć, że nie wymaga on znajomości ogólnej teorii względności (OTW) i w ogóle nie zahacza o kwantową teorię pola. W zasadzie wystarczy tutaj znajomość grawitacji Newtona (GN), elementów szczególnej teorii względności (STW), podstaw termodynamiki, a w drugiej części kwantyzacji momentu pędu oraz podstaw fizyki statystycznej. W ramach tego ostatniego pojawia się jedynie nieco bardziej zaawansowana kombinatoryka. Natomiast osoby mniej zainteresowane samymi mnożnikami bezwymiarowymi jak w (3) mogą się ograniczyć do termodynamiki fenomenologicznej i wzoru $E = Mc^2$ oraz do aspektów jakościowych przedstawianych metod wyprowadzeń elementarnych.

1. Geometria i grawitacja czarnej dziury

Co to jest czarna dziura i co ją określa? Generalnie czarna dziura to takie ciało niebieskie⁴, którego grawitacja jest tak duża, że z pewnego jej otoczenia nie jest w stanie wydostać się w klasycznym rozumieniu nawet światło [4]. Powierzchnię graniczną nazywamy horyzontem czarnej dziury. Istnienie takich obiektów rozważał już w roku 1796 znany francuski uczony Pierre Laplace⁵. Temu uczonemu tradycyjnie przypisuje się prostą definicję określającą horyzont czarnej dziury:

⁴ Jeżeli nie będziemy się zbytnio przywiązywać do kolorów (czarnego, szarego itd.) łatwiej zrozumiemy, że promieniowanie czarnych dziur nie stoi w sprzeczności z fizyką, a wręcz jest przez nią wymuszone.

⁵ Według źródeł angielskich tuzin lat wcześniej ideę tę podał John Michell.

DEFINICJA 1. („słaba” definicja horyzontu nierotującej, nienaładowanej czarnej dziury)

Horyzont czarnej dziury to taka powierzchnia zamknięta ją otaczająca, z wnętrza której ze względu na grawitację nie może się wydostać nawet światło. W uproszczeniu na tej powierzchni druga prędkość kosmiczna (prędkość ucieczki) jest równa c .

Z drugiego zdania definicji łatwo możemy wyliczyć promień R_S czarnej dziury o masie M :

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R_S}} = c \quad \Leftrightarrow \quad R_S = \frac{2GM}{c^2}. \quad (4)$$

Szczęśliwy przypadek sprawił, że tak obliczony formalny promień pokrywa się idealnie z promieniem wynikającym z rozwiązania Szchwarzschilda równań Einsteina dla pola grawitacyjnego [5]. Warto jednak wiedzieć, że promień Szchwarzschilda R_S ma więcej wspólnego z obwodem horyzontu lub jego powierzchnią, aniżeli z jej nietrywialną w OTW rzeczywistą średnicą⁶. Zatem prawdziwe są tutaj euklidesowe wzory na powierzchnię A i obwód l horyzontu czarnej dziury:

$$A = 4\pi R_S^2, \quad l = 2\pi R_S. \quad (5)$$

Analogiczne relacje zachodzą dla dowolnego parametru radialnego $r \geq R_S$, które w istocie definiują tę współrzędną. Można zatem twierdzić, że w sensie wewnętrznej geometrii dwuwymiarowa powierzchnia horyzontu (lub dowolna powierzchnia $r = \text{const}$) ma te same własności co zwykła sfera zanurzona w trzech wymiarach⁷. Jednakże otoczenie horyzontu wzdłuż współrzędnej radialnej $r = R_S \pm \Delta r$ posiada już nietrywialną geometrię nieeuklidesową [6].

Mimo pozornych sukcesów definicja 1 nie jest pozbawiona oczywistych wad w sensie newtonowskim. Otóż II prędkość kosmiczna równa c nie oznacza w żadnym wypadku pełnego uwięzienia światła w obrębie tak rozumianego horyzontu. Ona jedynie nie pozwala na ucieczkę światła znajdującego się pod horyzontem do nieskończoności, ale w zasadzie dopuszcza na oddalenie się takiego światła dowolnie daleko. Wobec tego rozważmy pozornie silniejszą definicję:

⁶ W niniejszej pracy nie ma konieczności opisu geometrii wnętrza horyzontu, choć taki opis jest możliwy [6].

⁷ Fakt ten przypomina ogólniejszą o jeden wymiar milenijną hipotezę Poincarego udowodnioną przez Perelmana, który nie przyjął nagród 1 000 000 \$ oraz 13 400 \$ za rozwiązanie problemu tysiąclecia.

DEFINICJA 2. („silna” definicja „małego” horyzontu i/lub sfery fotonowej)
Mały horyzont czarnej dziury to taka powierzchnia zamknięta ją otaczająca, na której pierwsza prędkość kosmiczna (prędkość orbit kołowych) jest równa c . Innymi słowy powierzchnia ta określa sferę fotonową.

W sensie fizyki newtonowskiej definicja ta prowadzi do dwukrotnie mniejszego promienia niż pierwsza definicja:

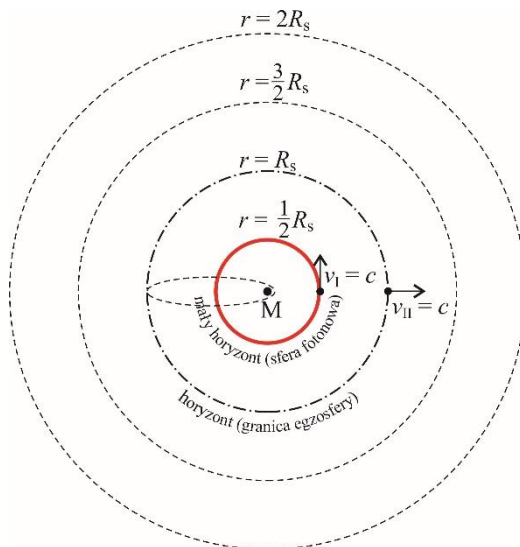
$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_s}} = c \quad \Leftrightarrow \quad R_0 = \frac{GM}{c^2} = \frac{1}{2} R_s. \quad (6)$$

W ramach OTW definicja 2 prowadzi do promienia sfery fotonowej równej $1,5R_s$ (patrz lemat 1) [7]. Zatem opis w kategoriach GN i OTW daje tutaj inne wartości, choć odległość sfery fotonowej od horyzontu w obu przypadkach wynosi $0,5R_s$, ale znajdują się one po obu jego stronach.

W ramach GN można nieco zunifikować horyzont i egzosferę wprowadzając rozszerzone rozumienie definicji 2:

DEFINICJA 2.1. (rozszerzenie silnej definicji horyzontu/egzosfery czarnej dziury)

Górna granica egzosfery⁸ (horyzontu według GN) czarnej dziury to taka powierzchnia zamknięta, która ogranicza wszystkie orbity eliptyczne o energii równej energii orbit kołowych, o których mowa w definicji 2.



Rys. 2. Struktura geometryczna czarnej dziury w opisie grawitacji newtonowskiej (GN). Występujące tutaj dwa typy horyzontów (mały oraz zwykły) dzielą przestrzeń na obszary określonego rodzaju uwięzienia światła, ale nie stanowią dla niego fizycznej bariery. Dwa największe okręgi zostały narysowane w celu porównania z modelem ogólnej teorii

⁸ Egzosfera to nie to samo co ergosfera, którą wprowadza się dla rotującej czarnej dziury i która nie jest *de facto* sferyczna (*exosphere vs ergosphere*).

