Gra EGZAMIN

Damian Wróbel, student III roku
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej AGH

Każdy na pewno zadawał sobie pytanie ‘czy warto się uczyć?’. Po znalezieniu setek powodów, by tego nie robić, większość bierze jednak książkę do ręki i stara się przyswoić nowe pokłady wiedzy. Traktując egzamin jako grę, przeanalizujmy (przy użyciu podstawowych narzędzi teorii gier) grę w egzamin i poszukajmy odpowiedzi na to odwieczne pytanie.

Rozważmy następującą sytuację: student przygotowuje się do egzaminu, który zaważy o jego ocenie końcowej. Może otrzymać: 2.0, 3.0 lub 4.0, znając stan swojej wiedzy, uważa, że otrzymanie przez niego oceny 5.0 jest niemożliwe, zwłaszcza u wymagającego egzaminatora. Chciałby uzyskać jak najlepszy wynik, ale też nie chciałby poświęcić dużo czasu na naukę. Wiemy, że uzyskanie oceny 2.0 nie przynosi mu żadnej satysfakcji, ale też nie poniesie ‘kosztów nauki’, gdy nie podejmie próby nauki. Dodatkowo uznał, że jeśli całkowicie poświęci się nauce i otrzyma 3.0, to nie będzie widział w tym korzyści. Natomiast otrzymanie 4.0 daje czterokrotnie więcej satysfakcji niż wysiłek włożony w połowiczne poświęcenie się nauce. Przykładowe użyteczności spełniające te warunki:

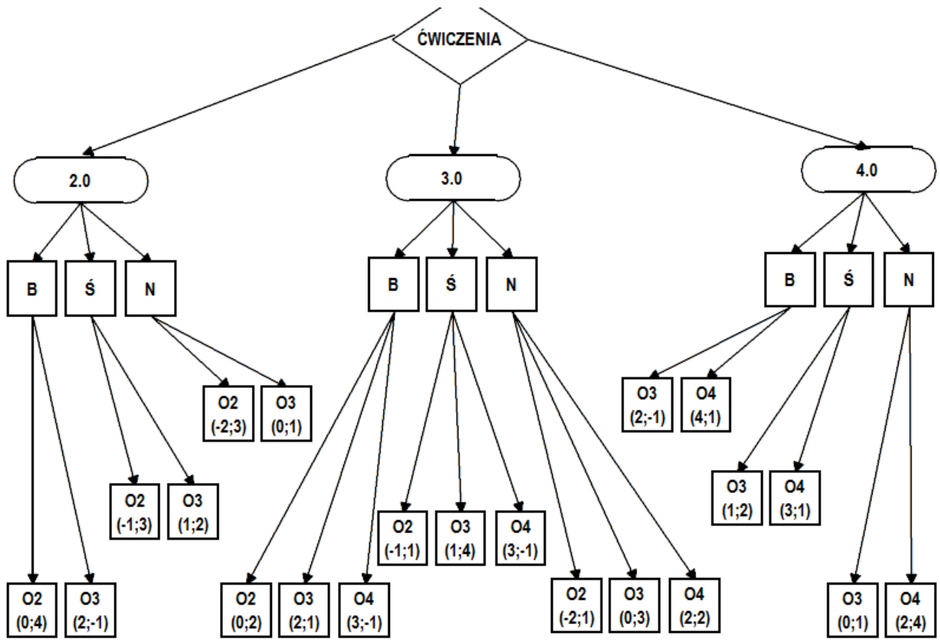
0 – otrzymanie 2.0 (O2)	0 – brak nauki (B)
2 – otrzymanie 3.0 (O3)	–1 – połowicznie poświęcenie się nauce (Ś)
4 – otrzymanie 4.0 (O4)	–2 – całkowite poświęcenie się nauce (N)

Uznajemy, że zasłużoną i odpowiadającą wiedzy studenta oceną przy braku nauki jest 2.0, przy połowicznej nauce 3.0, a przy całkowitym poświęceniu się 4.0. Ponadto zakładamy addytywność użyteczności związanych z konkretną oceną i związanych z natężeniem nauki, co prowadzi nas do tego, że całkowita satysfakcja przełożona na wartość wypłaty w grze jest sumą składnika pochodzącego od oceny i od zaangażowania w naukę.

