

Efekt Józefa

Paweł F. Góra

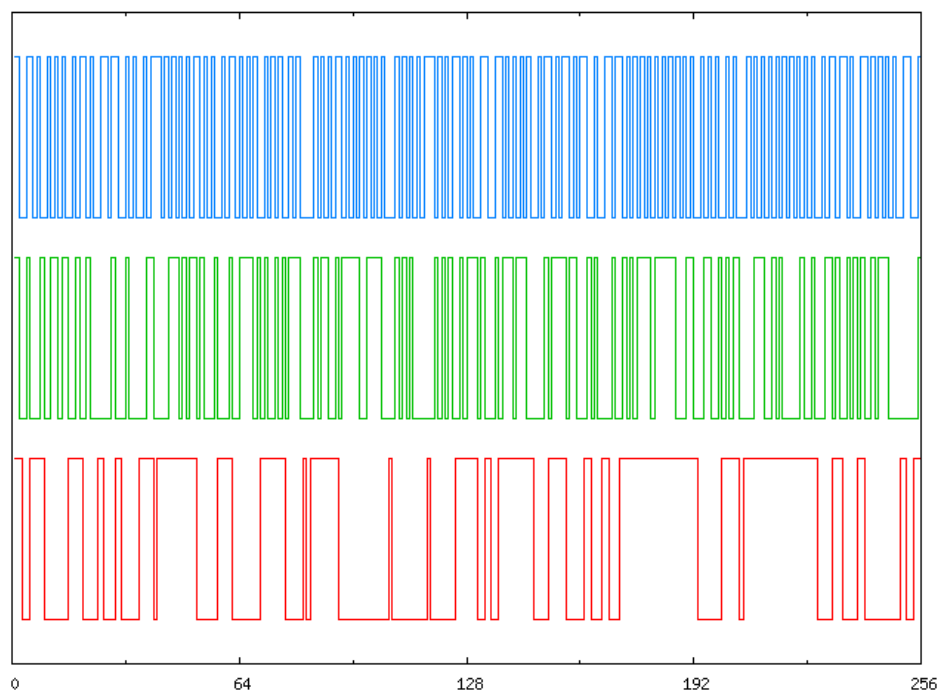
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej UJ

Biblijny patriarcha Józef, podstępnie sprzedany w niewolę do Egiptu, słynął ze swej umiejętności interpretowania snów. Zinterpretował też sen dręczący faraona: o siedmiu tłustych krowach pożartych przez siedem krów chudych, które wyszły z wód Nilu. Józef zrozumiał [1], że sen ten zapowiadał siedem lat urodzaju, po których miało nastąpić siedem lat nieurodzaju i głodu. Faraon mianował Józefa swoim wezyrem, ten zaś kazał w latach urodzaju gromadzić zapasy, które pozwoliły Egipcjanom przetrwać lata głodu, które rzeczywiście nadeszły. *Winter is coming*, czy komuś coś to mówi?

W starożytności zbiory w Egipcie zależały od corocznych wylewów Nilu. Wysoki wylew oznaczał znaczne użyznienie i nawodnienie pól, a więc obfite zbiory. Niski wylew, przeciwnie, oznaczał suszę, nieurodzaj i widmo głodu.