W newtonowskim zagadnieniu Keplera ruchu w polu grawitacyjnym wykazuje się, że duża oś orbity zależy odwrotnie proporcjonalnie od energii całkowitej E ciała na orbicie [8]:

$$r_{\max} + r_{\min} \propto \frac{1}{E} \quad (7)$$

gdzie: r_{\max} – odległość perycentrum orbity od źródła pola, r_{\min} – odległość apocentrum orbity od źródła pola. Porównując skrajną orbitę, dla której r_{\min} dąży do zera z orbitą kołową o tej samej energii możemy obliczyć supremum r_{\max} dla orbit eliptycznych:

$$r_{\max} + 0 = R_0 + R_0 \quad \Leftrightarrow \quad r_{\max} = 2R_0 = R_S \quad (8)$$

W ten sposób w ramach fizyki newtonowskiej definicja 2.1 ponownie określa dokładnie promień Schwarzschilda podobnie jak definicja 1 (rys. 2). W przypadku OTW sytuacja jest bardziej złożona i potrzebny będzie:

LEMAT 1. (o orbitach fotonowych czarnej dziury według OTW)

W polu grawitacyjnym (nierotującej i nienaladowanej) czarnej dziury jedynymi stacjonarnymi ($r \in [r_{\min}, r_{\max}]$, $r \geq R_S$) orbitami fotonowymi bez silnej⁹ niestabilności są orbity kołowe o promieniu $1,5 R_S$. Innymi słowy dla fotonów nie występują orbity eliptyczne z precesją, zaś jedyne możliwe stacjonarne (choć słabo niestabilne) orbity kołowe tworzą sferę fotonową.

Dowód. Równanie toru cząstki w czasoprzestrzeni Schwarzschilda ma postać [7], [9]:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{E^2}{L^2 c^2} r^4 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \left(\frac{m_0^2 c^2}{L^2} r^4 + r^2\right) \quad (9)$$

które od wersji nierelatywistycznej różni się w istocie jedynie ostatnim członem $R_S r$, jaki wychodzi po wymnożeniu nawiasów¹⁰ [10]. W równaniu występuje: φ – współrzędna kątowna (unormowana do 2π), E – całkowita energia mechaniczna cząstki ($E \neq 0$)¹¹, L – moment pędu cząstki ($L > 0$), m_0 – masa spoczynkowa cząstki. Okazuje się, że nie trzeba wcale rozwiązywać równania różnic-

⁹ Odrzucenie silnej niestabilności dookreślonej w dowodzie eliminuje нефизyczne rozwiązania matematyczne orbit kołowych, które są styczne do fizycznych orbit niestacjonarnych i niekołowych.

¹⁰ Po przekształceniach tylko ten człon zależy od prędkości światła i jest rzędu $1/c^2$.

¹¹ Kłopotliwy przypadek $E = 0$ i $r = R_S$ fotonów na horyzoncie można pominąć ze względu na jednostronną silną niestabilność tych orbit (takie fotony krótko krążą, a następnie wpadają do czarnej dziury).

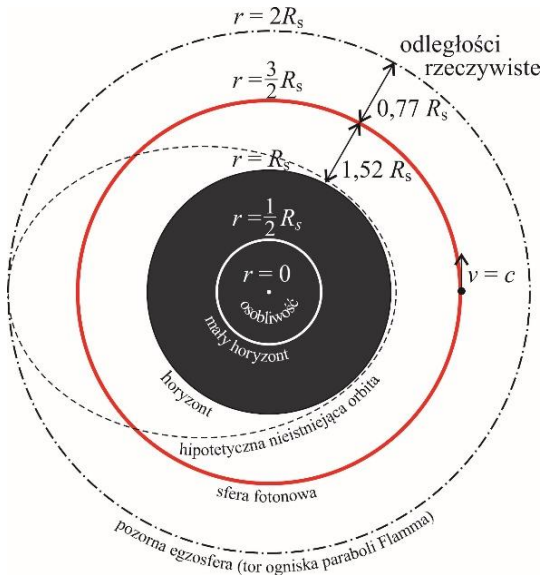
kowego, ale wystarczy dla $m_0 = 0$ rozwiązać następujące równanie wielomianowe:

$$0 = W(r) = \frac{1}{r_0^2} r^3 - r + R_s \geq 0, \quad (10)$$

które zostało względem (9) dodatkowo podzielone przez r i zapisane za pomocą parametru $r_0 = Lc/|E| > 0$ o wymiarze długości. Dla orbit kołowych równanie to musi mieć podwójny pierwiastek ($r_{\min} = r_{\max}$). Wiedząc, że wówczas pochodna wielomianu ma ten sam pierwiastek co wielomian dostajemy:

$$W(r) = 0, \quad W'(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3}{2}R_s, \quad r_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}R_s. \quad (11)$$

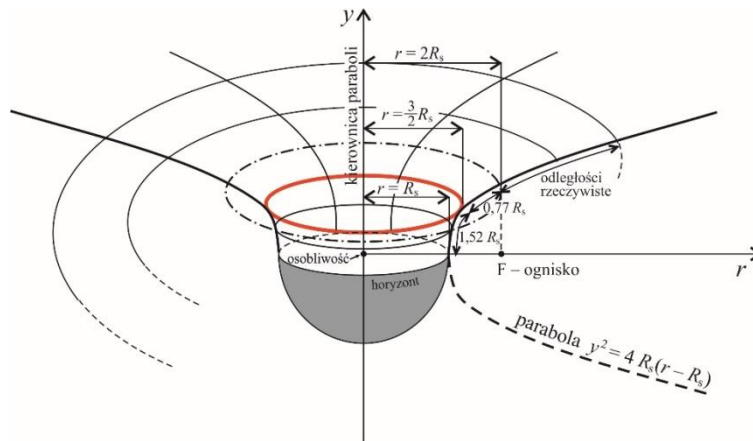
Orbita taka jest niestabilna $W''(r) > 0$, ale w słaby sposób $W'(r) = 0$. Brak istnienia innych orbit stacjonarnych ($r \in [r_{\min}, r_{\max}]$, $r \geq R_s$) wynika teraz pośrednio z faktu, że wielomian $W(r)$ ma jeden ujemny pierwiastek ($W(0) > 0$, $W(-\infty) < 0$). Zatem pomiędzy pozostałymi dwoma pierwiastkami dodatnimi r_1 i r_2 (jaki mogą jeszcze istnieć) wielomian $W(r)$ przyjmowałby wartości ujemne, co przeczyłoby nierówności (10). Natomiast gdyby promień był równy któremuś pierwiastkowi to taka pozornie kołowa orbita byłaby silnie niestabilna $W'(r_2) \neq 0$.



Rys. 3. Pierścieniowa geometryczna struktura radialna nierotującej i nienaładowanej czarnej dziury w opisie OTW. Okrąg najmniejszy koresponduje tutaj z horyzontem szybko rotującej czarnej dziury (i z małym horyzontem według GN). Okrąg największy odzwierciedla zrzutowane położenie i tor ogniska paraboli Flamma, której obrót generuje geometrię czarnej dziury. Dla cząstek nierelatywistycznych ta pierścieniowa struktura rozszerza się o okrąg $r = 3R_s$, stanowiący dla nich najmniejszą stabilną orbitę [7], [9]

Lemat powyższy wyparł pierwotnie rozważaną przez autora błędną hipotezę (rys. 3), że orbity eliptyczne sięgają sfery $r_{\max} = 2R_S$ na mocy relacji $r_{\max} + R_S = 1,5R_S + 1,5R_S$ wzorowanej na (8). Gdyby to było prawdą, egzosfera OTW byłaby czaszą kulistą, a nie jak w opisie GN pełną kulą. Wobec tego sfera o promieniu $2R_S$ jest nazwana na rys. 3 pozorną egzosferą. Nie należy jej mylić z ergosferą¹² rotującej czarnej dziury, której większa półoś stanowi dwukrotność promienia małego, a nie dużego horyzontu $2R_0 = R_S$.