Jednak ocena końcowa nie zależy tylko od wyniku egzaminu. Pewien wpływ na ocenę końcową mają również ćwiczenia, z których student otrzymał jedną z not 2.0, 3.0 lub 4.0. Jeżeli to była ocena 2.0, to aby student mógł przystąpić do egzaminu, musiała zostać poprawiona, ale fakt, że student nie był pozytywnie oceniony nie umknął uwadze wykładowcy – dość wymagającego egzaminatora, który wierzy, że surowiej oceniając zyskuje szacunek i skłania studentów do większego zaangażowania w naukę przedmiotu, który prowadzi. Ta cecha sprawia, że równie chętnie wystawi ocenę niższą niż wskazuje na to egzamin, co niechętnie da notę wyższą niż zasłużona egzaminem. Dwukrotnie większą wagę przykłada jednak do tego, by ocena była zgodna z wiedzą zaprezentowaną przez studenta na egzaminie. Jest to tak samo istotne, jak utrzymanie oceny z ćwiczeń. Przykładowe użyteczności spełniające te warunki:

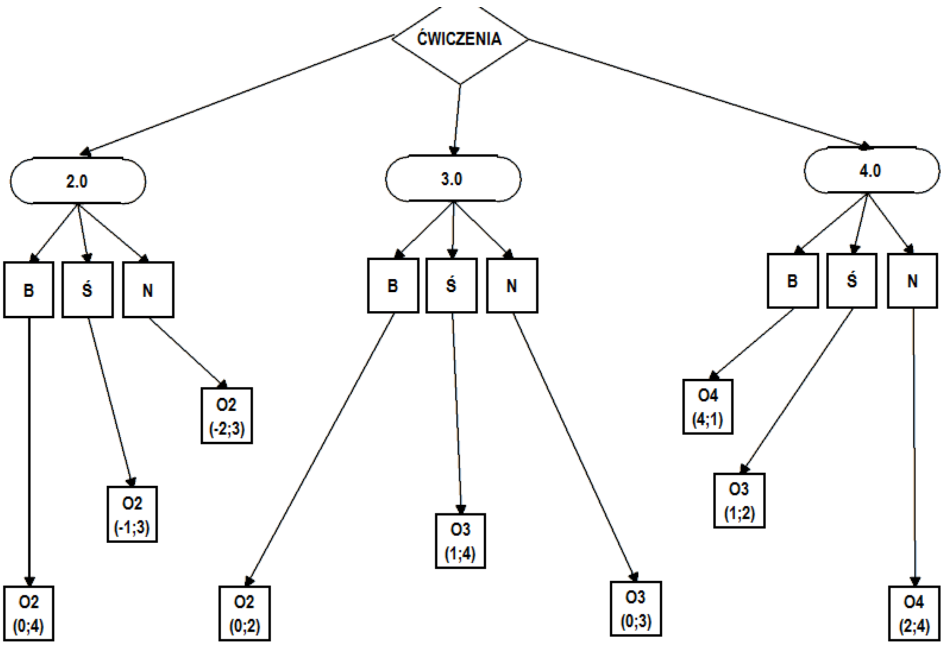
2 – postawienie oceny zasłużonej	1 – postawienie oceny niższej niż zasłużona
2 – utrzymanie oceny z ćwiczeń	–1 – postawienie oceny wyższej niż zasłużona

Także tutaj zakładamy addytywność użyteczności związanych z niewykluczającymi się zdarzeniami. Załóżmy też dla uproszczenia, że nie jest możliwe otrzymanie oceny 4.0, jeśli było się ocenionym na 2.0, i nie jest możliwe otrzymanie oceny 2.0, jeśli było się ocenionym na 4.0. Całą tę sytuację możemy potraktować jako grę sekwencyjną o pełnej informacji. Decyzje podejmowane są kolejno i zarówno student, jak i wykładowca w każdej chwili mają pełną wiedzę na temat sytuacji, w jakiej się znajdują. Można to zobrazować drzewkiem gry. Najpierw student otrzymuje ocenę z ćwiczeń (ocenę 2.0 poprawia), następnie podejmuje decyzję o stopniu zaangażowania w naukę, co przekłada się na jego wynik na egzaminie. Ostatnim etapem jest wystawienie oceny końcowej przez egzaminatora. Drzewko gry wraz z wypłatami graczy (student; wykładowca) przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Drzewo gry EGZAMIN z wypłatami graczy

Oczywistym jest, że zarówno student, jak i egzaminator dążą do uzyskania jak największej wypłaty. Ostatnia decyzja należy do egzaminatora. W sytuacji wyboru podejmie on decyzję bardziej opłacalną dla siebie, czyli taką, której towarzyszy większa wypłata. Dla przykładu: studentowi, który z ćwiczeń miał 3.0, a na egzamin przyszedł całkowicie nieprzygotowany (B) odpowiada węzeł 3.0 → B, gdzie bardziej opłacalne jest postawienie oceny 2 (wypłata egzaminatora 2) niż ocen 3 lub 4 (wypłaty odpowiednio: 1 oraz –1). Postępując w ten sposób[1] można odrzucić decyzje, które nie zostaną podjęte przez wykładowcę, ponieważ w danej sytuacji będzie mógł on wybrać opcję bardziej dla niego opłacalną. Na rysunku 2 znajduje się drzewko gry po takiej redukcji.