Wylewy Nilu zależą od opadów w Etiopii, w dorzeczu Nilu Błękitnego. Poziom opadów z kolei zależy od bardzo wielu złożonych i wzajemnie na siebie wpływających zjawisk meteorologicznych i klimatycznych, których do dziś nie w pełni rozumiemy. Możemy przyjąć, że poziom corocznych opadów na etiopskich wyżynach, a zatem poziom wylewów Nilu, a zatem obfitość zbiorów, są zjawiskami losowymi. W „prawdziwie losowym” ciągu zdarzeń spodziewamy się jednak, że poprzednie zdarzenia znikomo wpływają na następne: po roku obfitego wylewu równie dobrze może nastąpić kolejny obfity wylew, co i wylew niski. Tak jednak nie jest: Po wysokim wylewie raczej następuje kolejny wysoki wylew, po wylewie niskim – raczej kolejny niski, po czym po kilku latach sytuacja gwałtownie się zmienia. We współczesnym języku mówimy, że w ciągu wylewów Nilu występują długoczasowe korelacje. Po kilku latach obfitości występuje kilka lat nieurodzaju, po czym znów kilka lat obfitości i tak dalej. Biblijna opowieść o Józefie dowodzi, że już w starożytności ludzie byli świadomi tego faktu, a był on dla nich tak ważny, że postanowili zapisać go w literackiej formie w swojej świętej księdze.

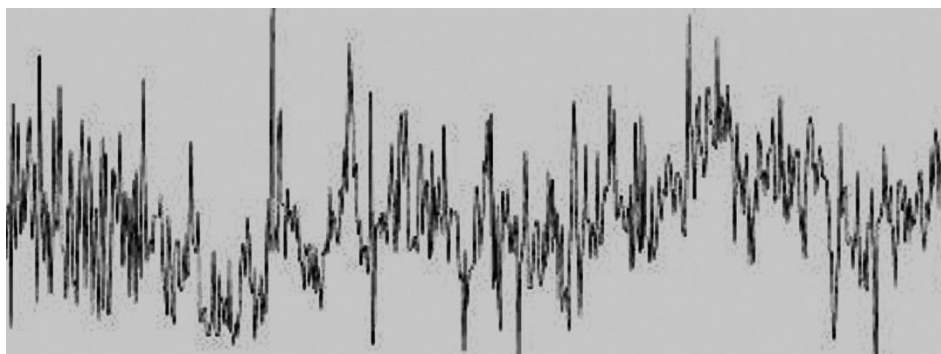
Jeśli dokonamy kilku (poważnych!) uproszczeń matematycznych i ograniczymy się do ciągów losowych, mogących jedynie przybierać wartości $(-1,+1)$ – lub „niski wylew” i „wysoki wylew” – środkowa krzywa na poniższym rysunku odpowiada „prawdziwie losowemu” brakowi korelacji: po liczbie $+1$ może z równym prawdopodobieństwem wystąpić tak $+1$, jak i -1 , i na odwrót. Nie ma długoczasowych zależności, choć oczywiście zdarzają się pewne sekwencje kolejnych wysokich, bądź niskich, wylewów.



Najniższa krzywa obrazuje „efekt Józefa” (termin ten wprowadził Benoit Mandelbrot, urodzony w Polsce, ale pracujący we Francji i Stanach Zjednoczonych matematyk, twórca teorii fraktali): Ciąg ma tendencję do utrzymywania takiej samej wartości przez dłuższy czas. Z kolei krzywa najwyższa opisuje sytuację odwrotną: ciąg ma tendencję do zmieniania wartości na przeciwną w każdym kroku, dlatego też bardzo rzadkie są sytuacje, w których taka sama wartość utrzymuje się przez dwa kroki lub dłużej; tego typu ciągi losowe nazywa się niekiedy szumem błękitnym.

Przesuńmy się w czasie o jakieś 3500 lat. W połowie XX wieku brytyjski hydrolog, Howard Hurst, pracował nad projektem Wielkiej Tamy w Asuanie. Egipt postanowił przegrodzić Nil potężną tamą, aby mieć stałe źródło wody, a jeszcze energię elektryczną, której szybko rozwijający się kraj bardzo potrzebował. Rzecz w tym, że nie można było zbudować tamy ani zbyt niskiej, bo obfity wylew by ją przelał, powodując katastrofę, ani zbyt wysokiej, bo jej budowa byłaby bardzo kosztowna i ciągnęłaby się dłużej, niż Egipt mógł sobie na to pozwolić. Tama powinna też utrzymać zapas wód do wykorzystania w roku niskich opadów. Pożądana wysokość tamy zależała od spodziewanych najwyższych wód Nilu. Tylko jak oszacować, a co ważniejsze, przewidzieć wysokość wylewu rok do roku?