Pojawia się zatem pytanie czy również w teorii Einsteina (OTW) jest jakiś analogiczny dualizm horyzontów? Okazuje się, że tak, nawet co do wartości R_0 . Otóż w przypadku rotujących czarnych dziur występują w ogólności dwa rzeczywiste horyzonty zdarzeń. Przy pewnej wartości krytycznej rotacji horyzonty te zlewają się i tworzą mały horyzont o promieniu R_0 . Przez horyzont rzeczywisty w OTW rozumie się powierzchnię, na której występują pewnego rodzaju słabe i usuwalne osobliwości matematyczne, innymi słowy nieskończoności. Przykładowo formalnie na powierzchni horyzontu czas ulega nieskończonej dylatacji, zaś odległości radialne nieskończonej kontrakcji (bez naruszenia postulatu stałości lokalnej prędkości światła c). Podobnie wartość sił grawitacji na powierzchni horyzontu dąży do nieskończoności (dla obserwatora, który próbowałby pozostać w spoczynku na horyzoncie). Natomiast osobliwości horyzontu zdają się usuwać, jeśli rozważamy obserwatora bezpowrotnie wpadającego do czarnej dziury zmierzając ku bezwzględnej osobliwości centralnej.



Rys. 4. Przedstawienie nieeuklidesowej geometrii Schwarzschilda ($y \geq 0$) czarnej dziury w zanurzeniu w zewnętrznej geometrii euklidesowej (nadprzestrzeni/hiperprzestrzeni). Jest ona wyznaczona przez obrót paraboli względem prostej zwanej jej kierownicą, co tworzy paraboloid Flamma. Skojarzenie z wrzącym kotłem horyzontu ($y \leq 0$), przedstawionym już bez ujęcia zanurzeniowego, jest tutaj jak najbardziej zamierzone

¹² Ergosfera to obszar przestrzeni, który ulega unoszeniu w wyniku rotacji całej czasoprzestrzeni.

Korespondencje między obrazami GN i OTW określa następujące:

TWIERDZENIE 1. (o logarytmicznym wydłużeniu radialnym w polu dalekim)
Rzeczywista długość $x(r)$ wzdłuż półprostej radialnej mierzona począwszy od horyzontu różni się asymptotycznie o logarytm względem parametru radialnego:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| r + R_S \ln \left(2 \sqrt{\frac{r}{R_S}} \right) - \frac{R_S}{2} - x(r) \right| = 0. \quad (12)$$

Innymi słowy rzeczywiste odległości radialne x są nieco wydłużane (lub pozorne r skracane) przez grawitację nawet daleko od jej źródła (mimo, że względne wydłużenie dąży do zera przy $r \rightarrow \infty$).

Dowód. Jakościowy sens twierdzenia najlepiej widać w ujęciu zewnętrznej geometrii zanurzeniowej w przestrzeni euklidesowej (rys. 3). Jednak formalny aspekt dowodu nie wymaga odwołania do tego zabiegu. Zgodnie z radialną metryką Schwarzschilda (i jednocześnie z długością odcinka paraboli Flamma¹³) mamy:

$$x(r) = \int_{R_S}^r \sqrt{1 + [y'(r)]^2} dr = \int_{R_S}^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{R_S}{r}}} = r \cdot \sqrt{1 - \frac{R_S}{r}} + R_S \ln \left[\sqrt{\frac{r}{R_S}} \left(\sqrt{1 - \frac{R_S}{r}} + 1 \right) \right]. \quad (13)$$

Zatem lewa strona tezy twierdzenia przyjmuje postać:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| r \cdot \sqrt{1 - \frac{R_S}{r}} - r + \frac{R_S}{2} + R_S \ln \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - \frac{R_S}{r}} + 1 \right) \right] \right|. \quad (14)$$

Łatwo zauważyć, że część logarymiczna dąży tutaj do zera ($\ln 1 = 0$). Natomiast zerowanie pierwszej części granicy wynika z rozwinięcia pierwiastka w szereg względem $1/r$.

Ponieważ odstępstwo logarymiczne jest jednym z najmniejszych możliwych, to zachodzi przybliżony:

FAKT 1. (O pozornym i racjonalnym promieniu sfery fotonowej)

Odległość sfery fotonowej według parametru radialnego od horyzontu wynosi $0,5R_S$, czyli tyle samo co jej promień w ujęciu GN określony przez definicję 2.

¹³ Na rys. 3 znajduje się równanie tej paraboli, której obrót w przestrzeni Euklidesowej (3- lub 4-wymiarowej) prowadzi do paraboloidu Flamma rekonstruującego przestrzenną część metryki Schwarzschilda.

Rzeczywista wartość tej odległości jest, z dokładnością do 2%, równa jej zewnętrznemu parametrowi radialnemu $1,5R_S$.

Dowód. Pierwsza część faktu jest oczywistą obserwacją dla wcześniej podanych wartości, a druga część wymaga zastosowania radialnej metryki Schwarzschilda (lub paraboloidu):

$$\int_{R_S}^{1,5R_S} \frac{dr}{\sqrt{1 - R_S/r}} = x(1,5R_S) \approx 1,5245R_S \quad (15)$$

Wartość ta jest większa od $1,5R_S$ jedynie o 1,63%.

W przeciwieństwie do miary pola i odległości radialnych miara objętości wymaga już istotnych przeliczników:

FAKT 2. (O objętości czaszy sfery fotonowej)

Rzeczywista objętość czaszy sfery fotonowej z dokładnością do 3% jest 2π razy większa od euklidesowej objętości kuli o promieniu Schwarzschilda R_S , a więc egzosfery w ujęciu GN. Fakt ten jest niezależny od wartości masy Schwarzschilda obejmowanej przez horyzont, a także jest niezależny od dodatkowej masy-energii sfery fotonowej.

Dowód. Objętość sfery euklidesowej wynosi:

$$\frac{4\pi}{3} R_S^3 = 4\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot R_S^3 \approx 4,18879R_S^3. \quad (16)$$

Natomiast objętość czaszy fotosfery w metryce Schwarzschilda (lub paraboloidu) wynosi:

$$4\pi \int_{R_S}^{1,5R_S} \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - R_S/r}} \approx 4\pi \cdot 2,1436R_S^3 \approx 26,94R_S^3. \quad (17)$$

Zatem stosunek relatywistycznej i nierelatywistycznej objętości „egzosfer” wynosi:

$$\frac{4\pi \cdot 2,1436R_S^3}{4\pi \cdot 1/3 \cdot R_S^3} = 6,4308 \approx 2,047\pi, \quad (18)$$

co jest większe od 2π o 2,35%. Dodatkowa masa-energia sfery fotonowej nie powinna wpływać na geometrię wewnątrz tej sfery. Wynika to z zszywania rozwiązań Schwarzschilda (paraboloidów Flamma), które spełniają pewien rodzaj prawa Gaussa dla grawitacji. Należy jednak pamiętać, że wówczas R_S nie odnosi się do masy-energii sfery fotonowej, a więc nie odnosi się do całkowitej masy czarnej dziury.