Rys. 2 Drzewko gry EGZAMIN po pierwszej redukcji

Przeprowadzając takie rozumowanie student dowiaduje się, jakie konsekwencje będzie miała każda jego decyzja. Znając swoją ocenę z ćwiczeń może zatem postąpić tak, by otrzymać jak największą wypłatę. Dla przykładu: student, który z ćwiczeń miał 3.0 zdecyduje się na naukę ze średnią intensywnością, ponieważ wtedy otrzyma ocenę 3, a w tej sytuacji wiąże się to z wypłatą 1, podczas gdy brak nauki i pełne zaangażowanie w naukę prowadzą do wypłaty 0.

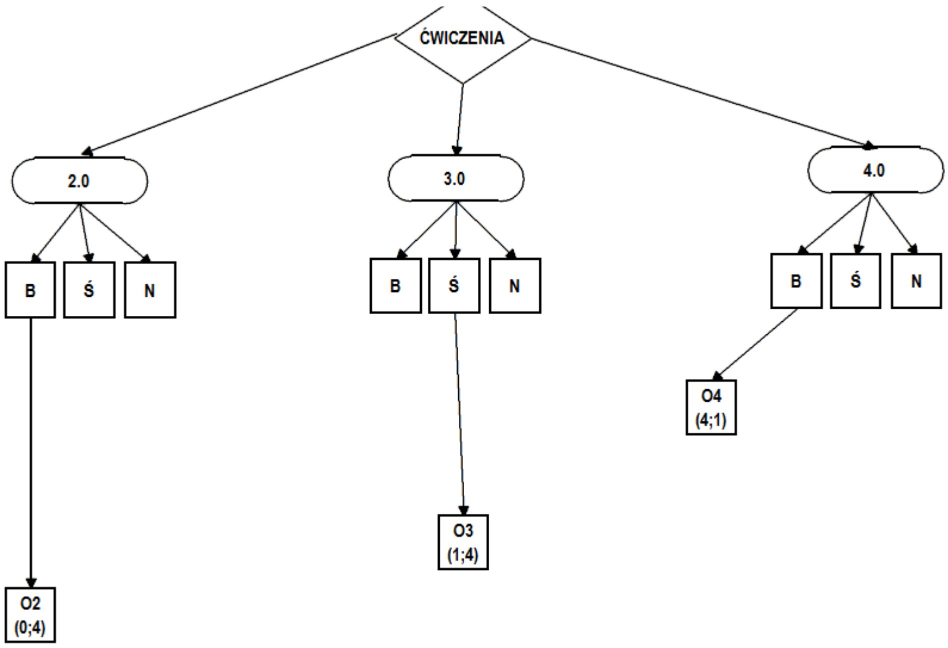
[1] Technika przycinania drzewka gry, por. „Teoria gier” rozdz. 7, Philip D. Straffin.

Warte odnotowania jest to, że studentowi, który z ćwiczeń otrzymał 4.0, nauka ze średnią intensywnością daje gorszą nie tylko wypłatę, ale i ocenę, niż brak nauki. Wynika to z przywiązania wykładowcy do oceny z ćwiczeń.

Eliminując mniej korzystne opcje otrzymamy drzewko jak na rysunku 3.

Sytuacja tutaj wydaje się być jasna:
– student przy ocenie z ćwiczeń 2.0 nie będzie się uczył i otrzyma ocenę 2;
– student przy ocenie z ćwiczeń 3.0 podejmie próbę nauki i otrzyma ocenę 3;
– student przy ocenie z ćwiczeń 4.0 nie będzie się uczył i otrzyma ocenę 4;

Egzaminator, który powtórzy to rozumowanie zauważy, że wystawienie oceny 4.0 z ćwiczeń jest dla niego nieopłacalne. Prowadzi ono do wypłaty czterokrotnie niższej niż oceny 2.0 i 3.0, a do tego powoduje, że student nie będzie się uczył. W związku z tym będzie można zauważyć spadek częstości wystawiania oceny 4.0 z ćwiczeń. Teoretycznie taka ocena nie powinna się wcale pojawić.



Rys. 3. Drzewko gry EGZAMIN po drugiej redukcji

Dla wykładowcy nie ma różnicy między postawieniem oceny 2.0 a 3.0 z ćwiczeń, obie prowadzą do tej samej wypłaty. Różnicę jednak odczuwa student.

