

Wyprowadzanie promieniowania Hawkinga Część II. Mechanika kwantowa oraz statystyczna stanów fotonowych

Grzegorz Koczan¹

Wydział Technologii Drewna SGGW,
Katedra Nauki o Drewnie i Ochrony Drewna, Katedra Fizyki

Jeżeli coś można w ogóle zrozumieć, można to też zrozumiale wyłożyć.
Albert Einstein

W części I zostały wprowadzone stacjonarne orbity fotonowe wokół czarnej dziury tworzące sferę fotonową w opisie OTW (Ogólnej Teorii Względności) lub kulę w opisie GN (Grawitacji Newtona). W części II orbity fotonowe są kwantowane względem momentu pędu i energii w elementarnym języku liczb kwantowych. Następnie na podstawie tych skwantowanych stanów wykonane jest autorskie wyliczenie statystycznej entropii czarnej dziury w ujęciu Boltzmannna. W kolejnym kroku z definicji statystycznej obliczana jest temperatura fotosfery czarnej dziury. Rachunki wykonane z mniejszą dokładnością prowadzą do entropii Hawkinga, zaś zwiększenie dokładności prowadzi do entropii gazu fotonowego promieniowania Plancka ciała doskonale czarnego. W tym alternatywnym wariancie promieniowania Hawkinga entropia i temperatura zależą od połówkowych potęg masy $S \propto M^{3/2}$, $T \propto 1/M^{1/2}$. Zależności te prowadzą do stałej i ogromnej mocy promieniowania $P \approx 10^{51}$ W, która jest tylko o jeden rząd wielkości mniejsza od mocy Plancka $P_P \approx 10^{52}$ W. Tak dużych mocy nie obserwuje się w całym Wszechświecie, jednakże znane są kwazary, których moc dzięki czarnym dziurom osiąga wartość rzędu 10^{41} W. Opisane w ostatnim rozdziale rozważania czarnej dziury z ciężką fotosferą sugerują, że promieniowanie może zależeć od energii zgromadzonej wokół czarnej dziury, a w szczególności może mieć mniejszą moc i jednocześnie wyższą temperaturę widmową.

Wstęp

Wprowadzenie fotosfery czarnej dziury zbliża promieniowanie Hawkinga do promieniowania ciała doskonale czarnego Plancka wydobywającego się z wnęki rezonansowej. Podstawą rachunków dla fotosfery czarnej dziury jest obliczenie entropii. W części I użyta została termodynamiczna definicja Clausiusa (26) entropii:

$$dS = \frac{dE + pdV}{T} \geq \frac{\delta Q}{T} \quad (57)$$

¹ gkoczan@fuw.edu.pl, grzegorz_koczan@sggw.pl, gkoczan@poczta.onet.pl

Zwykła forma (26) definicji Clausiusa uważana jest za niedostatecznie ogólną, jednakże forma (57) umożliwia jej stosowanie również dla procesów nieodwracalnych, przynajmniej takich jak rozprężanie w próżnię. Niniejsza część pracy bazuje jednak na statystycznej definicji entropii Boltzmann. W myśl tej definicji entropia jest proporcjonalna do logarytmu naturalnego z całkowitej liczby $\overline{\Omega}$ mikrostanów, mogących realizować dany makrostan o energii E :

$$S = k_B \ln \overline{\Omega} \quad (58)$$

Celowo użyto tutaj oznaczenia mocy zbioru zdarzeń elementarnych znanego ze szkolnej teorii prawdopodobieństwa. Wzór (58) był wielkim osiągnięciem Boltzmann, czego wyrazem jest umieszczenie tego wzoru na grobie uczonego (rys. 7).



Rys. 7. Grób Boltzmann z statystyczną formułą entropii $S = k \log W \equiv k_B \ln \Omega$
(fot. Janez Stare: <http://graves.mf.uni-lj.si/graves/623/ludwig-boltzmann>)

Okazuje się, że w nauce istnieje jeszcze inna bardziej szczegółowa formuła na entropię, którą można nazywać entropią Gibbsa-Shannona:

$$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i \quad (59)$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich mikrostanach o prawdopodobieństwie p_i . Formuła (59) jest stosowana nie tylko w fizyce, ale również w teorii informacji oraz czystej statystyce (z pominięciem stałej wymiarowej i czasem z logarytmem o podstawie 2). Jeżeli jednak za Boltzmannem przyjmiemy, że wszystkie mikrostany realizujące makrostan są równoprawdopodobne (jak

w prawdopodobieństwie klasycznym), to entropia Gibbsa-Shannona przechodzi w entropię Boltzmanna:

$$S = -k_B (p \ln p) \cdot \bar{\Omega} = -k_B \ln \bar{\Omega}^{-1} = k_B \ln \bar{\Omega} \quad (60)$$

Subtelności entropii według Boltzmanna i Gibbsa oraz pośrednio Shannona (ze względu na podobieństwo formuł) dotyczy praca [19]. Czytelnicy Fotonu mieli już okazję kojarzyć formułę (59) z nazwiskami Gibbsa i Shannona [20]. Natomiast inna praca w Fotonie [21] nie odnosi się do Gibbsa, a jedynie do entropii Shannona w teorii informacji.

Pojęcie entropii czarnej dziury jako pierwszy zapostulował w roku 1973 Bekenstein [22]. Podał on formuły zarówno na entropię i na temperaturę czarnej dziury, które różnią się od formuł Hawkinga czynnikami bezwymiarowymi. W przypadku entropii czynnik ten wynosił $\ln 2/(2\pi) \approx 1/9$. Czynnik dla temperatury zależał od obrotów czarnej dziury², a przy ich braku wynosił $2\pi/\ln 2 \approx 9$. Oczywiście Hawking powoływał się wielokrotnie na pracę Bekensteina. W związku z tym entropię czarnej dziury określa się często mianem entropii Bekensteina-Hawkinga³. Tego dwuczłonowego nazewnictwa przyjęło się nie odnosić do temperatury i samego promieniowania czarnej dziury. Warto jednak wiedzieć, że wkład Bekensteina był większy niż to się zwyczajowo utarło, ale dotyczył on głównie termodynamiki czarnych dziur. Natomiast główny wkład Hawkinga polegał na obliczeniach kwantowo-polowych w czasoprzestrzeni zakrzywionej, które pozwoliły poprawić stałe bezwymiarowe dla entropii i temperatury czarnej dziury. Oryginalne wyprowadzenie Hawkinga znajduje się przede wszystkim w dwóch jego pracach z 1975 i 1976 roku [13, 23]. Prace te nie są jednak takie proste do prześledzenia, warto więc zapoznać się z bardziej szczegółową i obszerną pracą DeWitta [24], na którą powoływał się sam Hawking [11] w charakterze potwierdzenia swoich wcześniejszych obliczeń. Mimo wszystko wyprowadzenia tego typu rzadko są obecnie prezentowane na forum publicznym, nawet dla specjalistów. Przykładowo z materiałów online autorowi udało się znaleźć tylko jeden wykład przedstawiający trudne wyprowadzenie Hawkinga. Wykład wygłosił w dużym ośrodku indyjskim hinduski profesor Gautam Mandal z Bombaju [25]. W sieci dostępne są również kilkuczęściowe wykłady Mandala wprowadzające do promieniowania Hawkinga i wykładu głównego. Znacznie prostsze podejście do wyprowadzenia przedstawił na prezentacji online Amerykanin Dermot O'Reilly [26]. Jednakże jego prezentacja przedstawia jedynie heurystyczne

² Zależność temperatury Bekensteina od momentu pędu czarnej dziury w rozwiązaniu Kerra jest intrygująca i przypomina ideę Zeldowicza i Starobińskiego, według której to właśnie obrót umożliwia emisję cząstek.

³ Skrót BH dla tych nazwisk jest zgodny z angielskim skrótem „bh” dla czarnej dziury. W niniejszej pracy rozróżniane są entropie i temperatury Bekensteina i Hawkinga, ale tylko ze względu na inne stałe normalizacyjne.

podejście Hawkinga (lub Bekensteina) rozważane w poprzedniej części niniejszego artykułu.

W latach 90-tych pojawiły się wyprowadzenia entropii czarnych dziur oparte na supersymetrycznych teoriach strun. Idea ta została opisana np. w 1993 przez Susskinda [27]. Trzy lata później w 1996 roku pojawiły się już pełne obliczenia i wzory. Najpierw zostały one wykonane przez Stromingera i Vafę w modelu pięciowymiarowym [28]. Następnie Maldacena i Strominger zaadaptowali obliczenia do czterech wymiarów [29]. Szczegółowy opis teorii można znaleźć w późniejszej pracy Sato [30]⁴. Trudno jednak stwierdzić czy teoria strun dowodzi entropii Hawkinga, czy też odwrotnie promieniowanie Hawkinga wskazuje na zasadność teorii strun i umożliwia wybór właściwych wariantów teorii strun.

W niniejszej części artykułu przedstawiona zostanie jeszcze inna metoda obliczania entropii czarnej dziury. Oparta jest ona na zliczaniu skwantowanych stanów fotonowych egzosfery. Rozważane są dwie metody: kwantowanie powierzchniowe fotosfery oraz kwantowanie objętościowe.

3. Kwantyzacja orbit fotonowych czarnej dziury

Promieniowanie Hawkinga ma naturę kwantową, więc do jego zrozumienia nie wystarczy nawet biegła znajomość OTW. Potrzebna jest jeszcze kwantowa teoria pola. Niniejsza praca ma na celu przeprowadzenie kwantyzacji orbit fotonowych na poziomie niewiele odbiegającym od kwantyzacji atomu wodoru znanego ze szkoły [31]. Podobnie jak w części I rozważone zostaną dwa podejścia, czyli kwantyzacja orbit opisanych przez GN oraz orbit opisanych przez OTW. Ze względu na jakościową różnicę egzosfer (kula i sfera) w obu teoriach również kwantyzacja będzie miała dwa oblicza: objętościowe i powierzchniowe.

Celem kwantyzacji orbit fotonowych jest znalezienie skwantowanych wartości energii (kinetycznej) fotonów, czyli ich widma liniowego⁵. W tym celu zostanie wykorzystany związek energii z momentem pędu i uniwersalna kwantyzacja momentu pędu. Należy więc rozpocząć od związku między energią i pędem fotonu. W gruncie rzeczy ma on naturę relatywistyczną (nawet ultrarelatywistyczną), ale może zostać wyprowadzony z samych związków dualizmu korpuskularno-falowego (Plancka, de Broglie'a⁶) oraz klasycznego wzoru dla fal:

$$E_f = hf, \quad p = \frac{h}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{c}{f} \quad \Rightarrow \quad E_f = pc \quad (61)$$

⁴ W tym miejscu dziękuję prof. dr. hab. J. Pawełczykowi za konsultacje odnośnie historii obliczeń entropii czarnych dziur w teorii strun.

⁵ W sensie energetycznych poziomów fotonowych, a nie ich różnic jak w drugim postulacie Bohra.

⁶ W kontekście fotonów wzór ten został w rzeczywistości wprowadzony przez Einsteina i wykazany doświadczalnie przez Comptona.

Warto wiedzieć, że z rozważań z samej mechaniki nierelatywistycznej wyszłoby inaczej:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}, \quad p = mv \quad \Rightarrow \quad E_k = \frac{pv}{2} \quad \xrightarrow{v=c} \quad E_f^* = \frac{pc}{2} = \frac{E_f}{2} \quad (62)$$

Oczywiście dla fotonów prawdziwa jest relacja (61), zarówno kwantowo i relatywistycznie, ale nie jest do końca jasne czy relacji (62) nie powinno się konsekwentnie stosować w rozważaniach nierelatywistycznych celem uniknięcia teorii hybrydy. Tak to też będzie robione w późniejszej części tej pracy.