Można również odnotować prostsze i dokładniejsze spostrzeżenie:

FAKT 3. (O powierzchni sfer fotonowych oraz relacji entropii Hawkinga i Bekensteina)

Promień sfery fotonowej w opisie OTW jest 3 razy większy niż w opisie GN, co oznacza 9 razy większą powierzchnię. Ostatnia wartość z dokładnością do 1% jest równa stosunkowi entropii Hawkinga do entropii Bekensteina wynoszącemu $2\pi/\ln 2$. Fakt ten jest niezależny od wartości masy Schwarzschilda obejmowanej przez horyzont, a także jest niezależny od dodatkowej masy-energii sfery fotonowej.

Dowód. Z relacji (3) mamy:

$$\frac{k_H}{k_{H\text{-Bekenstein}}} = \frac{2\pi}{\ln 2} \approx 9,0647 \approx 9 = \frac{A_1}{A_0}, \quad (19)$$

gdzie wartości liczbowe różnią się o jedyne 0,7%.

Dotychczasowe rozważania dotyczyły głównie samej przestrzeni bez czasu i w konsekwencji nie uwzględniały (oprócz lematu 1 i definicji 2.1) efektywnej grawitacyjnej energii potencjalnej fotonów. Okazuje się, że w OTW te dwa zagadnienia są z sobą ściśle powiązane i są nazywane grawitacyjną dylatacją czasu lub grawitacyjnym przesunięciem ku czerwieni światła. Grawitacyjna dylatacja czasu w czarnej dziurze, wraz z jej strukturą pierścieniową, została obrazowo przedstawiona na pniu starej sosny z Puszczy Białowieskiej (rys. 5).



Rys. 5. Przekrój pnia drzewa może obrazować nie tylko pierścieniową strukturę czarnej dziury, ale również grawitacyjną dylatację czasu. Rdzeń to rok 0 (1768)¹⁴ wykiełkowania drzewa odpowiadający horyzontowi zdarzeń, na którym czas własny dąży do 0. Ostatni 200 rok życia drzewa (1968) odpowiada czasowi dalekiego obserwatora. Natomiast rok 116 życia drzewa (1884), w którym nastąpiło odkrycie Haberlandta z fizjologii hormonalnej drzew, odpowiada dylatacji czasu względem sfery fotonowej o czynniku 1,73 (fot. G.K., ekspozycja WL i WTD SGGW, pomysłodawca porównania: Zbigniew Karwat)

¹⁴ W tym samym roku u schyłku I Rzeczypospolitej uchwalono tzw. prawa kardynalne.

Innymi słowy foton zwiększając swoją efektywną energię potencjalną zmniejsza energię kinetyczną, czyli wydłuża swoją długość fali¹⁵. Zatem fotony promieniowane przez fotosferę ulegają jakby schłodzeniu zanim oddalą się od czarnej dziury.

OBSERWACJA 1. (O obserwowanej temperaturze widmowej fotosfery)

Jeżeli fotosfera o $r = (3/2)R_S$ ma lokalną temperaturę promieniowania cieplnego $T_{3/2}$, to daleki obserwator ze względu na grawitacyjne przesunięcie ku czerwieni będzie obserwował promieniowanie o temperaturze widmowej T_∞ , która jest $\sqrt{3}$ razy mniejsza od temperatury fotosfery:

$$T_\infty = T_{3/2} / \sqrt{3} \approx 0,57735 \cdot T_{3/2}. \quad (20)$$

Dowód. Wykorzystując fakt, że grawitacyjna dylatacja czasu ma taką samą wartość jak kontrakcja długości otrzymujemy¹⁶:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{dx}{dr} = \frac{\sqrt{dr^2 + dy^2}}{dr} = \frac{1}{\sqrt{1 - R_S/r}} = \sqrt{3} \approx 1,732. \quad (21)$$

Grawitacyjna dylatacja czasu wydłuża okres fotonów, więc zmniejsza ich częstotliwość i energię, a tym samym temperaturę. Przy czym temperatura jest tutaj rozumiana w sensie prawa Wiena (wzór 41, opisany w dalszej części artykułu).

Warto zauważyć, że analogiczna transformacja temperatury bezpośrednio z horyzontu miałyby charakter osobliwy. Mówiąc wprost, gdyby promieniowanie pochodziło tylko z horyzontu jego temperatura musiałaby być nieskończona.

OBSERWACJA 2. (O pozornej temperaturze horyzontu)

Jeżeli do dalekiego obserwatora dociera z czarnej dziury promieniowanie o niezerowej temperaturze widmowej T_∞ , którego źródłem miałby być horyzont o temperaturze T_1 , to temperatura horyzontu musiałaby być nieskończona:

$$T_1 = \lim_{r \rightarrow R_S^+} T(r) = +\infty. \quad (22)$$

Dowód. Wykorzystując przelicznik (21) otrzymujemy:

$$T_1 = \lim_{r \rightarrow R_S^+} \frac{dt}{d\tau} \cdot T_\infty = \lim_{r \rightarrow R_S^+} \frac{T_\infty}{\sqrt{1 - R_S/r}} = +\infty, \quad (23)$$

co jest zgodne z ideą horyzontu czarnej dziury, że nic o skończonej energii nie jest w stanie wydostać się bezpośrednio z jego powierzchni.

¹⁵ Źródło [7] podaje explicite podział na energię kinetyczną i potencjalną słuszny również dla fotonów.

¹⁶ Fakt ten w istocie rozszerza przestrzenną metrykę paraboloidu Flamma do pełnej metryki Schwarzschilda.

W ujęciu kwantowo-polowym promieniowanie jest zjawiskiem globalnym, choć zgodnie z Hawkingiem jego intensywność jest największa w otoczeniu horyzontu (ze względu na polaryzację kwantowej próżni). W każdym razie rozważanie promieniującej sfery fotonowej rozwiązuje problem osobliwej temperatury horyzontu. Warto dodać, że temperatura Hawkinga jest w zamyśle temperaturą obserwowalną $T_H = T_\infty$, ale niekoniecznie odniesioną do fotosfery. Obserwacje podobne do 1 i 2 będą jeszcze formułowane w następnym rozdziale.

Podsumowując, należy stwierdzić, że nierotująca i nienaładowana czarna dziura określona jest jedynie przez swoją masę M , która determinuje parametr jej promienia horyzontu R_s , jego powierzchnię A oraz rozmiary sfery fotonowej (i/lub egzofery). Ponadto między wielkościami geometrycznymi w ujęciu GN i OTW zachodzą proste proporcje, które mogą być kluczowe dla określenia dokładnej wartości entropii czarnej dziury. Nazwijmy je współczynnikami korekcyjnymi dla geometrii nieeuklidesowej względem euklidesowej. Przeliczniki są również niezbędne dla temperatur w OTW.