Ocena z ćwiczeń decyduje o stopniu przygotowania do egzaminu, a co za tym idzie, o ocenie końcowej i wypłatach graczy. Student, który otrzyma 3.0 z ćwiczeń podejmie naukę ze średnim zaangażowaniem, co poprowadzi go do oceny 3 i wypłaty 1. Student z oceną 2.0 nauki nie podejmie, co poskutkuje oceną 2 i wypłatą 0. Z drzewka na rysunku 2 wiemy, że nawet, gdyby oceniony na 2.0 się uczył, to otrzyma ocenę 2.

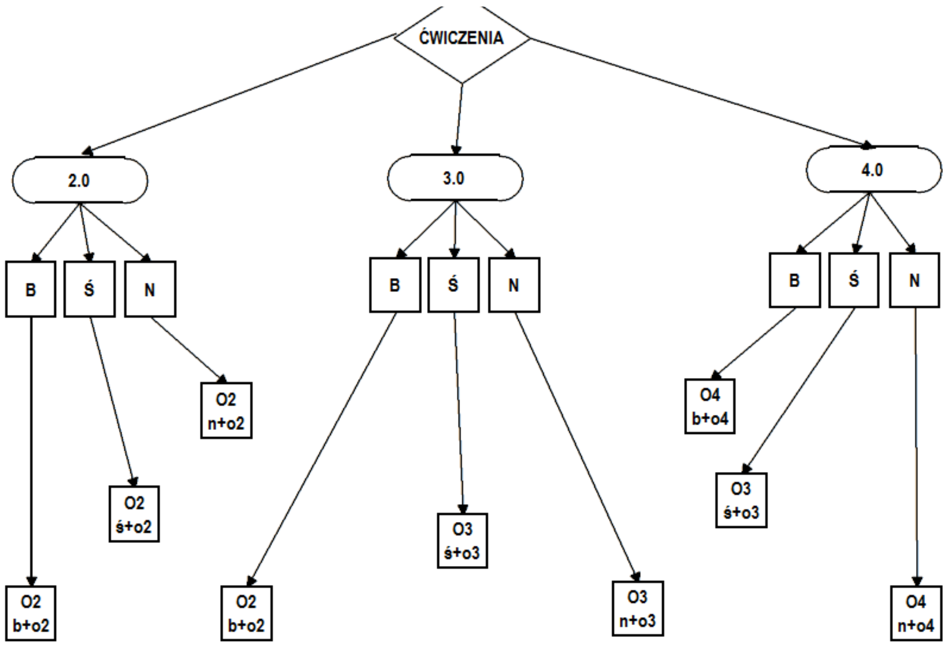
Trzeba zwrócić uwagę na fakt, że żadne z tych rozwiązań nie jest optymalne w rozumieniu Pareto, czyli istnieje rozwiązanie, które zwiększa wypłatę jednemu z graczy, nie ujmując przy tym drugiemu. Jest to rozwiązanie, kiedy student, oceniony na ćwiczeniach na 4.0 uczy się i otrzymuje ocenę końcową 4. Wypłaty (2;4) są korzystniejsze niż (0;4) i (1;4) do których prowadzi analiza tej gry.

Można powiedzieć, że los studenta jest w rękach wykładowcy. Nawet ten rozpatrywany egzaminator, który przez swoją surowość nie jest przychylny studentom, powinien wystawiać ocenę 3.0, jeśli chce, aby student się uczył. Wystawienie oceny negatywnej nie przełoży się na większą intensywność nauki u studenta.

Warto się zastanowić czy rozwój zdarzeń jest niekorzystny tylko dla studenta o tych konkretnych użytecznościach, czy też problemy mogą mieć również studenci o innych preferencjach. Bezsprzecznie można przyjąć, że otrzymanie wyższej oceny jest dla studenta lepsze niż oceny niższej. Również bez większych wątpliwości można założyć, że im więcej czasu student poświęci na naukę, tym mniej będzie zadowolony. Wypłatę związaną decyzją B oznaczmy przez b, natomiast ze zdarzeniem O2 przez o2. Analogicznie oznaczmy pozostałe wypłaty studenta. Będą one spełniać zależności: $b > ś > n$ oraz $o2 < o3 < o4$. Bazując na tych truizmach spójrzmy na drzewko w momencie wyboru studenta z uogólnionymi wypłatami studenta (rys. 4). Każdorazowo wypłata studenta jest (jak poprzednio) sumą składnika od zaangażowania w naukę oraz składnika pochodzącego od oceny. Wypłaty egzaminatora pozostają bez zmian, więc pierwszy etap przycinania drzewka jest identyczny i nie będziemy go powtarzać.