Korzystając z faktu, że moment pędu zależy od jego składowej stycznej (np. do sfery) mamy:

$$L = r p_\tau \quad \Rightarrow \quad p_\tau = L/r \quad (63)$$

Prowadzi to do poszukiwanej zależności energii fotonu od jego momentu pędu:

$$E_f^2 = (p_\tau^2 + p_r^2)c^2 = \frac{L^2 c^2}{r^2} + p_r^2 c^2 \quad \Rightarrow \quad E_f = c \sqrt{\frac{L^2}{r^2} + p_r^2} \quad (64)$$

Przy kwantowaniu powierzchniowym na sferze fotonowej nie występuje składowa radialna pędu ($p_r = 0$), zaś moment pędu przyjmuje maksymalną wartość dla danej energii:

$$E_f = c \sqrt{\frac{L^2}{r^2} + p_r^2} = \frac{L_{\max} c}{r} \quad (65)$$

Okazuje się, że ostatnie wyrażenie będzie również prawdziwe dla orbit eliptycznych przy kwantowaniu objętościowym, gdyż orbity te z Definicji 2.1 (w pierwszej części artykułu) mają taką samą energię. Tutaj różnica będzie nie tyle w możliwych wartościach energii, ale w liczbie stanów o tej samej energii. Pora teraz przejść do podręcznikowej (np. [31, 32]) kwantyzacji wartości momentu pędu lub kwadratu momentu pędu (rys. 9 i 10):

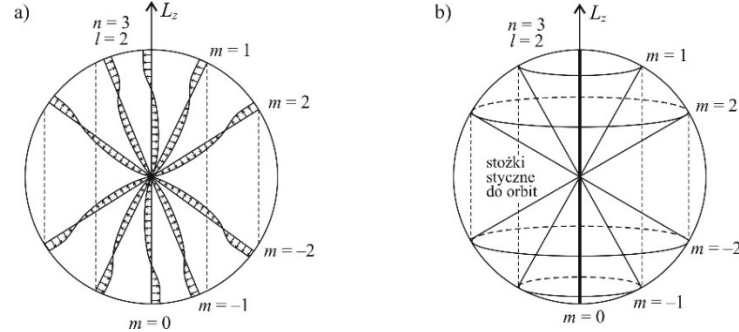
$$L_l^2 = l(l+1)\hbar^2, \quad L_l = \sqrt{l(l+1)}\hbar, \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (66)$$

Oprócz wartości momentu pędu kwantyzacji podlega również tylko jedna dowolnie wybrana składowa momentu pędu (rys. 8), np. L_z :

$$L_z = m\hbar, \quad m = \underbrace{-l, \dots, -1, 0, 1, \dots, l}_{2l+1} \quad (67)$$

Ostatnim elementem kwantyzacji jest dwuwartościowa kwantyzacja spinu fotonu lub inaczej jego polaryzacji (rys. 9). Foton jest bozonem o spinie 1:

$$s = \sqrt{1(1+1)}\hbar, \quad s_z = m_s \hbar, \quad m_s = \underbrace{-1, 1}_2; \quad \left(m_s = \underbrace{-1, 0, 1}_3 \right) \quad (68)$$



Rys. 8. Kwantowanie momentu pędu (liczbą m) występujące zarówno w kwantowaniu powierzchniowym, jak i objętościowym orbit fotonowych można zobrazować kątami nachylenia płaszczyzn tych orbit do rozpatrywanej osi: a) skwantowane ustawienia orbit prostopadłych do kierunku o polaryzacji stycznej, b) linia i stożki styczne do dozwolonych płaszczyzn orbit

Zmniejszona z 3 do 2 liczba polaryzacyjnych stopni swobody fotonu wynika z faktu, że fale elektromagnetyczne są falami poprzecznymi i nie posiadają podłużnego modu polaryzacyjnego. Dzięki temu sytuacja znowu jest analogiczna do elektronów w atomie i do ich spinu. Natomiast na sferze fotonowej być może należy również odrzucić polaryzację radialną, która mogłaby prowadzić do dużej niestabilności orbity (lub którą można by zaliczyć już do orbit niekołowych).

Na podstawie kwantyzacji (66) widać, że energia (65) jest skwantowana według orbitalnej (pobocznej) liczby kwantowej l w kwantyzacji powierzchniowej sfery fotonowej, a w kwantyzacji objętościowej według jej maksymalnej wartości l_{\max} dla danej energii. Można wprowadzić zatem główną liczbę kwantową następującym przybliżeniem do liczby naturalnej:

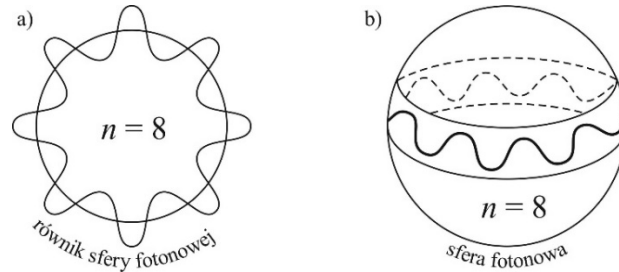
$$\sqrt{l_{\max}(l_{\max} + 1)} = l_{\max} \sqrt{1 + \frac{1}{l_{\max}}} \approx l_{\max} + \frac{1}{2} \approx l_{\max} + 1 =: n \quad (69)$$

gdzie: $n = 1, 2, 3, \dots$. Drugie przybliżenie w (69) podyktowane jest tradycją dla atomu wodoru (choć tutaj można by też przyjąć $n = l_{\max}$). Natomiast pierwsze przybliżenie wynika z rozwinięcia funkcji pierwiastkowej do wyrazów pierwszego rzędu. Można zatem ostatecznie zapisać skwantowaną energię w obu kwantyzacjach:

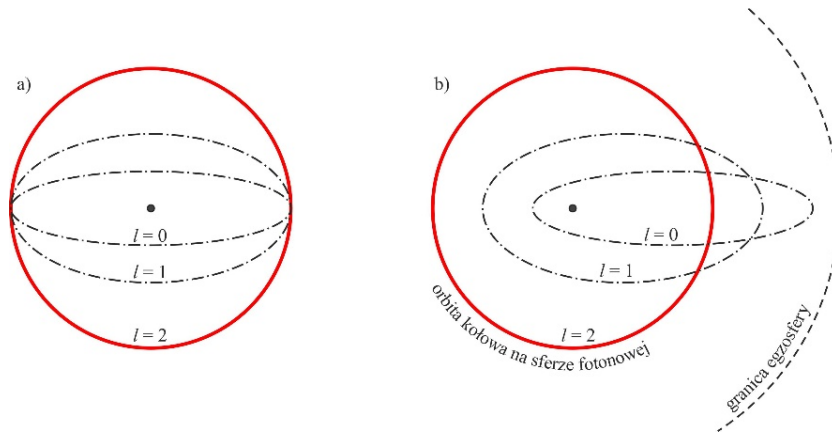
$$E_n = \sqrt{l_{\max}(l_{\max} + 1)} \frac{\hbar c}{r} \approx \left(l_{\max} + \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar c}{r} \approx n \frac{\hbar c}{r} \quad (70)$$

Okazuje się, że ostatecznie przyjęte przybliżenie można interpretować zwykłą kwantyzacją orbit kołowych typu Plancka-Bohra-de Broglie'a (rys. 9):

$$E_n = hf_n = \frac{hc}{\lambda_n} = \frac{hc}{2\pi r / n} = n \frac{\hbar c}{r} \quad (71)$$



Rys. 9. Kwantyzacja powierzchniowa orbit na sferze fotonowej kwantuje jednocześnie energię i moment pędu ($n = l+1$): a) polaryzacja prostopadła, b) polaryzacja styczna



Rys. 10. Kwantowanie objętościowe w opisie GN dla fotonowych orbit eliptycznych o równej energii ($n=3$), ale różnych momentach pędu ($l = 0, 1, 2$): a) porównanie kształtu orbit, b) porównanie położenia orbit znajdujących się w jednej płaszczyźnie

Pozostało jeszcze zliczenie sumarycznej liczby orbitali w kwantowaniu objętościowym (rys. 10):

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = \frac{(2 \cdot 0 + 1) + [2(n-1) + 1]}{2} \cdot n = n^2 \quad (72)$$

gdzie został wykorzystany wzór na sumę ciągu arytmetycznego. Uwzględnienie dwóch polaryzacji fotonu daje liczbę degeneracji stanu energii równą $g_n = 2n^2$. W przypadku kwantyzacji powierzchniowej na sferze liczba orbitali (różnych wartości m) wynosi tylko $2l_{\max} + 1 \approx 2n$, gdyż każda kołowa powłoka składa się z jednej podpowłoki⁷. Uwzględnienie obu polaryzacji dałoby tutaj liczbę degeneracji $g_n \approx 4n$.

⁷ Formalnie ścisła wartość $2n-1$ jest tutaj mniej dokładnym przybliżeniem niż $2n$.

Podsumowanie obu kwantyzacji znajduje się w Tabeli 1.

Tabela 1. Charakterystyka objętościowej i powierzchniowej metody kwantowania energii stacjonarnych orbit fotonowych w ujęciu GN oraz OTW, z uwzględnieniem degeneracji

Charakterystyka	Rodzaj kwantyzacji orbit fotonowych	
	Objętościowa	Powierzchniowa
Typ teorii grawitacji	GN	OTW (GN)
Obszar kwantowania	Egzosfera $0 < r \leq R_S$	Sfera fotonowa
Promień bazowy	$r = 0,5R_S$	$r = 1,5R_S$ ($r = 0,5R_S$)
Energia kinetyczna fotonów	$E_n = \sqrt{l_{\max}(l_{\max} + 1)} \frac{\hbar c}{r} \approx n \frac{\hbar c}{r}$	
	$E_n^* = E_n / 2$ ($\Leftrightarrow r^* = R_S$)	
Degeneracja	$g_n = 2n^2$	$g_n = 4l_{\max} + 2 \approx 4n$
	-	$g_n^* = 2l_{\max} + 1 \approx 2n$

Warto zauważyć, że dwa razy mniejsza nierelatywistyczna energia fotonów E_f^* (62) oraz dwa razy mniejszy promień małego horyzontu wzajemnie się kompensują, jakby promień wynosił $r = R_S$. W przypadku kwantyzacji powierzchniowej na sferze fotonowej w opisie OTW (ale także GN) być może należy rozważyć jedynie polaryzację styczną, czyli mniejszą degenerację g_n^* . Po prostu polaryzacja radialna jakby wycieka ze sfery i orbity z taką polaryzacją mogą być bardziej niestabilne.

Na zakończenie kwantyzacji warto zauważyć, że udało się wywieść wszystkie relacje bez skomplikowanych operatorów (laplasjanu, kwadratu momentu pędu) oraz bez funkcji falowych (harmonik sferycznych). Oczywiście wykorzystane zostały gotowe wyniki i analogie, ale kwantowanie energii zostało potwierdzone warunkiem dla orbit zamkniętych. Warto dodać, że w kwantowaniu na sferze fotonowej OTW wykorzystano jej euklidesowy charakter (w sensie parametru r i geometrii zewnętrznej) oraz uniwersalny postulat o stałości lokalnej prędkości światła. Wobec tego r użyte nieco *ad hoc* w momencie pędu znalazło swoje ukonstytuowanie po zapisaniu warunku dla orbit zamkniętych, który korzystał z wzoru na obwód sfery.