2. Termodynamika fenomenologiczna czarnych dziur

W zasadzie można powiedzieć, że istota wstępnego wyprowadzenia heurystycznego promieniowania czarnej dziury przedstawione przez Hawkinga [11] była względnie prosta i nieobszerna. Zrozumienie tego faktu ułatwia syntetyczna praca Page'a [12]. Oczywiście to wyprowadzenie nie stanowiło dowodu procesu promieniowania, ani nawet nie dowodziło wyboru stałych bezwymiarowych tam użytych. Jednak był to fenomen, że w dość prosty sposób zapisane wzory zostały potwierdzone później (a może uprzednio) przez Hawkinga już ekstremalnie trudnymi rachunkami kwantowej teorii pola w czasoprzestrzeni zakrzywionej [13]. Ich trudność polegała nie tylko na konieczności użycia specjalnych matematycznych procedur przybliżonych, ale przede wszystkim na wykorzystaniu cząstek o ujemnej energii¹⁷ (i masie). W zwykłej teorii pola takie cząstki udaje się przedefiniować i interpretować jako zwykłe antycząstki lub dokonuje się separacji na dodatnie i ujemne częstotliwości (energie) w języku operatorów kreacji i anihilacji. W czasoprzestrzeni zakrzywionej (a nawet w układach nieinercjalnych) taka reinterpretacja staje się niemożliwa i rola ujemnych energii jest bardziej spektakularna. O wątpliwościach dotyczących użytych przybliżeń Hawking wspomina nawet w *Krótkiej historii czasu* [3], gdzie pisze, że zostały one rozwiane poprzez obliczenia innych uczonych. Przykłady złożoności rachunków w ramach kwantowej teorii pola w czasoprzestrzeni zakrzywionej oraz bogata bibliografia tematyki znajdują się w rozprawie [14]. Problemy koncepcyjne kwantowo-polowego wyprowadzenia Hawkinga dobrze ilustruje cytat prof. Unruha: *Derivation makes no physical sense; Mathematically correct, physical nonsense* (Wyprowadzenie nie ma sensu fizycznego; Ma-

¹⁷ W OTW inaczej niż w GN klasyczna energia mechaniczna cząstek jest nieujemna [7].

tematycznie jest poprawne, ale fizycznie jest bezsensowne). Ta nieco przejaśkrawiona opinia została wyrażona w dostępnym w sieci wykładzie wygłoszonym w 2012 roku [15]. W uproszczeniu kontekst tej wypowiedzi jest podobny do paradoksalnej obserwacji 2, którą lepiej jest zastąpić obserwacją 1.

Teraz zostanie przedstawione szczegółowo proste wyprowadzenie heurystyczne typu Hawkinga oraz jego rozwinięta modyfikacja autorska. Ponadto zostanie sformułowane stwierdzenie, z pogranicza termodynamiki i fizyki półklasycznej, ułatwiające formalnie jednoznaczne wyprowadzenie temperatury.

Pierwsza i druga zasada termodynamiki czarnych dziur i ich konsekwencje

Pochłanianie materii przez czarną dziurę ma charakter nieodwracalny, więc można oczekiwać, że da się to opisać czymś na wzór rosnącej entropii. Fakt taki odzwierciedlałby drugą zasadę termodynamiki, według której entropia układu izolowanego nie maleje. Pierwszy na to wpadł Bekenstein. Zaproponował on, że miarą entropii czarnej dziury będzie jej powierzchnia [16]. O ile masa sumaryczna układu przy wpadaniu materii do czarnej dziury zachowuje się, to powierzchnia jej horyzontu rośnie, gdyż jest proporcjonalna na mocy (2) i (3) do kwadratu masy

$$A = \frac{16\pi G^2}{c^4} M^2 \quad (24)$$

Najlepiej obrazuje to wzrost powierzchni przy uproszczonej analizie zderzenia dwóch czarnych dziur o masach M_1 i M_2 oraz powierzchniach A_1 i A_2 :

$$M^2 = (M_1 + M_2)^2 = M_1^2 + 2M_1M_2 + M_2^2 \geq M_1^2 + M_2^2 \Leftrightarrow A \geq A_1 + A_2 \quad (25)$$

W wyniku zderzenia powstaje czarna dziura o masie sumarycznej M , ale o powierzchni A większej niż sumaryczna powierzchnia zderzających się czarnych dziur. Równanie (25) ma charakter poglądowy i oczywiście nie uwzględnia emisji fali grawitacyjnej zderzenia.

Entropia proporcjonalna do powierzchni $S \propto A$ implikuje istnienie temperatury. Zgodnie z termodynamiczną relacją przyrostów entropii, ciepła-energii, pracy oraz temperatury, podawaną często jako definicja entropii [5], zachodzi:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dE - \delta W}{T} = \frac{dE + pdV}{T} \Rightarrow \frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{V=\text{const}}. \quad (26)$$

W równaniu po lewej stronie zastosowano I zasadę termodynamiki z uwzględnieniem wzoru na pracę, znanego w szkole z przemiany izobarycznej¹⁸.

¹⁸ Rozpisana formuła na różniczkę entropii jest słuszna nawet dla procesów nieodwracalnych, mimo że wówczas formuły na samo ciepło i pracę przestają obowiązywać (np. przy rozprężaniu w próżnię). Brak znajomości i zrozumienia tych faktów prowadzi często do nieporozumień.

Hawking uprościł tę relację jakby pomijając pracę¹⁹:

$$\delta Q = dE = d(Mc^2) = T_H dS \quad (27)$$

gdzie: δQ – porcja ciepła, dE – przyrost energii całkowitej, T_H – temperatura Hawkinga zdefiniowana (ale jeszcze nie obliczona) powyższą formułą. Zróżniczkowanie wzoru (24) prowadzi do:

$$dA = \frac{16\pi G^2}{c^4} 2M dM = \left(\frac{4G}{c^3}\right)^2 2\pi M d(Mc^2) \quad (28)$$

Stąd już można obliczyć różniczkę energii-masy i starać się nadać jej symetryczną postać:

$$d(Mc^2) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{\propto T_H} \cdot \underbrace{\frac{1}{M}}_{\propto T_H} \cdot \underbrace{\frac{c^3}{4G}}_{\propto T_H} \cdot \underbrace{\frac{c^3}{4G}}_{\propto dS} dA. \quad (29)$$

Symetrię zapisu prawej strony psuje tutaj masa, która jako parametr, a nie stała, powinna wchodzić do temperatury. Bardziej dowolne jest zatem położenie stałej 2π , ale jak się okaże, lokalizacja współczynnika liczbowego na początku jest tutaj dobrym wyborem. Aktualny kandydat na temperaturę ma wymiar częstotliwości 1/s, więc powinien być jeszcze przemnożony przez stałą o wymiarze iloczynu czasu i temperatury [s·K]. Taką własność ma iloraz stałej Plancka (np. kreślonej) i stałej Boltzmanna:

$$d(Mc^2) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{c^3}{4G}}_{=T_H} \cdot \underbrace{\frac{\hbar}{k_B} \cdot \frac{k_B c^3}{4G}}_{=dS} dA. \quad (30)$$

W ten sposób otrzymano poprawną wartość temperatury Hawkinga (w sensie zgodności z Hawkingiem), a po opuszczeniu różniczki również entropii czarnej dziury:

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B} \cdot \frac{1}{M}, \quad S = \frac{k_B c^3}{4\hbar G} A = S_H \quad (31)$$

Przedstawione heurystyczno-fenomenologiczne wyprowadzenie wzorowane na wstępnym wyprowadzeniu Hawkinga nie jest numerycznie jednoznaczne. Przykładowo zamiana w (30) kreślonej stałej Plancka na zwykłą spowodowałoby zmniejszenie entropii 2π razy i zwiększenie temperatury tyle samo razy. Taka zmiana była równoważna przetruceniu współczynnika $1/(2\pi)$ z temperatury do entropii. Okazuje się, że takie surowe (nieunormowane) wartości entropii i tem-

¹⁹ Przejście z różniczki niepełnej (formy różniczkowej dla przyrostu ciepła) do pełnej różniczki energii jest frapujące. Precyzyjnie określając to Hawking w miejsce przyrostu pracy rozważał przyrosty momentu pędu i ładunku, co nie stanowi wiernej analogii fizycznej i nie ma zastosowania dla nierotującej i nieładowanej czarnej dziury.

peratury pojawią się w II części niniejszej pracy, w bardziej elementarnych wyprowadzeniach.