Hurst posłużył się historycznymi danymi o corocznych poziomach Nilu, pieczołowicie gromadzonymi w średniowieczu przez arabskich władców Egiptu. Okazało się, że wykazują one długoczasowe korelacje, zupełnie jak w biblijnej opowieści o Józefie. Hurst opracował matematyczny model tego zjawiska, a także wprowadził parametr – zwany dziś wykładnikiem Hursta – stanowiący jego ilościową miarę, przybierający wartości z przedziału $(0,1)$. Wykładnik Hursta $H = 0,5$ odpowiada „prawdziwie losowemu” ciągowi bez żadnych zależności czasowych (środkowa krzywa powyżej). Wykładnik Hursta $H > 0,5$ odpowiada „efektowi Józefa” (najniższa krzywa na rysunku powyżej, $H = 0,85$). Wykładnik Hursta H mniejszy od $0,5$ odpowiada przypadkowi, w którym ciąg losowy ma tendencję do zmiany wartości na przeciwną w każdym kroku (najwyższa krzywa na rysunku powyżej, $H = 0,15$).



Dane, z których korzystał Howard Hurst: Najniższe poziomy Nilu w latach 622–1281

Wyposażony w tę wiedzę, Hurst mógł zaproponować najbardziej odpowiednią i bezpieczną wysokość tamy w Asuanie.

Później okazało się, że tego typu długoczasowe zależności dotyczą nie tylko wylewów Nilu, ale też zjawisk hydrologicznych w innych rzekach i zbiornikach wodnych (na przykład dzienne przepływy wody w Warcie tworzą ciąg o $H \approx 0,84$ [2]), w ilości plam słonecznych, w układach słoje (rocznych przyrostów) drzew, w ruchu ulicznym, telekomunikacyjnym i internetowym, w falach mózgowych, w pewnych procesach ekonomicznych i finansowych, a także w jeszcze innych sytuacjach. Procesy losowe prowadzące do występowania długoczasowych korelacji nazywane są *szumami fraktalnymi*. Badanie takich procesów i ich wpływu na wiele zjawisk jest ważnym zagadnieniem leżącym gdzieś na styku matematyki stosowanej, fizyki i różnych nauk szczegółowych.

Nie wiemy, czy patriarcha Józef rzeczywiście istniał – niektórzy utożsamiają go z Imhotepem, wezyrem Egiptu, lekarzem i budowniczym piramidy schodkowej faraona Dzesera, ale to raczej niemożliwe – ale jego opisana w Biblii historia uczy nas dwóch rzeczy: Po pierwsze, już w głębokiej starożytności

ludzie zdawali sobie sprawę z istnienia długoczasowych korelacji w ważnych zjawiskach przyrodniczych. Po drugie, że w latach prosperity należy oszczędzać, aby przygotować się na nadchodzące lata niedostatku. Pod tym względem Józef wykazał się wyjątkową przezornością, przeciwną do „naturalnej” skłonności wielu ludzi – a nawet całych państw! – aby cieszyć się z dzisiejszego dostatku i nie martwić się, co będzie w przyszłości, gdy, na przykład, światowa koniunktura gospodarcza się odwróci lub wystąpią nieoczekiwane zakłócenia. To bardzo krótkowzroczna, wręcz niebezpieczna polityka. Biblia, poprzez przykład patriarchy Józefa, uczy nas, że nie tak powinniśmy postępować.

Literatura

- [1] *Księga Rodzaju* 41: 25–36.
- [2] M. Radziejewski, Z.W. Kundzewicz, *Fractal analysis of flow of the river Warta*, *Journal of Hydrology* **200**, 280 (1997).