Energia potencjalna fotonów w czasoprzestrzeni Schwarzschilda

Dotychczas rozważana energia fotonów w tym rozdziale była energią kinetyczną. Natomiast w rozdziale 1 części I występowała również energia całkowita i wspomniano, że można z niej wydzielić energię potencjalną. W rzeczywistości dla fotonów staje się to bardziej naturalne z zastosowaniem mechaniki kwantowej.

Rozpocznijmy jednak od analizy energii cząstek z niezerową masą spoczynkową:

$$E_c = E_0 + E_k + E_p \quad (73)$$

gdzie: E_c – energia całkowita, E_0 – energia spoczynkowa, E_k – energia kinetyczna, E_p – potencjalna energia grawitacyjna. Formuły na energię spoczynkową i kinetyczną są tutaj formalnie identyczne jak w szczególnej teorii względności:

$$E_0 = m_0 c^2 \quad , \quad E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} - m_0 c^2 \quad (74)$$

Całkowita energia relatywistyczna posiada zaś oprócz czynnika Lorentza analogiczny czynnik grawitacyjny Schwarzschilda [7]:

$$E_c = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \sqrt{1 - R_s / r} \quad (75)$$

Wobec powyższego energia potencjalna cząstki wynosi:

$$E_p = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} (\sqrt{1 - R_s / r} - 1) \quad (76)$$

W przypadku fotonów dla których $m_0 = 0$ i $v = c$ można uznać, że w powyższych wzorach symbol nieoznaczony $0/0$ jest określony w mechanice kwantowej wyrażeniem Plancka hf . Dostajemy zatem relacje dla fotonu:

$$E_k = hf = E_f =: E \quad , \quad E_c = hf \sqrt{1 - R_s / r} \quad (77)$$

Postać energii całkowitej zapewnia jej zachowanie np. przy oddalaniu się fotonu od centrum pola. Wówczas dylatacja czasu zmniejsza częstotliwość fotonu, ale jest to rekompensowane zwiększającym się czynnikiem Schwarzschilda. Wobec braku energii spoczynkowej dla fotonów jego energia potencjalna wyraża się różnicą wyrażeń w (77):

$$E_p = hf (\sqrt{1 - R_s / r} - 1) \quad (78)$$

Ta energia potencjalna podobnie jak w wersji cząstki masywnej (76) i w teorii nierelatywistycznej jest ujemna. Jednakże energie całkowite (75) i (77) są nieujemne, co nie ma miejsca w opisie grawitacji Newtona.

W ramach przykładu użycia wzorów (77) i (78) zastosujemy je do fotonu o energii kinetycznej $E = hf$ znajdującego się na sferze fotonowej ($r = 1,5R_s$):

$$E_c = \frac{E}{\sqrt{3}} \quad , \quad E_p = -\frac{3 - \sqrt{3}}{3} E \quad (79)$$

Pierwszy z tych związków przypomina relację między temperaturą obserwowalną, a temperaturą lokalną fotosfery z Obserwacji 1 w I części artykułu. Zgodność ta nie jest przypadkowa i jak zobaczymy, czyni całą teorię bardziej konsystentną.

4. Statystyka i kombinatoryka stanów fotonowych

W poprzednich rozdziałach została opisana geometria oraz kwantyzacja orbit fotonowych wokół czarnej dziury. Można zatem przystąpić do zliczania tych stanów dla określonej sumarycznej energii kinetycznej E . Podstawowy postulat fizyki statystycznej głosi, że wszystkie mikrostanu o takiej samej energii całkowitej są równoprawdopodobne. Zatem liczba takich wszystkich stanów $\overline{\Omega}$ jest bardzo ważną wielkością⁸, która determinuje prawdopodobieństwo makrostanu. Doskonale zdawał sobie z tego sprawę Boltzmann, który na tej liczbie oparł swoją elementarną definicję entropii (58):

$$S = k_B \ln \overline{\Omega}(E) = k_B \ln \overline{\Omega}_c(E_c) \quad (80)$$

Jak widać zliczanie stanów i wartość entropii nie zależy od wyboru parametryzacji energią kinetyczną czy całkowitą⁹. W formule Boltzmannu powinny być uwzględniane wszystkie możliwe stany niezależnie od liczby fotonów jakie zawierają. W tym sensie podejście to jest nieco ogólniejsze (inne) niż w tzw. układzie mikrokanonicznym, gdzie liczba cząstek musi być określona. Również jest inne niż w tzw. wielkim układzie kanonicznym, gdzie z góry dana jest temperatura i potencjał chemiczny. Mowa zatem o podejściu, które można by nazwać nieco przewrotnie wielkim układem mikrokanonicznym i które jest zgodne z ideą Boltzmannu.

Zgodnie z (70) i (71) energia występuje w porcjach, czyli kwantach energii równych E_1 . Zatem liczba tych kwantów (tutaj w ogólności nie jest ona równa liczbie fotonów) wynosi:

$$N = E / E_1 \quad , \quad E_1 = \hbar c / r \quad (81)$$

Zatem w rozważanym stanie fotony mogą znajdować się co najwyżej na powłoce $n = N$. Wobec tego warunek na liczby obsadzeń k_i fotonów na i -tych powłokach ($i \equiv n$) można zapisać następująco:

$$1k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 + \dots + Nk_N = N \quad ; \quad k_i = 0, 1, \dots, N \quad (82)$$

Znalezienie wszystkich takich rozkładów nie jest rzeczą prostą, co więcej nie istnieją na to jawne wzory. Zagadnienie sprowadza się do funkcji partycji $f(N)$ ilości rozkładów liczby N na sumy liczb naturalnych (przy czym iloczyny rozpisujemy na sumy np. $2k_2 = 2+2+\dots+2$). Do obliczania wartości funkcji partycji $f(N)$ istnieją jedynie niepraktyczne wzory redukcyjne. Oprócz tego znane są algorytmy i programy komputerowe, które obliczają wartość tej funkcji oraz określone rozkłady liczbowe. Jednak nie trzeba się bać wypisania takich partycji na

⁸ Zwykle nie używa się tu dwóch kresek dla mocy zbioru. Na grobie Boltzmannu użyto zaś odpowiednika łacińskiego Ω czyli W , a niekiedy stosowany jest też symbol Γ .

⁹ Zależność ta pojawi się dopiero na poziomie temperatury, co można łatwo zinterpretować.

piechotę dla niezbyt dużych $N=10, 11, 12$. Cóż to jest tuzin kwantów wobec miliarda miliardów, ale to może wystarczyć, jeśli postąpi się dostatecznie sprytnie i dopisze szczęście¹⁰. Przecież sami wobec Wszechświata jesteśmy pyłkiem pyłku, a na osi czasu jego istnienia nasze życie to niemal punkt – chwila. Mimo tej nikłej skali ludzie są w stanie poznawać tajemnice Wszechświata. Ponadto numery powłok 10, 11, 12 są już wyższe niż najwyższe numery powłok obsadzanych w całym układzie pierwiastków Mendelejewa (gdzie największa wartość to $n=7$)¹¹. Okazuje się, że liczebności partycji dla liczb 10, 11, 12 wynoszą odpowiednio 42, 56 i 77. Niby nie dużo, ale wszystkie je trzeba wpisać do arkusza kalkulacyjnego, gdzie rozpoczyna się dopiero właściwy rachunek. Oto wszystkie 42 partycje dla liczby 10 począwszy od jednocząstkowej poprzez dwucząstkową, aż po dziesięściocząstkową (serie równoliczne oddzielono średnikami):

$$\begin{aligned}
 &10; \\
 &1+9=2+8=3+7=4+6=5+5; \\
 &1+1+8=1+2+7=1+3+6=1+4+5=2+2+6=2+3+5=2+4+4=3+3+4; \\
 &1+1+1+7=1+1+2+6=1+1+3+5=1+1+4+4=1+2+2+5=1+2+3+4=1+3+3+3= \\
 &2+2+2+4=2+2+3+3; \\
 &1+1+1+1+6=1+1+1+2+5=1+1+1+3+4=1+1+2+2+4=1+1+2+3+3=1+2+2+2+3= \\
 &2+2+2+2+2; \\
 &1+1+1+1+1+5=1+1+1+1+2+4=1+1+1+1+3+3=1+1+1+2+2+3=1+1+2+2+2+2; \\
 &1+1+1+1+1+1+4=1+1+1+1+1+2+3=1+1+1+1+2+2+2; \\
 &1+1+1+1+1+1+1+3=1+1+1+1+1+1+2+2; \\
 &1+1+1+1+1+1+1+2; \\
 &1+1+1+1+1+1+1+1+1. \tag{83}
 \end{aligned}$$

Dla każdej takiej partycji należy obliczyć w zależności od degeneracji powłok liczbę wszystkich możliwości obsadzeń fotonowych. Przykładowo jeżeli na powłoce n o degeneracji g_n znajduje się k_n fotonów to ich liczbę obsadzeń liczy się z kombinacji z powtórzeniami:

$$\bar{C}_{g_n}^{k_n} = C_{g_n+k_n-1}^{k_n} = \left(\binom{g_n}{k_n} \right) = \binom{g_n+k_n-1}{k_n} = \frac{(g_n+k_n-1)!}{k_n!(g_n-1)!} \tag{84}$$

Niech liczba degeneracji oznacza g_n ponumerowanych pudełek, a liczba fotonów k_n nierozróżnialnych kul. Aby wyjaśnić wzór na liczbę możliwości rozmieszczenia wszystkich kul w pudełkach warto zastąpić g_n pudełek przez g_n-1 przegródek równoważnych tymże pudełkom. Wówczas wraz z kulkami mamy do przepermutowania g_n+k_n-1 elementów (silnia w liczniku). Kulki są nierozróżnialne, więc należy podzielić wynik przez liczbę ich permutacji. Pudełka są różróżnialne (ponumerowane), ale przegródki już nie, więc również przez liczbę ich

¹⁰ W sensie szczególnego przypadku wartości liczbowych szczęście poniekąd dopisze, ale ogólna teoria będzie wymagała poważniejszych obliczeń numerycznych.

¹¹ Pomijając stany silnie wzbudzone.

permutacji należy ostatecznie podzielić dotychczasowe wyrażenie uzyskując (84). Dla partycji 1+1+2+3+3 przy kwantowaniu objętościowym należy trzykrotnie użyć wzoru (84) i zastosować regułę mnożenia:

$$\left(\binom{2 \cdot 1^2}{2}\right) \cdot \left(\binom{2 \cdot 2^2}{1}\right) \cdot \left(\binom{2 \cdot 3^2}{2}\right) = \binom{3}{2} \cdot \binom{8}{1} \cdot \binom{19}{2} = 4104 \quad (85)$$

Dla partycji 10-tki należy analogicznie postąpić tak 42 razy w arkuszu kalkulacyjnym i zsumować uzyskane liczby. Podobne obliczenia zostały przeprowadzone dla 56 partycji 11-tki oraz 77 partycji 12-tki. Tabela 2 przedstawia uzyskane wyniki dla trzech różnych degeneracji powłok.