Pełne ujęcie termodynamiki promieniowania czarnej dziury²⁰

Warto wspomnieć, że Hawking w swoich równaniach stosował przyspieszenie grawitacyjne na horyzoncie, rozumiane w sensie newtonowskim [11]:

$$g = \frac{GM}{R_S^2} = \frac{c^4}{4GM} \quad (32)$$

Widać, że temperatura (31) czarnej dziury jest wprost proporcjonalna do tego przyspieszenia (natężenia) grawitacyjnego, ale fakt ten nie będzie tutaj formalnie wykorzystywany. W istocie jest on jednak bardzo ważny, gdyż uważa się, że unifikuje promieniowanie Hawkinga z promieniowaniem Unruha [2]. Promieniowanie Unruha pojawia się w układach nieinercjalnych posiadających przyspieszenie a . Kwantowa teoria pola przewiduje temperaturę tego promieniowania zgodną z wzorem na temperaturę Hawkinga dla $g = a$. Są jednak różnice i trudności, które uniemożliwiają wyprowadzenie promieniowania Unruha w ramach metodyki niniejszej pracy. Podstawowa różnica tkwi w braku entropii dla promieniowania Unruha²¹. Druga różnica polega na bardziej złożonym zagadnieniu opisu natężenia grawitacyjnego, aniżeli uproszczony wzór (32). Trzecia różnica polega na zupełnie innej geometrii globalnej dla promieniowania Unruha i promieniowania Hawkinga. Wobec tego autor podejrzewa, że utożsamienie rachunków kwantopolowych w tych przypadkach, jak to jest przedstawione w podręczniku [2], może nie być w pełni uzasadnione. Innymi słowy, nie jest wcale oczywiste, że temperatura promieniowania Hawkinga nie posiada jakiegoś przelicznika innego niż 1 względem temperatury Unruha²². Przykładowo w pracy [17] temperatura Hawkinga i temperatura Unruha zostały istotnie rozróżnione.

Teraz zostanie pokazane na poziomie heurystyki, jak można inaczej niż Hawking podejść do definicji temperatury termodynamicznej, która w jakimś sensie będzie uwzględniała pracę (albo inaczej zmianę rozmiarów). Powierzchnię czarnej dziury można zapisać następująco:

$$A = \frac{8\pi G}{c^4} (Mc^2) R_S \quad (33)$$

²⁰ Chodzi o ujęcie alternatywne pod względem temperatury, ciśnienia, objętości oraz pracy.

²¹ Obecne tam płaskie lub stożkowe albo paraboliczne pozorne horyzonty Rindlera są nieograniczone.

²² Oczywiście można twierdzić, że zostało to udowodnione. Należy jednak pamiętać, że wykonano to w podobny sposób i w podobnym czasie, w pierwszej połowie lat 70. Nie można również pominąć inspiracji, jaką Hawking zaczerpnął w Moskwie od Jakowa Zeldowicza i Aleksandra Starobińskiego.

Teraz można wykonać różniczkę zupełną jakby A zależało od dwóch zmiennych (lub zastosować wzór na pochodną iloczynu funkcji jednej zmiennej):

$$dA = \frac{8\pi G}{c^4} R_S d(Mc^2) + \frac{8\pi G}{c^4} Mc^2 dR_S. \quad (34)$$

Różniczka energii-masy przyjmuje zatem postać:

$$d(Mc^2) = \frac{c^6}{16\pi G^2 M} dA - \frac{c^4}{2G} dR_S. \quad (35)$$

Wykonując podobne zabiegi co poprzednio otrzymujemy:

$$d(Mc^2) = \underbrace{\frac{\hbar c^3}{4\pi G M k_B}}_{=T^*} \times \underbrace{\frac{k_B c^3}{4G\hbar}}_{=dS} dA - \underbrace{\frac{c^4}{2GA}}_{=p} \times \underbrace{AdR_S}_{=dV}. \quad (36)$$

Ta formuła różniczkowa jako całość jest bezsprzecznie prawdziwa, natomiast jej składowe nie są formalnie pochodnymi cząstkowymi gdyż A i R_S nie są zmiennymi niezależnymi. Jednak w tych składowych tkwi pewna fizyczna heurystyka, która w II części artykułu potwierdzi się formalnie przy wyprowadzeniu statystycznym²³. Zatem już na tym etapie zapiszmy półformalnie:

$$T^* = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{R_S = \text{const} ?}^{-1} = 2T_H \quad (37)$$

Pytajnik „?” informuje tutaj o problemach formalnych określenia pochodnej w tej wstępnej heurystyce. Ponadto mamy tutaj bardzo ciekawe wzory na ciśnienie i stałą wartość siły parcia działającego na horyzont:

$$p = \frac{c^4}{2GA} = \frac{c^4}{8\pi G R_S^2}, \quad F_h = \frac{c^4}{2G} = \frac{1}{2} F_P \approx 6,051 \cdot 10^{43} \text{ N} \quad (38)$$

Ta zagadkowa siła uniwersalna po prawej stronie ma wartość trzy miliona milionów razy większą od ciężaru Słońca, rozumianego w kategoriach ziemskiej grawitacji. Można ją interpretować jako całkowitą siłę parcia promieniotworzenia Hawkinga²⁴. W literaturze znana jest podwojona wartość tej siły jako siła Plancka F_P , która do tej pory prawdopodobnie nie miała takiej skonkretyzowanej interpretacji fizycznej. Wprowadzone ciśnienie spełnia typową relację dla gazu fotonowego [18]:

²³ Wówczas przyrost energii będzie dotyczył energii fotosfery, a nie przyrostu energii horyzontu. Różnica w definiowaniu temperatury Hawkinga (27) i temperatury termodynamicznej (37) jest niezależna od wartości stałej w wyrażeniu na entropię.

²⁴ Z dalszych części pracy wynika, że interpretację tę należy odnieść do fotosfery, co może się wiązać z pewnym przeskalowaniem wartości. Uwaga ta dotyczy również niektórych kolejnych wzorów.

$$pV = p \frac{4}{3} \pi R_S^3 = \frac{c^4}{6G} R_S = \frac{1}{3} M c^2 = \frac{1}{3} E \quad (39)$$

Warto przypomnieć, że dla gazów nierelatywistycznych szkolne równanie KTG (kinetycznej teorii gazów) przewiduje na końcu dwa razy większy współczynnik $2/3$. Kolejna zależność parametrów termodynamicznych promieniowania Hawkinga odbiega już od zwykłego gazu fotonowego:

$$S = S_H = \frac{E + 3pV}{T^*} = \frac{2E}{T^*} = \frac{E}{T_H} = \frac{3\pi k_B^2 c^2}{2\hbar^2 G} T^* V \quad (40)$$

Dla porównania entropia (Plancka) S_P gazu fotonowego dana jest wzorem:

$$S_P = \frac{E + pV}{T} = \frac{4E}{3T} = \frac{4\pi^2 k_B^4}{45\hbar^3 c^3} T^3 V = \frac{16\sigma}{3c} T^3 V \quad (41)$$

Zaś dla zwykłego gazu doskonałego analogiczna formuła jest jeszcze bardziej złożona i zawiera wyrażenia z logarytmami. Współczynnik proporcjonalności w (41) jest zapisany za pomocą stałej Stefana-Boltzmann'a σ .