Patrząc na studenta ocenionego na 2.0 widzimy, że niezależnie od podjętych działań otrzyma ocenę 2. Jego wypłaty różnią się tylko wkładem od poziomu zaangażowania w naukę. Zgodnie z założeniem $b > ś > n$, więc decyzją studenta będzie brak nauki.

Dla studenta ocenionego na 3.0 strategia 3.0 → N jest zdominowana przez strategię 3.0 → Ś, ponieważ student dostaje o3 w obu przypadkach, ale $ś > n$. Pozostaje wybór między strategiami 3.0 → B i 3.0 → Ś. Okazuje się, że to właśnie ten wybór jest kluczowy dla wyniku gry.



Rys. 4. Drzewo gry EGZAMIN z uogólnionymi wypłatami studenta

Student podejmie decyzję o braku nauki, gdy:

$$b + o2 > ś + o3 \Rightarrow o3 - o2 < b - ś$$

w przeciwnym razie podejmie próbę nauki o średnim zaangażowaniu.

Student oceniony na 4.0 ma strategię dominującą[2] 4.0 → B, która prowadzi do wypłaty będącej sumą najbardziej opłacalnych studentowi opcji B (b > ś > n) i O4 (o4 > o3 > o2).

Takie spojrzenie rzuca nowe światło na problem. Egzaminator jest pewny wyboru studenta ocenionego na 2.0 oraz 4.0. Jedyna wątpliwość dotyczy ocenionego na 3.0. Zauważmy, że jeśli student oceniony na 3.0 nie będzie się uczył, wypłata egzaminatora wyniesie 2, a przy ocenieniu wstępnie na 2.0 wypłata wyniesie 4 (por. rys. 1). Z tego wynika, że w przypadku wątpliwości, co do wyboru studenta, egzaminator, aby nie ryzykować części swojej wypłaty, w sytuacji wyboru, chętniej oceni pracę studenta na ćwiczeniach na 2.0.

Doświadczenie na szczęście pokazuje, że egzaminy często kończą się pozytywną oceną, co może kłócić się z zaprezentowanym rozumowaniem. Czy wynika z tego, że egzaminatorzy lub studenci nie postępują racjonalnie lub nie kierują

[2] Strategię dającą graczowi wypłaty zawsze nie gorsze niż inne strategie.

się dążeniem do uzyskania jak największej korzyści? Nic z tych rzeczy. Prezentowany model opiera się na założeniach dotyczących użyteczności, dla innego egzaminatora (z innymi preferencjami) gra może wyglądać zupełnie inaczej. To założenia o surowości egzaminatora przejawiające się w wartości wypłat są podstawą całego rozumowania, a uzyskane wyniki ich konsekwencją.

Jedną z nieoczywistych konsekwencji jest fakt, że oceniony na ćwiczeniach na 2.0 student nawet, gdy będzie się sumiennie przygotowywał do egzaminu (co jak wiemy z analizy jest nieopłacalne!), to otrzyma ocenę 2, co więcej egzaminator będzie wolał dać ocenę 3 studentowi, który się średnio uczył niż jemu. Inną, równie zaskakującą, jest sytuacja studenta, który otrzymał 4.0 z ćwiczeń. Do utrzymania tej oceny po egzaminie prowadzą dwie całkowicie różne drogi: nauka z pełnym zaangażowaniem i… brak nauki. Nauka na średnim poziomie intensywności przyniesie studentowi ocenę 3.

Wyjaśnienie tego kryje się we wspomnianych założeniach. Przywiązanie egzaminatora do oceny z ćwiczeń powoduje, że wyższe wypłaty towarzyszą sytuacjom, kiedy ocena z ćwiczeń zostaje utrzymana.
Warto też zwrócić uwagę na przewrotność całej sytuacji. Egzaminator, który stawiał chętniej niższą ocenę niż wyższą, by zmobilizować tym studenta do nauki w rzeczywistości do nauki zniechęca – student oceniony na 2.0 nie będzie się uczył, a przecież to właśnie taką ocenę z ćwiczeń będzie najczęściej stawiał wykładowca, jeśli nie będzie chciał ryzykować części swojej wypłaty.
Powyższe rozumowanie może też być argumentem po stronie tych studentów, którzy na pytanie postawione na wstępie odpowiedzieli przecząco.

Za wsparcie merytoryczne, okazaną pomoc i życzliwość dziękuję prof. dr. hab. Krzysztofowi Kułakowskiemu.