Zgodnie z oczekiwaniem funkcja liczby stanów $\overline{\overline{\Omega}}(N)$ powinna¹² przypominać funkcję wykładniczą lub inaczej ciąg geometryczny:

$$\overline{\overline{\Omega}}(N) \approx B q^N \quad (86)$$

W Tabeli 2 został w prosty sposób wyznaczony iloraz q (podstawa potęgi funkcji wykładniczej) z oszacowaniem jego odchylenia standardowego na podstawie błędu maksymalnego [33]:

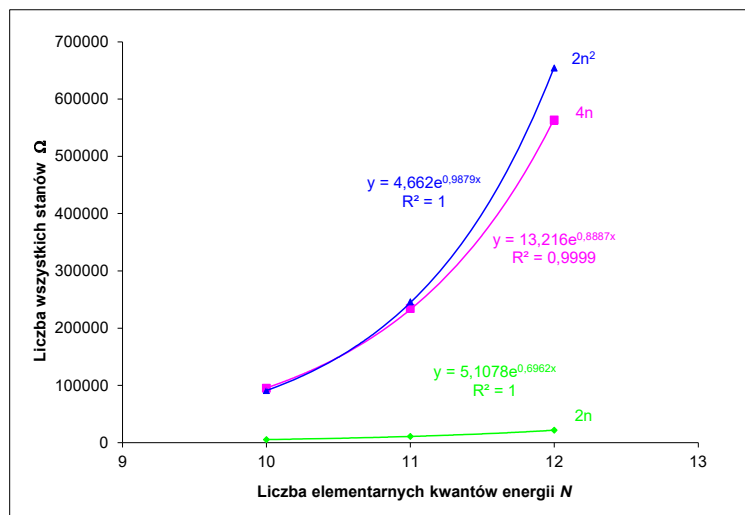
$$\sigma_q = \frac{|q_1 - q|}{\sqrt{3}} \quad (87)$$

Tabela 2. Wyniki obliczeń funkcji liczby stanów Boltzmana w zakresie od 10 do 12 kwantów energii, ze wstępną analizą. Obliczenia wykonał autor artykułu w arkuszu kalkulacyjnym Excel.

Degeneracja powłok g_n	Liczba kwantów energii N	Liczba stanów $\overline{\overline{\Omega}}(N)$	$\frac{\overline{\overline{\Omega}}(N+1)}{\overline{\overline{\Omega}}(N)}$ q_1, q_2	$\sqrt{\frac{\overline{\overline{\Omega}}(N+2)}{\overline{\overline{\Omega}}(N)}}$ q	Odchylenie standardowe σ_q
$2n$	10	5380	2,020	2,006	0,008
	11	10870	1,992	-	-
	12	21652	-	-	-
$4n$	10	95278	2,460	2,432	0,016
	11	234344	2,405	-	-
	12	563506	-	-	-
$2n^2$	10	90739	2,710	2,686	0,028
	11	245868	2,662	-	-
	12	654478	-	-	-

¹² Czasami się tak zakłada w mechanice statystycznej i czasami tak rzeczywiście wychodzi. Kształt tej zależności jest w niniejszej pracy konieczny, aby otrzymać entropię proporcjonalną do entropii Hawkinga lub Bekensteina. Mimo to zależność ta jest dalej poddana rewizji.

Wyznaczone w tabeli wartości q są zgodne z regresjami wykładniczymi przedstawionymi na wykresie (Rys. 11).



Rys. 11. Wykresy regresji wykładniczej dla funkcji liczby stanów Boltzmana w zakresie $N = 10, 11, 12$ kwantów energii fotonów dla trzech degeneracji

W poniższej tabeli obliczone podstawy potęg zostały zaokrąglone do charakterystycznych dla teorii wartości, a przybliżenia poddano analizie.

Tabela 3. Wyniki oszacowania podstawy potęgi dla funkcji liczby stanów Boltzmana dla małych argumentów i trzech przypadków degeneracji oraz doraźna analiza dokładności

Degeneracja g_n	Podstawa potęgi q dla $N=10, 11, 12$	Błąd względny $ \Delta q /q$	Wsp. zmienności σ_q/q
$2n$	$2,006 \pm 0,008 \approx 2$	0,3%	0,4%
$4n$	$2,432 \pm 0,016 \approx e^{8/9}$	0,02%	0,7%
$2n^2$	$2,686 \pm 0,028 \approx e$	1,2%	1,0%

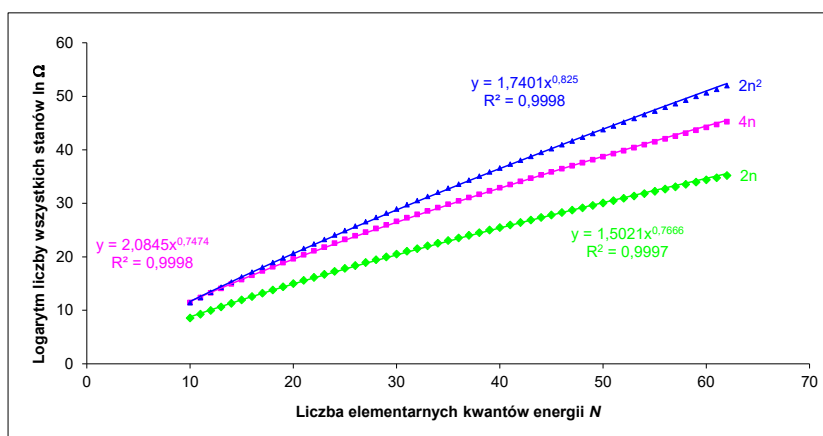
Zatem według tych uproszczonych rachunków z dokładnością 1% w kwantowaniu powierzchniowym bez polaryzacji radialnej podstawa potęgi wynosi 2, zaś w kwantowaniu objętościowym jest ona równa około e . Wartości te są korzystne dla wyprowadzenia, ale zostały obliczone dla małych N równych 10, 11 i 12.

Obliczenia dla większych wartości N wykonał w programie języka Python mój szkolny kolega informatyk Marcin Kycia. Najpierw zostały sprawdzone obliczenia wcześniej wykonane w Excelu. Po uzgodnieniu tych wyników obliczenia kontynuowano dla kolejnych liczb, aż do $N = 62$. Największa policzona liczba

stanów osiągnęła rząd wielkości $4 \cdot 10^{22}$ (czterdzieści tryliardów)¹³, a obliczane były wszystkie cyfry tych dużych liczb (patrz Tabela 6, Appendix 1). Analiza obliczeń była zaskakująca. Okazało się, że dopasowywana według (86) podstawa potęgi zamiast się ustalać to jakby malała wraz ze wzrostem N . Oczywiście oznaczało to złamanie ścisłego trendu wykładniczego. Logarytm liczby stanów, czyli w zasadzie entropia z dokładnością do stałej Boltzmana, pozwolił na znalezienie nowej zależności wykładniczo-potęgowej:

$$\ln \overline{\Omega}(N) = C \cdot N^\gamma \quad (88)$$

Zależność ta jest ogólniejsza od (86), gdyż dla potęgi $\gamma = 1$ praktycznie sprowadza się do niej ($C = \ln q$, $B=1$)¹⁴. Wykresy na Rys. 12 pokazują, że jednak $\gamma < 1$. Pełne wyniki dopasowania parametrów (88) podano w Tabeli 4.



Rys. 12. Wykresy regresji potęgowych dla logarytmu funkcji liczby stanów Boltzmana w zakresie $N=10, 11, \dots, 62$ kwantów energii fotonów dla trzech degeneracji

Tabela 4. Parametry dopasowania regresji potęgowych dla logarytmu funkcji liczby stanów Boltzmana w zakresie $N=10, 11, \dots, 62$ kwantów energii fotonów dla trzech degeneracji

Degeneracja g_n	Wykładnik potęgi γ	Stała C
$2n$	$0,767 \pm 0,002 \approx 3/4$	$1,50 \pm 0,01 \approx 3/2$
$4n$	$0,747 \pm 0,001 \approx 3/4$	$2,08 \pm 0,01 \approx 2$
$2n^2$	$0,825 \pm 0,002 \approx 33/40$	$1,74 \pm 0,01 \approx 7/4$

Są zatem co najmniej dwie drogi prowadzenia dalszych obliczeń entropii, które poprzedzimy analizą pojęcia temperatury.

¹³ Czyli tylko o jedno zero mniej od jednego mola, czy też wartości stałej Avogadro.

¹⁴ Stała B jest dalej pomijana w opisie według (86), więc nie było potrzeby wprowadzania jej w wersji addytywnej w (88).

Definiowanie temperatury czarnej dziury

Główna część metodyki liczenia entropii została już przedstawiona. Można zająć się teraz sposobem wyliczania temperatury z entropii. Już w części I artykułu została pokazana pewnego rodzaju względność temperatury czarnej dziury i to nawet w dwóch aspektach. Aspekt pierwszy jest bardziej oczywisty i dotyczy położenia obserwatora odbierającego promieniowanie Hawkinga. Drugi aspekt jest już poważniejszy i dotyczy kontrowersji wyboru pomiędzy różniczką zupełną i cząstkową w podstawowej formule definiującej temperaturę. W części II artykułu oba aspekty arbitralności temperatury są pogłębione i uściślone.

Z termodynamiki fenomenologicznej i definicji Clausiusa entropii (57) wynika formuła na temperaturę:

$$dS = \frac{dE + pdV}{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{V=const} \quad (89)$$

Pochodna cząstkowa po energii E jest tu liczona przy zachowaniu stałej objętości układu. W przypadku czarnej dziury w zasadzie oznaczałoby to praktycznie ustalenie stałej wartości promienia Schwarzschilda. W idealizowanym rozwiązaniu Schwarzschilda promień ten zależy od masy, a więc i od energii. W takim idealizowanym sztywnym układzie nie ma zatem możliwości wykonania pochodnej po energii przy stałym R_S . Wobec tego Hawking musiał w tym sensie użyć implicite pochodnej zupełnej w definicji temperatury (patrz wzór (27) w części I):

$$\frac{1}{T_H} = \frac{dS}{dE} \quad \Leftrightarrow \quad T_H = \left(\frac{dS}{dE} \right)^{-1} \quad (90)$$

W formułach Hawkinga oczywiście nadal występowały pochodne cząstkowe, ale nie ze względu na stałość R_S czy V , lecz moment pędu całej czarnej dziury i ładunek elektryczny, których tutaj nie rozważamy.

Zastosowanie statystycznej definicji Boltzmanna entropii (58) dla (89) prowadzi do statystycznej definicji temperatury:

$$\frac{1}{k_B T} = \left(\frac{\partial \ln \bar{\Omega}}{\partial E} \right)_V \quad (91)$$

Jeżeli teraz wrócimy do fotosery i stanów fotonowych na niej, to okaże się, że ich energia nie wpływa bezpośrednio na promień R_S . W tym sensie można teraz ściśle traktować pochodną cząstkową w formułach (89), (91) oraz (37) z części I:

$$\frac{1}{T^*} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{R_S} \quad (92)$$

W niniejszej pracy wszelkie modyfikacje przyjęto oznaczać za pomocą gwiazdki (*). Nie zależy jednak mylić gwiazdkowania temperatury z gwiazdkowaniem entropii, gdyż mają one zupełnie inne znaczenie¹⁵. Zależność entropii od powierzchni horyzontu i w konsekwencji od kwadratu masy sprawia, że temperatura T^* jest dwa razy większa od temperatury T_H :

$$T^* = 2T_H \quad (93)$$

Przy określaniu T_H jest tutaj przyjęte uproszczone założenie, że $E = Mc^2$, czyli że E jest energią całej czarnej dziury¹⁶. Natomiast przy liczeniu T^* nie ma potrzeby tego zakładać, gdyż E znika w wyniku różniczkowania. Ponadto relacja (93) zachodzi dla entropii w wersji (86) i w wersji (88). Rozstrzygnięcie poprawności T^* względem T_H lub odwrotnie nie jest wcale oczywiste wobec proporcjonalności wielkości M, E, R_s . Aby uniknąć wątpliwości podano w dalszej części obie wersje obliczeń dla temperatur T^* i T_H . Jednakże gdyby zastosować pochodną zupełną dla entropii gazu fotonowego Plancka (41) z części I, to w ten sposób otrzymana temperatura stanowiłaby 3/4 temperatury rzeczywistej uzyskiwanej z pochodnej cząstkowej. Natomiast oczywiście powtórzenie tych obliczeń dla promieniowania Hawkinga (40) z części I prowadzi do relacji (93). Gdyby nie analogia do C_p i C_V zaczerpnięta z termodynamiki podobne dylematy z pochodną cząstkową byłyby trudne do uchycenia [34, 35].