Do kompletu relacji termodynamiki fenomenologicznej brakuje już tylko zależności z liczbą cząstek (fotonów) lub średnią energią cząstek, która umożliwiłaby napisanie równania stanu. Załóżmy, że będzie to taka sama relacja jak dla gazu fotonowego Plancka:

$$\langle hf^* \rangle = E_f^{*sr} = 2,701178 k_B T^* \quad (42)$$

Wzór ten od szkolnego wzoru dla nierelatywistycznych gazów doskonałych różni się tylko współczynnikiem $2,701178$ większym od $3/2 = 1,5$. Wynika to z faktu, że fotony mają więcej modów ruchu od zwykłych cząstek: dwa mody polaryzacji oraz dwa mody dwóch składowych prędkości o stałej wartości c . Istnieje również zbliżony do (42) wzór opisujący maksimum widma częstotliwości promieniowania cieplnego, który jest określany mianem prawa przesunięć Wiena (pierwszego rodzaju):

$$hf_{\max}^* = 2,821439 k_B T^* \quad (43)$$

Energia takiego fotonu (z maksimum widma) jest większa od średniej o $4,5\%$. Można zatem zdefiniować liczbę fotonów promieniowania Hawkinga w oparciu o (42):

$$N^* = \frac{E}{\langle hf^* \rangle} = \frac{4\pi G}{2,701178 \hbar c} M^2 \quad (44)$$

W tej heurystyce przyjęto uproszczone założenie, że energia jest tutaj związana z masą całej czarnej dziury. Można zatem obliczyć heurystycznie kwant powierzchni horyzontu formalnie zajmowany przez jedną cząstkę:

$$\frac{4\pi R_S^2}{N^*} = 4 \cdot 2,701178 \cdot \frac{\hbar G}{c^3} = 10,8047 l_P^2 \approx 2,82 \cdot 10^{-69} \text{ m}^2 \quad (45)$$

Otrzymana wartość stanowi 10,8 jednostek powierzchni Plancka l_P^2 . Dużo mniej abstrakcyjnie i bardziej znajomo wygląda kwestia równania stanu dla promieniowania Hawkinga:

$$pV = \frac{1}{3} E = \frac{1}{3} \cdot 2,701178 N^* k_B T^* \Rightarrow pV = 0,9004 N^* k_B T^* \quad (46)$$

Wynikowe równanie jest tożsame z analogicznym równaniem dla gazu fotonowego Plancka, a od równania Clapeyrona różni się jedynie współczynnikiem 0,9004 w miejscu jedności. Prawą stronę tego równania można by też wyrazić bez zmian za pomocą nieprzeskalowanych wielkości bez gwiazdki: T_H i N . Zatem heurystyczny opis termodynamiki fenomenologicznej skończyłby się bez dodatkowych argumentów²⁵ rozstrzygających między T^* i T_H .

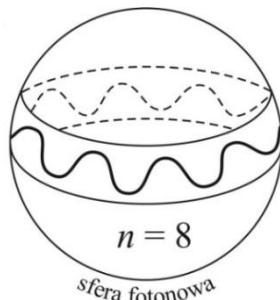
Opis termiczny sfery fotonowej

Zbliżając się powoli do końca tej części pracy zostanie udowodnione proste stwierdzenie, z którego łatwo wynika wartość temperatury czarnej dziury. Postępowanie to można nawet nazwać heurystycznym wyprowadzeniem półklasycznym temperatury czarnej dziury.

STWIERDZENIE 1. (O fotonie termicznym stanu podstawowego)

Energia fotonu o najdłuższej możliwej długości fali znajdującego się na półklasycznej orbicie fotosfery o promieniu $r = (3/2)R_S$ ma energię mieszczącą się w dość wąskim przedziale między $3/2$ średniej energii fotonu promieniowania cieplnego o temperaturze $T^ = 2T_H$ a $3/2$ energii fotonu tego promieniowania z maksimum widma częstotliwości.*

$$\frac{3}{2} \langle hf \rangle_{T^*} < hf|_{r=\frac{3}{2}R_S} \leq \frac{3}{2} hf_{\max T^*} \quad (47)$$



Rys. 6. Półklasycznie skwantowana orbita fotonu na sferze fotonowej czarnej dziury o energii $n = 8$ razy większej od stanu podstawowego. Orbita stanu podstawowego ($n = 1$) byłaby na analogicznym rysunku mniej czytelna i nie tak efektywna

²⁵ Dotychczasowe argumenty to (26) vs (27), (36), (37), (40) vs (41).

Dowód. Rozwinięcie wzoru Plancka na energię fotonu dla opisanego stanu prowadzi do wzoru:

$$E_f = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{2\pi r} = \frac{2}{3} \cdot \frac{hc}{R_S} \quad (48)$$

Stąd już można obliczyć temperaturę w oparciu o postulat (47) oraz (42), (43):

$$\frac{2^2}{3^2 \cdot 2,821439} \cdot \frac{\hbar c}{k_B R_S} \leq T^* < \frac{2^2}{3^2 \cdot 2,701178} \cdot \frac{\hbar c}{k_B R_S} \quad (49)$$

W celu porównania można to zapisać w postaci:

$$\frac{1}{12,696} \cdot \frac{\hbar c^3}{k_B GM} \leq T^* = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\hbar c^3}{k_B GM} = 2T_H < \frac{1}{12,155} \cdot \frac{\hbar c^3}{k_B GM} \quad (50)$$

Ponieważ $4\pi \approx 12,566$ to lewa strona jest mniejsza o 1%, a prawa większa o 3,4% od temperatury T^* . Lepsze przybliżenie zapewnia tutaj wartość wynikająca z prawa Wiena.

Ułamek $3/2$ występujący w pierwszej i trzeciej części nierówności stwierdzenia jest frapujący. Połowicznie może próbować go wyjaśniać następująca obserwacja:

OBSERWACJA 3. (O efektywnym przeliczniku temperaturowym dla sfer o równej mocy)

Jeżeli fotosferze o $r = (3/2)R_S$ przypiszemy temperaturę $T_{3/2}$, a powierzchni horyzontu o $r = R_S$ temperaturę T_1 , to z pominięciem efektów relatywistycznych²⁶, warunek równości mocy obu sfer oznacza efektywną temperaturę horyzontu większą $\sqrt{3/2}$ razy od temperatury fotosfery:

$$T_1 = \sqrt{3/2} T_{3/2} \approx 1,2247 T_{3/2} \quad (51)$$

Dowód. Przyjmując prawdziwość prawa Stefana-Boltzmann²⁷ o zależności mocy od powierzchni i czwartej potęgi temperatury ciała mamy:

$$4\pi R_S^2 \cdot (\sqrt{3/2} T_{3/2})^4 = 4\pi (3/2 \cdot R_S)^2 T_{3/2}^4 \quad (52)$$

Lewa strona z dokładnością do stałej fizycznej określa moc horyzontu, a prawa analogicznie jednostronną moc fotosfery.

Obserwacja 3, podobnie zresztą jak obserwacje 1 i 2 z poprzedniego rozdziału pokazuje, że wyliczanie mocy promieniowania Hawkinga może prowadzić

²⁶ W obserwacji 2 było wykazane, że ich uwzględnienie prowadzi do temperatury nieskończonej.