Okazuje się, że drugi aspekt względności temperatury lokalnej fotosfery i obserwowalnej z daleka również można opisać odpowiednią pochodną po energii. Tutaj różnica wynika nie ze sposobu różniczkowania, ale polega na wyborze innych rodzajów energii. Przykładowo, jeśli relację (92) odnosimy do fotosfery i jej energii kinetycznej, to dostajemy temperaturę lokalną fotosfery $T^* = T_{3/2}^*$, używając oznaczeń z pierwszej części artykułu. Natomiast jeśli również na fotosferze użyjemy relacji (92), ale dla energii całkowitej (79) to otrzymamy temperaturę obserwowalną przez dalekiego obserwatora:

$$\frac{1}{T_\infty^*} = \left(\frac{\partial S}{\partial E_c} \right)_{R_s} = \sqrt{3} \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{R_s} \Rightarrow T_\infty^* = \frac{T_{3/2}^*}{\sqrt{3}} \quad (94)$$

Uzyskany wynik jest innym sposobem uzyskania tezy (20) Obserwacji 1 z części I artykułu.

Obliczenia w przypadku kwantowania objętościowego

Kwantowanie objętościowe dotyczy opisu według GN, gdyż w OTW nie istnieją niekołowe orbity stacjonarne fotonów. Ponieważ jednak objętość obszaru nad horyzontem w zakrzywionej przestrzeni OTW ulega znacznemu powiększeniu

¹⁵ W pracy nie jest stosowana podwójna gwiazdka dla oznaczenia przelicznika entropii i modyfikacji temperatury.

¹⁶ Ta problematyka zostanie podjęta w rozdziale 6.

względem GN, to trzeba wykorzystać Fakt 2 z części I w formie przelicznika objętości. Konieczność użycia przelicznika objętości wynika nie tylko z objętościowej metody kwantowania, ale również ze specyfiki fotonowego gazu promieniowania cieplnego. W takim gazie fotonowym promieniowania Plancka entropia S_P jest wprost proporcjonalna do objętości, zgodnie ze wzorem (41) podanym w części I. Analogiczna relacja (40) została też podana dla promieniowania Hawkinga:

$$S_P = \frac{4\pi^2 k_B^4}{45\hbar^3 c^3} T^3 V \quad , \quad S_H = \frac{3\pi k_B^2 c^2}{\hbar^2 G} T_H V \quad \Rightarrow \quad S \propto V \quad (95)$$

Ciekawostką jest, że równania te są zgodne pod względem objętości, ale istotnie różne ze względu na zależność od temperatury¹⁷. Teraz na mocy Faktu 2 z części I można określić geometryczny przelicznik entropii dla metody kwantowania objętościowego:

$$V^* \approx 2\pi V \quad \Rightarrow \quad S^* \approx 2\pi S \quad (96)$$

Obliczmy jednak najpierw entropię bez przelicznika. Do końca tego rozdziału obliczenia będą wykonywane dla wariantu entropii (86) policzonego dla małych N , zaś wariant (88) zostanie rozpatrzony w rozdziale następnym. Znając funkcję liczby stanów, można wyrazić entropię w funkcji liczby kwantów energii, a więc za pomocą samej energii:

$$\overline{\Omega} \propto e^N \quad \Rightarrow \quad S \approx k_B N = k_B \frac{E}{E_1^*} = \frac{k_B}{\hbar c} 2rE = \frac{k_B}{\hbar c} R_s E \quad (97)$$

Gwiazdka oznacza tutaj konsekwentny rachunek nierelatywistyczny oparty na (62). Ponadto pominięto stałą addytywną zupełnie nieistotną dla dużych N . Można teraz zastosować objętościowy przelicznik 2π ze wzoru (96):

$$S^* \approx 2\pi S = \frac{2\pi k_B}{\hbar c} R_s E \quad (98)$$

Jeżeli teraz energię kinetyczną E egzosfery uogólnimy do energii całej czarnej dziury, to otrzymamy entropię Hawkinga:

$$S^* \approx \frac{2\pi k_B}{\hbar c} R_s M c^2 = \frac{4\pi k_B G}{\hbar c} M^2 = S_H \quad (99)$$

Entropia Hawkinga została tutaj wyrażona za pomocą masy czarnej dziury. Na podstawie wyrażeń (5) lub (24) na powierzchni można łatwo przekształcić (99) do oryginalnej postaci (0), (31) z poprzedniej części:

¹⁷ Konsekwentne utrzymanie wzoru na entropię gazu fotonowego promieniowania Plancka prowadzi do relacji: $S \propto M^{3/2}$, $T \propto 1/M^{1/2}$. Można by zatem uznawać, że grawitacja zmienia te relacje na zależności Bekensteina-Hawkinga: $S \propto M^2$, $T \propto 1/M$.

$$S^* \approx \frac{\pi k_B c^3}{\hbar G} \cdot R_S^2 = \frac{k_B c^3}{4\hbar G} \cdot A = S_H \quad (100)$$

Warto w tym miejscu zaznaczyć, że podejście alternatywne (36) do termodynamiki z pierwszej części jest również zgodne z (100). Zatem z dokładnością do zastosowanych przybliżeń (Hawking też stosował przybliżenia) udało się wyprowadzić wzór na entropię Hawkinga czarnej dziury – ten sam, który pierwotnie miał być umieszczony na jego grobie. Natomiast wzór (97) na entropię S bez korekty objętościowej różni się jedynie zamianą \hbar na h .

Można teraz obliczyć temperaturę czarnej dziury jako pochodną (92) entropii (98) po energii. Pochodna cząstkowa wygląda groźnie, ale w tym przypadku sprowadza się do zwykłego współczynnika proporcjonalności:

$$\frac{1}{T^*} = \left(\frac{\partial S^*}{\partial E} \right)_{R_S} = \frac{2\pi k_B}{\hbar c} R_S = \frac{2\pi k_B}{\hbar c} \cdot \frac{2GM}{c^2} \quad (101)$$

Zatem lokalna temperatura termodynamiczna fotosfery ($T^* \equiv T_{3/2}^*$) ma wartość:

$$T^* = \frac{\hbar c^3}{4\pi G k_B} \cdot \frac{1}{M} = 2T_H \quad (102)$$

Tak obliczona temperatura jest dwa razy większą od temperatury Hawkinga T_H . Warto jednak podkreślić, że czynnik 2 nie wynika tutaj z przeliczników, ale z omawianej już różnicy między pochodną cząstkową i zupełną. Sprawdźmy to bezpośrednim rachunkiem:

$$\frac{1}{T_H} = \frac{dS^*}{dE} = \frac{d}{d(Mc^2)} \left(\frac{4\pi k_B G}{\hbar c} \cdot M^2 \right) = \frac{4\pi k_B G}{\hbar c^3} \cdot 2M = \frac{2}{T^*} \quad (103)$$

Należy tutaj jednak zastrzec, że obliczenie (103) utożsamia energię E z energią całkowitą Mc^2 czarnej dziury, zaś w rachunku (101) energia E oznaczała konsekwentnie energię kinetyczną fotonów. Można zatem stwierdzić, że obliczenie temperatury T^* w przyjętej metodyce jest bardziej konsekwentne, aniżeli obliczenie samej entropii S^* , czy podobnie temperatury T_H . W każdym razie, jak widzieliśmy na fotografii w części pierwszej, na grobie Hawkinga został umieszczony wzór (1) na temperaturę T_H zgodną z (103).

Niestety to jeszcze nie koniec obliczeń temperatury, bowiem pozostała do obliczenia najbardziej miarodajna temperatura T_∞ postrzegana przez odległych obserwatorów. Zgodnie z (94) lub (20) z części I wynosi ona:

$$T_\infty^* = \left(\frac{\partial S^*}{\partial E_c} \right)_{R_S}^{-1} = \frac{T^*}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} T_H \approx 1,15 T_H \quad (104)$$

Temperatura podana przez Bekensteina była $2\pi/\ln 2 \approx 9$ razy większa od T_H , więc wobec czynnika 2 w (93) czynnik 1,15 w (104) można poczytywać za dostateczne odtworzenie temperatury Hawkinga dla dalekiego obserwatora.

Obliczenia w przypadku kwantowania powierzchniowego

Kwantyzacja powierzchniowa wydaje się bardziej naturalna od objętościowej z dwóch powodów. Po pierwsze docelowa entropia zależy od powierzchni horyzontu. Po drugie w OTW istnieje tylko sfera fotonowa, a nie istnieje kula, ani powłoka sferyczna egzosfery. Wobec tego taka kwantyzacja powinna działać bez dodatkowych przeliczników bezpośrednio na sferze fotonowej. Niestety, podejście takie w pierwszym przybliżeniu prowadzi do zaniżonego wyniku. Zatem kwantyzacja powierzchniowa zostanie opisana w ujęciu GN, a wyniki przeliczone na podstawie stosunku powierzchni fotosfer w ujęciu OTW i GN (Fakt 3 z części I). Obliczenia uwzględniają jedynie polaryzację fotonów styczną do sfery, gdyż fotony o polaryzacji normalnej wypadają jakby z orbity i ich uwzględnienie zawyża wynik entropii.

Znajomość podstawy potęgi dla funkcji liczby stanów umożliwia rachunki analogiczne do (97):

$$\overline{\Omega} \propto 2^N \quad \Rightarrow \quad S \approx k_B \ln 2^N \quad (105)$$

Uwzględnienie kolejnych relacji prowadzi do postaci surowej entropii:

$$S \approx k_B N \ln 2 = k_B \frac{E}{E_1^*} \ln 2 = \frac{k_B \ln 2}{\hbar c} 2rE = \frac{k_B \ln 2}{\hbar c} R_s E \quad (106)$$

Taką surową entropię odniesioną do małej fotosfery w GN należy jeszcze przemnożyć przez przelicznik powierzchniowy:

$$A^* = 9A \approx \frac{2\pi}{\ln 2} A \quad \Rightarrow \quad S^* \approx \frac{2\pi}{\ln 2} S \quad (107)$$

Współczynnik korekcji bazuje na Fakcie 3 z części I oraz na fakcie zależności entropii czarnych dziur od powierzchni horyzontu proporcjonalnej do powierzchni fotosfery. Po zastosowaniu tego przelicznika dostajemy już końcową wartość entropii:

$$S^* = 9 \cdot S \approx \frac{2\pi}{\ln 2} S = \frac{2\pi k_B}{\hbar c} R_s E = \dots = S_H \quad (108)$$

Zgodność otrzymanego wyniku z entropią S_H oraz entropią uzyskaną przy kwantowaniu objętościowym oznacza dojście do tych samych temperatur T_H lub $T^* = 2T_H$ oraz T^*_∞ . Identyczne rachunki nie będą już powtarzane, a w zamian wszystkie wyniki są przedstawione w syntetycznej tabeli 5.