²⁷ Również to założenie, jak pokazuje następna obserwacja, ma tutaj umowny charakter.

do pewnych trudności formalnych. Warto zatem sformułować kolejne dwa spostrzeżenia:

OBSERWACJA 4. (O obserwowanej mocy termicznej fotosfery)

Jeżeli fotosfera o $r = (3/2)R_S$ ma lokalną temperaturę $T_{3/2}$ i moc jednostronną $P_{3/2}$, a daleki obserwator postrzega temperaturę T_∞ , która jest $\sqrt{3}$ razy mniejsza, to jakby wbrew prawu Stefana-Boltzmann'a będzie postrzegał moc P_∞ też $\sqrt{3}$ razy mniejszą (a nie 9 razy mniejszą):

$$P_\infty = P_{3/2} / \sqrt{3} \approx 0,57735 \cdot P_{3/2} \quad (53)$$

Dowód. Rozważmy funkcję widmowej gęstości energii/mocy Plancka zależnej od częstotliwości. Poczerwienienie fotonów zmniejsza ich częstotliwość, w wyniku czego funkcja ulega przeskalowaniu (powinowactwu) jedynie względem osi częstotliwości. Zatem moc, czyli pole pod wykresem funkcji zmienia się o czynnik skalowania taki sam jak częstotliwość i temperatura. Efektywnie zmienia się czynnik normalizacyjny w funkcji rozkładu Plancka i w prawie Stefana-Boltzmann'a. Zmiana tych czynników nie jest traktowana jako odejście od rozkładu Plancka, ale wymaga ostrożności w obliczeniach mocy.

Ta i następna obserwacja może sprawiać wrażenie, że w OTW nie jest spełniona zasada zachowania energii. Otóż jest ona jakby ukryta w energii potencjalnej grawitacji promieniowania. W niektórych ujęciach zagadnienia wprowadza się jawnie taką energię [7], która jest blisko związana z czynnikiem dylatacji czasu (lub składową czasową tensora metrycznego) [9].

OBSERWACJA 5. (O pozornej mocy horyzontu)

Jeżeli do dalekiego obserwatora dociera z czarnej dziury promieniowanie o niezerowej mocy postrzeganej P_∞ , którego źródłem miałby być horyzont o mocy P_1 , to moc horyzontu musiałaby być nieskończona:

$$P_1 = \lim_{r \rightarrow R_S^+} P(r) = +\infty \quad (54)$$

Dowód. Analogicznie do obserwacji 4 przelicznik mocy jest taki jak przelicznik temperatur w obserwacji 1 i 2. Wystarczy przejść z nim do granicy:

$$P_1 = \lim_{r \rightarrow R_S^+} \frac{dt}{d\tau} \cdot P_\infty = \lim_{r \rightarrow R_S^+} \frac{P_\infty}{\sqrt{1 - R_S / r}} = +\infty, \quad (55)$$

co matematycznie dowodzi tezie, a fizycznie oznacza, że sam horyzont nie może być źródłem żadnego promieniowania, a co najwyżej jego otoczenie.

Skupmy się teraz na temperaturze obserwowalnej T_∞ . W rzeczywistości stwierdzenie 1 określa temperaturę fotosfery, która przeliczona na temperaturę widzianą w nieskończoności daje:

$$T_{3/2} = T^* = 2T_H \quad \Rightarrow \quad T_\infty = \frac{2}{\sqrt{3}} T_H \approx 1,1547 T_H. \quad (56)$$

Zatem przedstawione zawirowania z przeliczaniem temperatury czarnej dziury przywiodły nas na powrót do temperatury Hawkinga, ale o 15% wyższej od oryginalnej. Powyższe wartości znajdują odzwierciedlenie w II części niniejszej pracy. Warto jednak zaznaczyć, że podniesiona tutaj temperatura termodynamiczna T^* jest podwojoną wartością temperatury typu Hawkinga, niezależnie od ostatecznej wartości temperatury w nieskończoności. Nie stoi to w sprzeczności z faktem, że docelowo Hawking wyprowadzał metodami kwantowej teorii pola temperaturę w nieskończoności. Musiał tak postąpić, gdyż nie da się przypisać skończonej temperatury horyzontowi, a do fotosfery Hawking się nie odwoływał. Warto też jest brać pod uwagę relację (51) z obserwacji 3, która może dodatkowo komplikować analizę. Zdaniem autora nie powinno się jej stosować, ale należy zdawać sobie sprawę, że autorzy odnoszący moc promieniowania do powierzchni horyzontu mogli implícite stosować tego typu umowne relacje.

Nie ma nic bardziej praktycznego niż dobra teoria.
Ludwig Boltzmann

Część I przedstawiła opis czarnej dziury w ujęciu dwóch wielkich teorii fizycznych, teorii grawitacji i termodynamiki fenomenologicznej. W ramach teorii grawitacji rozważono i porównano opis zgodny z teorią grawitacji Newtona (GN) i ogólną teorią względności Einsteina (OTW). W części II zostaną zaś zastosowane kolejne dwie wielkie teorie, mechanika kwantowa oraz mechanika statystyczna. Na ich podstawie będzie wyliczana „na palcach” entropia czarnej dziury. Rachunek będzie bazował na funkcji partycji z teorii liczb oraz na kombinacjach z powtórzeniami. Na podstawie istotnej roli fotosfery dla promieniowania Hawkinga zostanie zapostulowany nowy, prosty i hipotetyczny model czarnej dziury, który nie jest zwyczajnym rozwiązaniem Schwarzschilda.

Źródła

- [1] Hawking J. (2013, 1999ang), *Moje życie ze Stephenem – Podróż ku nieskończoności*, Świat Książki, Warszawa.
- [2] Birrell N.D., Davies P.C. (1982, 1998 ros.), *Quantum fields in curved space*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] Hawking S. (2015, 1988 ang.), *Krótką historia czasu*, Zysk i S-ka, Poznań.
- [4] Nowikow I. (1995), *Czarne dziury i Wszechświat*, Prószyński i S-ka, Warszawa.
- [5] Gładyszewski L., Piłat M. (1990), *Fizyka z astronomią IV*, Rozdz. III. *Astrofizyka i kosmologia*, Rozdz. IV. *Mikroskopowe modele zachowania się ciał makroskopowych*, WSiP, Warszawa.
- [6] Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. (1973, 1977 ros.), *Gravitation*, Freeman, San Francisco.

- [7] https://en.m.wikipedia.org/wiki/Schwarzschild_geodesics (05.2018).
- [8] Mizerski W., Nowaczek W. (1995), *Tablice fizyczno-astronomiczne*, Adamantan, Warszawa.
- [9] Januszajtis A. (1986), *Fizyka dla politechnik, II. Pola*, PWN, Warszawa.
- [10] Januszajtis A. (1977), *Fizyka dla politechnik, I. Cząstki*, PWN, Warszawa.
- [11] Hawking S. (1976), *Black holes and thermodynamics*, Phys. Rev. D, Vol. 13, No 2.
- [12] Pade Don N. (2004), *Hawking radiation and black hole thermodynamics*, arXiv:hep-th/0409024v3.
- [13] Hawking S. (1975), *Particle Creation by Black Holes*, Comm. Math. Phys. 43, 199–220, Springer-Verlag.
- [14] Matyjasek J. (2002), *Przybliżone metody kwantowej teorii pola w czasoprzestrzeniach statycznych czarnych dziur*, UMCS, Lublin.
- [15] Unruh B. (2012), *Measurement of the Hawking Temperature for an Analog Horizon*, https://www.youtube.com/watch?v=V3Mm_YVeIbo, KITP Colloquium, University of California.
- [16] McEvoy J.P., Zarate O. (1999, 1995 ang.), *Od podstaw – Stephen Hawking*, Emblem, Warszawa.
- [17] Barbado L.C., Barcel C., Garay L.J., Jannese G. (2016), *Hawking versus Unruh effects, or the difficulty of slowly crossing a black hole horizon*, arXiv:1608.02532v.
- [18] Huang K. (2006), *Podstawy fizyki statystycznej*, PWN, Warszawa.