Tabela 5. Zestawienie wyników obliczeń entropii i temperatury statystycznej stanów fotonowych czarnej dziury w metodzie kwantowania objętościowego i powierzchniowego dla małych energii

Charakterystyka	Rodzaj kwantyzacji orbit fotonowych		
	Objętościowa	Powierzchniowa	
Wyjściowa grawitacja	GN	OTW	GN
Degeneracja g_n	$2n^2$	$2n$	$2n$
Surowa entropia S	$\frac{1}{2\pi} S_H$	$\frac{\ln 8}{4\pi} S_H$	$\frac{\ln 2}{2\pi} S_H$
Przelicznik geometrii GN \rightarrow OTW	$V^* \approx 2\pi V$	brak	$A^* = 9A \approx \frac{2\pi}{\ln 2} A$
Entropia S^*	$\approx S_H$	$\approx \frac{1}{6} S_H$	$\approx S_H$
Temperatura Hawkinga $T_H^* = (dS^* / dE)^{-1}$	$\approx T_H$	$\approx 6T_H$	$\approx T_H$
Temperatura termodynam. $T_{3/2}^* = (\partial S^* / \partial E)_{R_s}^{-1}$	$\approx 2T_H$	$\approx 12T_H$	$\approx 2T_H$
Temperatura obserwowalna $T_\infty^* = T_{3/2}^* / \sqrt{3}$	$\approx 1,15T_H$	$\approx 6,9T_H$	$\approx 1,15T_H$

Na podstawie tabeli można powiedzieć, że cel elementarnego wyprowadzenia entropii i temperatury Hawkinga został osiągnięty z wynikiem „dwa do jednego” w metodach. Niestety jedna metoda (kwantowania powierzchniowego w OTW), która wydawałaby się najatrakcyjniejsza, z niejasnych przyczyn nie zadziałała¹⁸. Najwyraźniej w OTW należy uwzględnić w obliczeniach entropii nie tylko stany stacjonarne. Pośrednio takie obliczenie było wykonane w kwantyzacji objętościowej w ujęciu GN i z przeliczeniem do OTW. Niepowodzenie jednej z metod może być powetowane Stwierdzeniem 1 z części I, które umożliwia najprostsze wyprowadzenie temperatury termodynamicznej. Wówczas bilans metod poprawia się na stan „trzy do jednego”, nie uwzględniający wyprowadzeń heurystycznych z pierwszej części. W tym miejscu należy również odnotować, że prawdopodobnie została uściślona temperatura termodynamiczna czarnej dziury, która jest 2 razy większa od formalnej temperatury według Hawkinga (w zasadzie chodzi tutaj o relację między temperaturą i entropią). Natomiast ostateczna obserwowalna temperatura fotosfery wyszła o 15% większa od temperatury Hawkinga. Należy jednak zastrzec, że przedstawione w tym rozdziale obliczenia oparte były na przybliżeniu (86) zastosowanego dla małych N . Dokładniejsze wyniki są omówione w następnym rozdziale.

¹⁸ Laplasjan na fotosferze homeomorficznej z dwuwymiarową sferą powinien mieć taką samą postać, jak w zagadnieniu własnym harmonik sferycznych – nie było to jednak sprawdzane expli-
cite.

5. Planckowska alternatywa dla promieniowania Hawkinga

Twierdzi się, że promieniowanie Hawkinga ma dokładnie właściwości promieniowania Plancka [2]. To jest rzeczywiście prawdą pod wieloma względami, co było pokazane w rozdziale 2 części I. Ściśle mówiąc te podobieństwa zostały tam ujęte w ramach niewielkiej modyfikacji autorskiej termodynamiki czarnych dziur. Istnieją jednak istotne różnice pomiędzy promieniowaniem Plancka i promieniowaniem Hawkinga. Pojawiają się one na poziomie entropii, na której przecież opiera się promieniowanie Hawkinga. Oczywiście, promieniowanie Plancka lub inaczej gaz fotonowy czy też ultrarelatywistyczny gaz Bosego posiada również entropię [36, 18]. Taka entropia nazywana jest w niniejszej pracy entropią Plancka S_P , która jest dana wzorem (95) lub też kilkoma równoważnymi formułami (41) z części I. W przypisie (¹⁷) do wzoru (95) omówione są jego konsekwencje dla promieniowania czarnej dziury, gdyby potraktować ten wzór poważnie. W środku akapitu po wzorze (93) omówiona jest inna konsekwencja wzoru (41). Powyższe fakty nie wyszłyby poza ciekawostki gdyby nie dokładne obliczenia statystyczne entropii stanów fotonowych zgodne z (88).

Zgodnie z wynikami w Tabeli 4 widać, że kwantowanie powierzchniowe niezależnie od polaryzacji prowadzi to tego samego charakterystycznego trendu potęgowego o wykładniku 3/4. Brak uwzględnienia polaryzacji radialnej lub jej uwzględnienie wpływa jedynie na stałą proporcjonalności:

$$S = k_B \ln \Omega \approx 3/2 \cdot k_B N^{3/4} \quad \vee \quad S \approx 2k_B N^{3/4} \quad (109)$$

W opisie GN uwzględniającym (62) analogicznie do (97) dostajemy:

$$S \approx \frac{3}{2} k_B \left(\frac{R_s E}{\hbar c} \right)^{3/4} \quad \vee \quad S \approx 2k_B \left(\frac{R_s E}{\hbar c} \right)^{3/4} \quad (110)$$

Zaś w opisie OTW mielibyśmy analogicznie:

$$S \approx \frac{3}{2} k_B \left(\frac{3R_s E}{2\hbar c} \right)^{3/4} \quad \vee \quad S \approx 2k_B \left(\frac{3R_s E}{2\hbar c} \right)^{3/4} \quad (111)$$

Wszystkie rozważane przypadki entropii surowej różnią się współczynnikiem bezwymiarowym, co dotyczyć też będzie ewentualnej entropii z przelicznikiem. Zatem warto zunifikować zapis:

$$S^* \approx \alpha^* k_B \left(\frac{R_s E}{2\hbar c} \right)^{3/4} \quad (112)$$

gdzie występuje bezwymiarowa stała liczbowa α^* . Zakładając w uproszczeniu, że $E = Mc^2$ otrzymujemy alternatywną entropię czarnej dziury:

$$S^* \approx \alpha^* k_B \left(\frac{G}{\hbar c} \right)^{3/4} M^{3/2} = \alpha^* k_B \frac{M^{3/2}}{m_p^{3/2}} =: S_p^* \quad (113)$$

gdzie użyto symbolu stałej masy Plancka $m_p = \sqrt{\hbar c / G} = 2,176 \cdot 10^{-8} \text{ kg}$.

Entropia S_p^* czarnej dziury w postaci (113) jest formalnie zgodna z entropią S_p daną wzorami (41), (95) nazywaną tutaj entropią Plancka. Nie należy sądzić, że entropia Plancka jest stałą, gdyż w przeciwieństwie do innych wielkości (np. długości i masy Plancka) w układzie jednostek naturalnych nie wprowadzono takiej stałej dla entropii.

Można teraz obliczyć alternatywną temperaturę czarnej dziury (92) z (112):

$$T^* \approx \frac{4c^2}{3\alpha^* k_B} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{3/4} \frac{1}{\sqrt{M}} = \frac{4}{3\alpha^*} T_p \sqrt{\frac{m_p}{M}} =: T_p^* \quad (114)$$

gdzie użyto stałej temperatury Plancka $T_p = m_p c^2 / k_B = 1,417 \cdot 10^{32} \text{ K}$, a jednocześnie zdefiniowano planckowską temperaturę T_p^* czarnej dziury. Oczywiście temperatura dla dalekiego obserwatora będzie nieco mniejsza:

$$T_{p\infty}^* \approx \frac{4}{3\sqrt{3}\alpha^*} T_p \sqrt{\frac{m_p}{M}} \quad (115)$$

Niezależnie od wartości stałej α^* , wprowadzona w tym rozdziale entropia oraz temperatura różni się od wielkości Hawkinga stopniem potęgi zależności od masy. W pierwszej części pokazano, że entropia zależna od pola horyzontu, czyli od kwadratu masy, dobrze pasowała do drugiej zasady termodynamiki. Okazuje się, że zależność $S_p^* \propto M^{3/2}$ również daje podobne możliwości wobec:

$$(M_1 + M_2)^{3/2} \geq M_1^{3/2} + M_2^{3/2} \quad (116)$$

co dla niezerowych mas jest zawsze nierównością silną. Dowód nierówności jest ćwiczeniem na poziomie matury z matematyki. Na tym nie koniec analogii, gdyż można tutaj wprowadzić na podstawie (112) formułę różniczkową typu (36). Jednak zamiast tego zostanie podjęta próba ustalenia stałej α^* . Relacje (110), (111) dodatkowo wobec komplikujących się przeliczników entropii przy nowych zależnościach są niejednoznaczne. Zatem do unormowania stałej zostanie użyta pierwsza z relacji (95), w której objętość zostanie zinterpretowana jako objętość powłoki sferycznej zawartej między sferą fotonową i horyzontem. Zgodnie z Faktem 2 z części I objętość taka jest około 2π razy większa od euklidesowo rozumianej objętości horyzontu. Prowadzi to do następującej wartości stałej:

$$\alpha^* = \sqrt[4]{\frac{4}{45}} \cdot \frac{8\pi}{3} \approx 0,546 \cdot \frac{8\pi}{3} \approx 4,57 \quad (117)$$

Szczęśliwie niemal identyczna wartość wynika z drugiego wzoru w (111):

$$\alpha^* = 2 \cdot 3^{3/4} \approx 4,56 \quad (118)$$

Zatem metoda kwantowania powierzchniowego fotosfery w opisie OTW (bez przeliczników z GN), która nie sprawdziła się w poprzednim rozdziale, teraz wydaje się być najwłaściwsza i najdokładniejsza (Tabela 4). Metoda ta tym razem

uwzględniała obie polaryzacje. Taki stan rzeczy jest bliższy idei Boltzmanna uwzględniania wszystkich możliwych stanów, które wcześniej były nieco spekulatywnie zawężone celem uzyskania doraźnej zgodności z entropią Hawkinga¹⁹.

Określmy teraz moc całkowitą promieniowania czarnej dziury. Zgodnie z prawem Stefana-Boltzmanna zależy ona od czwartej potęgi temperatury i pola promieniującej powierzchni. Pole powierzchni horyzontu oraz sfery fotonowej jest proporcjonalne do kwadratu masy czarnej dziury. Zatem moc dla oryginalnej temperatury Hawkinga jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu masy $P_H \propto 1/M^2$. Taka moc dla znanych czarnych dziur [37] byłaby praktycznie zerowa. Zgoła inaczej wygląda sytuacja dla alternatywnej temperatury (114). Moc odniesiona do powierzchni fotosfery, a następnie przeliczona dla odległego obserwatora według (53') (Appendix 2) prowadzi do wartości:

$$P_\infty^* = \frac{\pi^3}{5} \left(\frac{4}{3\alpha^*} \right)^4 \frac{c^5}{G} \approx 0,0453 P_p = 1,64 \cdot 10^{51} \text{ W} \quad (119)$$

gdzie pojawiła się moc Plancka $P_p = c^5 / G = 3,6283 \cdot 10^{52} \text{ W}$. Zatem alternatywna moc czarnej dziury jest stała i jest jedynie o rząd wielkości mniejsza od mocy Plancka. Moc Plancka jest ogromna i jest większa od szacowanej mocy obserwowalnego Wszechświata²⁰. Najmocniejszym znanym obiektem we Wszechświecie jest odkryty w tym roku kwazar SMSS J215728.21-360215.1 o mocy szacowanej maksymalnie na $2,66 \cdot 10^{41} \text{ W}$ [38]. Autorzy odkrycia twierdzą, że jądrem kwazaru jest supermasywna czarna dziura o masie rzędu $2 \cdot 10^{10}$ mas Słońca. Długostrwała moc kwazarów przewyższa nawet najmocniejszą znaną supernową ASASSN-15lh o mocy $2,2 \cdot 10^{38} \text{ W}$ [39]. Jedyłą mocą zbliżającą się do mocy Plancka jest obecnie chwilowa moc piku pierwszej detekcji fali grawitacyjnej szacowana na $3,6 \cdot 10^{49} \text{ W}$ [40]. Szybki postęp odkryć astrofizycznych widoczny już nawet w skali dwóch lat [37, 38, 40] pozwala przypuszczać, że kiedyś zjawiska o mocy Plancka będą dostępne dla badań obserwacyjnych.

Planckowskiej alternatywy promieniowania Hawkinga nie należy mylić z ideą tzw. gwiazdy Plancka, która miałaby się znajdować pod horyzontem czarnej dziury [41]. Gwiazda Plancka bazuje na pojęciu gęstości Plancka, zaś promieniowanie planckowskie gazu fotonowego fotosfery prowadzi nominalnie do mocy Plancka. Ta nominalna wartość mocy może być jednak mniejsza (porównaj z [42]), w zależności od energii zawartej w fotosferze, występującej np. w (112). Z racji ograniczeń objętościowych pracy zagadnienie to jest tylko częściowo rozwijane w kolejnym rozdziale.

¹⁹ Ten wybór narzucony w opisie GN został wówczas przeniesiony na opis OTW.

²⁰ W tym miejscu dziękuję dr. hab. Pawłowi Pietrukowiczowi za konsultacje na ten temat z prof. dr. hab. Tomaszem Bulikiem oraz dr. hab. Szymonem Kozłowskim z Obserwatorium Astronomicznego Uniwersytetu Warszawskiego.

6. Czarna dziura z ciężką fotosferą.

Zauważmy, że przedstawiane w poprzednich rozdziałach wyprowadzenia bazowały na orbitach fotonowych. Zatem promieniowanie czarnej dziury zostało wyprowadzone z fotosfery (lub egzofery) w roli rezerwuaru fotonów – takiego samego jak wnęka rezonansowa dla promieniowania ciała doskonale czarnego. W tym sensie można uznać, że ta metoda była ukierunkowana na wyliczenie temperatury, gdyż występująca w entropii energia była energią jedynie fotonów, a nie całej czarnej dziury. Oczywiście przy wyliczaniu entropii dla uproszczenia została wstawiona w miejsce energii cała masa-energia czarnej dziury, co prowadziło do entropii czarnej dziury. Teraz należy się zastanowić jaką energię fotosfery przewiduje termodynamika, aby czarna dziura znajdowała się w pewnego rodzaju stanie ustalonym. Jeżeli fotosfera będzie miała dużą energię, to wyjaśnienie jej promieniowania jest proste i nie wymaga uciekania się do innych pojęć jak fotony odrywające się z rezerwuaru fotosfery. Jeżeli z czarnej dziury będzie wypływać więcej energii-masy niż do niej wpadać, to całkowita masa takiej czarnej dziury będzie malała. Pojawia się pytanie czy zmniejszanie energii-masy dotyczy tylko fotosfery, czy również masy zawartej pod horyzontem. Dla zachowania stanu ustalonego (pewnej równowagi między fotosferą i horyzontem) dobrze by było, aby energia wypływała z obu miejsc jej gromadzenia. O ile łatwo jest zrozumieć odpływ energii z fotosfery, to już znacznie trudniej jest wyjaśnić możliwość jej wypromieniowania spod horyzontu. Hawking wyjaśnił to zarówno rachunkowo, jak i obrazowo za pomocą cząstek o ujemnej energii. Nad horyzontem mogłaby następować kreacja cząstki i antycząstki o dodatniej i ujemnej energii²¹. Jeśli cząstce o dodatniej energii uda się oddalić od horyzontu, a ta o ujemnej energii wpadnie pod horyzont, to cząstkom nie uda się z powrotem anihilować. W ten sposób energia-masa pod horyzontem zmniejszy się w wyniku dodania ujemnej energii-masy antycząstki. W formalizmie kwantowej teorii pola występują stany o ujemnych energiach (częstotliwościach), choć zwyczajowo są pomijane lub reinterretowane. Zatem rozumowanie oparte na cząstkach o ujemnej energii-masie jest wciąż dalekie od intuicji. Istnieją wobec tego interpretacje, że promieniowanie Hawkinga jest procesem globalnym i nie związanym jedynie z obszarem przy horyzoncie. W takim ujęciu wpływ energii z zasady zachowania energii musi prowadzić do zmniejszenia się masy czarnej dziury, ale nie wnioskujemy w naturę tego procesu. Właśnie tą drogą podążymy w tym rozdziale.

HIPOTEZA-POSTULAT 1. (O wiriale dla fotosfery czarnej dziury)

W stanie równowagi termodynamicznej fotosfery z horyzontem czarnej dziury całkowita energia-masa fotosfery jest równa masie zawartej w horyzoncie, czyli stanowi połowę całkowitej masy czarnej dziury.

²¹ Antycząstka w fizycznym rozumieniu nie ma związku z ujemną energią, a jedynie odgrywa tutaj taką rolę.

Dowód – częściowy. Czarna dziura nie znajduje się w równowadze termodynamicznej z otoczeniem, ale można założyć, że jej części mogą być w takiej równowadze. W istocie chodzi o stan maksymalizujący entropię. Zastosowanie definicji statystycznej w rozdziale 4 dla kwantyzacji orbit fotonowych doprowadziło do formuły, którą można zapisać następująco:

$$S^* = \frac{2\pi k_B}{\hbar c} R_S E = \frac{4\pi G k_B}{\hbar c^5} M_0 c^2 \sqrt{3} E_c = \frac{4\pi G k_B \sqrt{3}}{\hbar c^5} (E_t - E_c) E_c \quad (120)$$

gdzie: E – energia kinetyczna fotosfery, M_0 – masa horyzontu i jego wnętrza, E_c – energia całkowita fotosfery, E_t – energia całkowita czarnej dziury. Entropia jest więc funkcją kwadratową w energii E_c . Maksimum tej funkcji znajduję się w wierzchołku paraboli dla $E_c = E/2$, co stanowi tezę dla tego przypadku. W przypadku planckowskiej entropii (112) czarnej dziury sytuacja wygląda podobnie:

$$S_p^* = \alpha^* k_B \left(\frac{G\sqrt{3}}{\hbar c^5} \right)^{3/4} [(E_t - E_c) E_c]^{3/4} \quad (121)$$

Funkcja ta przyjmuje maksimum w tym samym punkcie co (120), niezależnie od potęgi $\gamma = 3/4$. Do pełni dowodu brakuje analizy, czy takie rozwiązanie nie jest sprzeczne z OTW.

Można powiedzieć, że powyższa hipoteza jest pewną wersją idei ściany ognia (*firewall*) wokół czarnej dziury o jakiej swojego czasu było głośno [43]. Główna różnica polega jednak na tym, że standardowy *firewall* rozpatruje się na horyzoncie lub bezpośrednio nad nim, a nie na nieco oddalonej fotosferze.

Z zasady przyjmuje się, że stan o najwyższej entropii występuje wtedy gdy czarna dziura wciągnie wszystkie ciała w układzie. Jednakże sytuacja taka nie może być jedynym maksimum entropii, skoro jest możliwy opisany przez Hawkinga proces parowania czarnych dziur. W rzeczywistości Hipoteza-Postulat 1 maksymalizuje entropię nie całej czarnej dziury, ale entropię fotosfery spośród wszystkich czarnych dziur o ustalonej masie. Jeśli hipoteza ta jest prawdziwa, to oznacza, że czarna dziura z ciężką fotosferą ma entropię stanowiącą ćwierć lub połowę entropii Hawkinga (w zależności czy doliczymy dodatkowo entropię samego horyzontu), ale większą dwukrotnie temperaturę. Dla entropii Plancka czarnej dziury powyższe czynniki ulegają pewnemu przeskalowaniu. Jednak promień horyzontu w obu przypadkach byłby równy promieniowi $R_0 = R_S/2$ małego horyzontu z ujęcia GN (Definicja 2) lub rozwiązania Kerra, a fotosfera również byłaby dwa razy mniejsza niż dla punktowej czarnej dziury i stanowiłaby 3/4 promienia Schwarzschilda. Zatem sytuacja jest zaskakująca, gdyż układ ten miałby mniejszy promień niż wydawałby się najmniejszy możliwy promień Schwarzschilda. Ta obserwacja świadczy o atrakcyjności Hipotezy-Postulatu 1, a jednocześnie o potrzebie jej sprawdzenia pod kątem zgodności z równaniami Einsteina lub przynajmniej z możliwością zszycia dwóch paraboloidów Flamma.

Czarne dziury nie są takie czarne.

Stephen Hawking

W artykule udało się obliczyć entropię i temperaturę czarnej dziury metodą zliczania skwantowanych stacjonarnych orbit fotonowych. Można powiedzieć, że w przybliżeniu niskich energii (małej liczby stanów) udało się odtworzyć entropię Hawkinga oraz z nieco mniejszą dokładnością temperaturę Hawkinga dla dalekiego obserwatora. Natomiast obliczenia dokładniejsze dla większego zakresu numerycznego stanów były dużym zaskoczeniem. Otóż w ich toku uzyskano istotną modyfikację potęgowej entropii i temperatury czarnych dziur. Okazało się, że ta modyfikacja jest całkowicie zgodna z promieniowaniem Plancka ciała doskonale czarnego na poziomie entropii gazu fotonowego Plancka tegoż promieniowania. Brak modyfikacji entropii Plancka na rzecz entropii Bekensteina lub Hawkinga przy silnej grawitacji czarnej dziury można łatwo interpretować jakościowo. Mianowicie na kołowych orbitach fotonowych w pewnym sensie znosi się grawitacja na tej samej zasadzie na jakiej opiera się stan nieważkości na orbicie okołozemskiej stacji kosmicznej czy też w windzie Einsteina. W kontekście historycznym sytuacja wygląda nieco przewrotnie. Pierwotnie Hawking starał się obalić ideę Bekensteina, a ostatecznie potwierdził ją z dokładnością do czynników liczbowych. Natomiast autor dążył do potwierdzenia wyników Hawkinga alternatywnymi metodami, a uzyskał potwierdzenie entropii gazu fotonowego Plancka promieniowania ciała doskonale czarnego. Ostatecznie zastosowano metodę kwantowania powierzchniowej fotosfery w ujęciu OTW, a jedynym przybliżeniem był wzór (70). Czy to oznacza, że wyprowadzenie Hawkinga było bardziej ścisłe? Nie jest to takie oczywiste, gdyż Hawking też opierał się na pewnych przybliżeniach oraz nie wiadomo, czy gdzieś implicite nie skorzystał on jednak z założenia Bekensteina o proporcjonalności entropii do powierzchni horyzontu. Te wątpliwości powinny być rozstrzygane przez niezależnych obiektywnych specjalistów. We wstępie niniejszej części artykułu znajdują się odnośniki do najważniejszych oryginalnych wyprowadzeń dla promieniowania Bekensteina-Hawkinga czarnych dziur, które mogą ułatwić takie badania.

APPENDIX 1. Wyniki numeryczne dużych liczb

Tabela 6. Wyniki obliczeń funkcji liczby stanów Boltzmana w zakresie od 10 do 62 kwantów energii fotonów dla degeneracji powierzchniowej (bez i z polaryzacją radialną) oraz objętościowej. Obliczenia wykonał Marcin Kycia za pomocą programu w języku Python, na podstawie zliczania kombinacji z powtórzeniami dla wszystkich partycji liczby kwantów energii

N	Liczba stanów Ω w zależności od liczby N kwantów energii i degeneracji poziomów		
	$2n$	$4n$	$2n^2$
10	5380	95278	90739
11	10870	234344	245868
12	21652	563506	654478
13	42350	1326796	1711178
14	81778	3066040	4405931
15	155676	6963048	11177842
16	292964	15564661	27983253
17	544846	34282360	69176506
18	1003078	74486376	169030351
19	1828128	159785472	408498868
20	3301952	338703796	977120193
21	5911740	709957616	2314584382

22	10499385	1472529670	5432579012
23	18502582	3023894672	12640021942
24	32371011	6151408852	29166997373
25	56240816	12402137024	66773987182
26	97073055	24792822174	151724108957
27	166497412	49162962280	342276983034
28	283870383	96737562642	766851882058
29	481212656	188949567388	1706787439216
30	811287037	366461554012	3774825607766
31	1360575284	705943838032	8297944350656
32	2270274785	1351107346116	18134270307153
33	3769835178	2569791229076	39407466085104
34	6230705170	4858444210542	85171228075297
35	10251665550	9132385971272	183115388336682
36	16794445441	17070617357430	391697672761357
37	27397730508	31737796675320	833764598222090
38	44514742142	58701136851968	1766323299761770
39	72042764842	108027262512928	3724734883890874
40	116152738258	197837233477392	7819510980842785
41	186583010774	360609547032892	16344824594403858
42	298653464142	654310755562188	34021367995818213
43	476388974968	1181975039810224	70525428411660354
44	757353545475	2126016467908937	145616701327343369
45	1200106701828	3808139070976092	299498593655290446
46	1895680135981	6793568390070918	613678560791165870
47	2985188798180	12071763260428608	1252829653611737436
48	4686796545874	21368665110726931	2548522151020827625
49	7336891676660	37684447913356288	5166170188800965248
50	11452823655487	66216640300226256	10436858816169314029
51	17828248477842	115939813087824384	21014884876008067748
52	27677721198249	202300520195575839	42176849754873667044
53	42855452309848	351801082618837076	84380789474758942704
54	66185575310118	609773254692156916	168293149074784018626
55	101959655013280	1053523901221282480	334635904188480223308
56	156684600650234	1814502817002082527	663423036067486707477
57	240204638965600	3115582416000703348	1311438801941631332870
58	367381116182908	5333583118816251600	2585065142738215809005
59	560602411374858	9103865658006009960	5081435942416858160940
60	853527043148983	15494843340819224013	9961333997736544377547
61	1296655141719562	26298422925505584408	19475486971631952668782
62	1965606131966531	44512193355709683620	37977098148738364299297

APPENDIX 2. Korekta czynnika transformacji mocy (do części I)

Obserwacja 4'. (O obserwowanej mocy termicznej fotosfery)

Jeżeli fotosfera o $r = (3/2)R_S$ ma lokalną temperaturę $T_{3/2}$ i moc jednostronną $P_{3/2}$, a daleki obserwator postrzega temperaturę T_∞ , która jest $\sqrt{3}$ razy mniejsza, to jakby wbrew prawu Stefana-Boltzmannia postrzegana moc P_∞ będzie 3 razy mniejsza (a nie 9 razy mniejsza):

$$P_\infty = P_{3/2} / 3 \approx 0,33333 \cdot P_{3/2} \quad (53')$$

Dowód. Tezę najłatwiej jest udowodnić w opisie korpuskularnym, gdyż stosowanie funkcji widmowej (radiancji spektralnej) jest bardziej złożone. Rozważmy k fotonów o energii $hf_{3/2}$ każdy wylatujących z otoczenia pewnego punktu sfery fotonowej w okresie czasu $\Delta t_{3/2}$ w tym samym kierunku w stronę nieskończoności

(np. radialnie, ale niekoniecznie). Fotony te dochodzą w okresie czasu Δt_∞ do pewnego odległego punktu. Czynniki dylatacji czasu względem fotosfery wydłużający $\sqrt{3}$ wydłuża okres czasu dochodzenia fotonów, a jednocześnie zmniejsza ich częstotliwość. Zatem przyczynek do mocy pochodzący od tych fotonów wynosi:

$$\Delta P_\infty = \frac{k \cdot hf_\infty}{\Delta t_\infty} = \frac{k \cdot hf_{3/2} / \sqrt{3}}{\sqrt{3} \Delta t_{3/2}} = \frac{k \cdot hf_{3/2}}{3 \Delta t_{3/2}} = \frac{1}{3} \Delta P_{3/2} \quad (53.1)$$

Jeżeli dla dowolnych fotonów przyczynek do mocy maleje 3 razy, to obserwowalna moc całkowita maleje też 3 razy, co dowodzi tezie (53').

Ponieważ okazało się, że moc promieniowania Hawkinga transformuje się z kwadratem odwrotności czynnika dylatacji czasu (a nie z jej pierwszą potęgą) to drobnej korekty wymaga jeden wzór Obserwacji 5. Korekta ta jednak nie wpływa na wynik tego wzoru:

$$P_1 = \lim_{r \rightarrow R_S^+} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \cdot P_\infty = \lim_{r \rightarrow R_S^+} \frac{P_\infty}{\sqrt{1 - R_S / r}} = +\infty \quad (55')$$

Źródła (do części I)

- [1] Hawking J. (2013, 1999 ang.), *Moje życie ze Stephenem – Podróż ku nieskończoności*, Świat Książki, Warszawa.
- [2] Birrell N.D., Davies P.C. (1982, 1998 ros.), *Quantum fields in curved space*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] Hawking S. (2015, 1988 ang.), *Krótką historia czasu*, Zysk i S-ka, Poznań.
- [4] Nowikow I. (1995), *Czarne dziury i Wszechświat*, Prószyński i S-ka, Warszawa
- [5] Gładyszewski L. (1990), *Fizyka z astronomią IV, Roz. III. Astrofizyka i kosmologia*, WSiP, Warszawa.
- [6] Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. (1973, 1977 ros.), *Gravitation*, Freeman, San Francisco.
- [7] https://en.m.wikipedia.org/wiki/Schwarzschild_geodesics (05.2018).
- [8] Mizerski W., Nowaczek W. (1995), *Tablice fizyczno-astronomiczne*, Adamantan, Warszawa.
- [9] Januszajtis A. (1986), *Fizyka dla politechnik, II. Pola*, PWN, Warszawa.
- [10] Januszajtis A. (1977), *Fizyka dla politechnik, I. Cząstki*, PWN, Warszawa.
- [11] Hawking S. (1976), *Black holes and thermodynamics*, Physical Review D, Vol. 13, No 2.
- [12] Pade Don N. (2004), *Hawking radiation and black hole thermodynamics*, arXiv:hep-th/0409024v3.
- [13] Hawking S. (1975), *Particle Creation by Black Holes*, Comm. Math. Phys. 43, 199–220, Springer-Verlag.
- [14] Matyjasek J. (2002), *Przybliżone metody kwantowej teorii pola w czasoprzestrzeniach statycznych czarnych dziur*, UMCS, Lublin.
- [15] Unruh B. (2012), *Measurement of the Hawking Temperature for an Analog Horizon*, https://www.youtube.com/watch?v=V3Mm_YVlbo, KITP Colloquium, University of California.
- [16] McEvoy J.P., Zarate O. (1999, 1995 ang.), *Od podstaw – Stephen Hawking*, Emblemat, Warszawa.
- [17] Barbado L.C., Barcel C., Garay L.J., Jannese G. (2016), *Hawking versus Unruh effects, or the difficulty of slowly crossing a black hole horizon*, arXiv:1608.02532v3.
- [18] Huang K. (2006), *Podstawy fizyki statystycznej*, PWN, Warszawa.

Źródła (do części II)

- [19] Jaynes E. T. (1965), *Gibbs vs Boltzmann Entropies*, American Journal of Physics 33, 391-398.
- [20] Mandrysz M., Mielczarek J. (2017), *O malejącej entropii*, Foton 136 wiosna, str. 4-14.
- [21] Kardaś T. (2006), *O entropii*, Foton 95 zima, str. 50-61.
- [22] Bekenstein J. D. (1973), *Black Holes and Entropy*, Physical Review D, Vol. 7, No. 8, pp. 2333-2346.
- [23] Hawking S. (1976), *Breakdown of Predictability in Gravitational Collapse*, Physical Review D, Vol. 14, pp. 2460-2473.
- [24] DeWitt B. S. (1975), *Quantum field theory in curved spacetime*, Physics Reports (Section C of Physics Letters) 19, no. 6, 295-357.
- [25] Mandal G. (2013), *Hawkings derivation of Black-hole entropy and Hawking radiation*, <https://www.youtube.com/watch?v=iIoQc159c0c>, International Centre for Theoretical Sciences, Bangalore, Indie.
- [26] O'Reilly D. (2018), *Black Holes 3, Entropy Formula Derived*, <https://www.youtube.com/watch?v=9Y9x6RDTPxA>.
- [27] Susskind L. (1993), *Some speculations about black hole entropy in string theory*, arXiv: hep-th/9309145v2.
- [28] Strominger A., Vafa C. (1996), *Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy*, arXiv: hep-th/9601029v2.
- [29] Maldacena J. M., Strominger A. (1996), *Statistical Entropy of Four-Dimensional Extremal Black Holes*, arXiv:hep-th/9603060v1.
- [30] Sen A. (2009), *Black Hole Entropy Function, Attractors and Precision Counting of Microstates*, arXiv:0708.1270v4.
- [31] Jaśkowski F. (1990), *Fizyka z astronomią IV, Roz. I. Budowa atomu*, WSiP, Warszawa.
- [32] Dawydow A. S. (1967), *Mechanika kwantowa*, PWN, Warszawa.
- [33] Zięba A. (2018), *Prawo propagacji niepewności bez pochodnych*, Foton 139, Zima 2017, str. 15-22.
- [34] Koczan G., Ziomek J. (2018), *Badanie zależności tarcia tocznego od promienia kulki łożyskowej*, Przegląd Mechaniczny, nr 1, str. 21-26.
- [35] Koczan G., Ziomek J. (2018), *Quo vadis, naturalna beczko*, Foton 139, Zima 2017, str. 23-39.
- [36] https://en.wikipedia.org/wiki/Photon_gas (08.2018).
- [37] Kozłowski Sz. (2016), *Virial black hole mass estimates for 280 000 AGNS from the SDSS broad-band photometry and single epoch spectra*, arXiv:1609.09489v1.
- [38] Wolf Ch., Bian F., Onken Ch. A., Schmidt B. P., Tisserand P., Alonzi N., Hon W. J., Tonry J. L. (2018), *Discovery of the most ultra-luminous QSO using Gaia, SkyMapper and WISE*, arXiv:1805.04317v1.
- [39] Dong S. et al (2016), *ASASSN-15lh: A Highly Super-Luminous supernova*, arXiv:1507.03010v3.c
- [40] Abbott B. P. et al. (2016), *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett. 116, 061102-061102(16).
- [41] Rovelli C., Vidotto F. (2014), *Planck stars*, International Journal of Modern Physics D. 23 (12): 1442026, arXiv:1401.6562.
- [42] Scully M. O., Fulling S., Lee D., Page D., Schleich W., Svidzinsky A. (2018), *Quantum optics approach to radiation from atoms falling into a black hole*, PNAS, vol. 115, no. 32, 8131-8136.
- [43] Abramowicz M. A., Kuźniak W., Lasota J. P. (2014), *Mass of a Black Hole Firewall*, arXiv:1311.0239v3.