

Kosmiczne ściany domenowe

Filip Ficek
Instytut Fizyki, UJ

Wstęp

Pomimo licznych sukcesów współczesnej fizyki w wyjaśnianiu zjawisk zachodzących we Wszechświecie, wciąż wiele zagadek pozostaje bez odpowiedzi (na przykład: czym są ciemna materia i ciemna energia, skąd się wzięła obserwowana wielkoskalowa struktura Wszechświata, dlaczego oddziaływania silne zachowują pewne symetrie?). Dotyczy to zarówno najmniejszych skali, które opisuje się obecnie przy użyciu Modelu Standardowego, jak i największych, gdzie buduje się modele kosmologiczne w oparciu o Ogólną Teorię Względności. Fizycy proponują rozwiązania próbujące tłumaczyć te obserwacje: od wprowadzania nowych cząstek i mechanizmów po dość drastyczne modyfikacje obowiązujących teorii. Z niektórych z tych propozycji wynikałoby występowanie we Wszechświecie defektów topologicznych.

Defekty topologiczne są strukturami, które klasycznie pojawiają się w pewnych modelach badanych przez teorię pola, przy założeniu odpowiednich warunków brzegowych. Ich istnienie jest wówczas gwarantowane przez ciągłość pola. Stąd też się bierze ich nazwa, jako że to właśnie topologia jest działem matematyki zajmującym się pojęciem ciągłości. Defekty te są obecne w wielu dziedzinach (najczęściej kojarzone są z fizyką materii skondensowanej, ale pojawiają się także w fizyce atomowej czy fizyce cząstek elementarnych), jednakże w niniejszym artykule skupimy się na ich potencjalnym znaczeniu dla astrofizyki i kosmologii.

W zależności od tego, jaki model pola rozważamy i w jakiej przestrzeni to pole „żyje” (można rozważać na przykład pola w przestrzeni trójwymiarowej, ale też na sferze), możemy się natknąć na wiele różnych rodzajów defektów topologicznych. Rodzina tych struktur jest bardzo szeroka i obejmuje obiekty o tak fantastycznych nazwach (często związanych z ich kształtami) jak wiry, struny, monopole, czy tekstury. Wygodny opis tego, w jakich przypadkach należy się spodziewać jakiego rodzaju defektów, daje teoria homotopii – dział topologii algebraicznej. Zamiast jednak się w nią wgłębiać, co wymagałoby dość sporych przygotowań, w tym artykule skupimy się na najprostszych rodzajach defektów topologicznych – kinkach i ścianach domenowych.

Plan artykułu przedstawia się następująco. Zaczniemy od krótkiego przywołania kilku niezbędnych faktów z teorii pola – języka opisującego klasyczne defekty topologiczne. Następnie skupimy się na najprostszym rodzaju defektu topologicznego: jednowymiarowym kinku. Wykształcone przy nim intuicje prze-

niesiemy do trzech wymiarów, otrzymując ściany domenowe. W końcu opiszemy hipotetyczne kosmiczne ściany domenowe oraz obecnie prowadzone eksperymenty próbujące je wykryć.

Kilka słów o teorii pola

Pole jest jednym z najważniejszych pojęć fizycznych. W prostych słowach, jest to przyporządkowanie każdemu punktowi rozpatrywanej przestrzeni (lub czasoprzestrzeni) pewnej wielkości. W tym artykule będziemy rozważać najprostsze rodzaje pól – pola skalarne, czyli takie, które przyjmują wartości liczbowe. Przykładem pola skalarnego może być pole temperatur – każdemu punktowi na mapie Polski przyporządkowujemy liczbę równą temperaturze w odpowiadającym mu miejscu. Podobnie jak w przypadku temperatury, od naszych pól skalarnych będziemy też wymagać ciągłości (a nawet więcej – istnienia drugich pochodnych).

Skupimy się na fundamentalnych polach skalarnych – są to pola (spełniające pewne dodatkowe warunki techniczne), które można skwantować i powiązać z jakimiś cząstkami (jedynym takim obecnie znanym polem skalarnym jest pole Higgsa). Przyjmowane przez nie wartości i ich ewolucja w czasie nie są dowolne, lecz podlegają równaniom Eulera-Lagrange’a, do których za moment wrócimy.

Polu skalarnemu można przypisać energię. W d -wymiarowej przestrzeni (przez t będziemy oznaczać współrzędną czasową, zaś przez x_n współrzędne przestrzenne), gęstość tej energii ma postać

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^d \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right)^2 + V(\phi) \quad (1)$$

gdzie ∂ oznaczają pochodne cząstkowe, a V jest potencjałem pola. Jeśli pole na jakimś obszarze ma stałą, niezmienną w czasie wartość, to dwa pierwsze składniki powyższego wyrażenia znikają. Z drugiej strony, jeśli pole szybko się zmienia (niezależnie czy mówimy o ewolucji w czasie, czy o dużych różnicach w wartości pola między bliskimi punktami), to składniki te są znaczące. W związku z tym można je interpretować jako część kinetyczną gęstości energii. Pozostała część, czyli $V(\phi)$, zgodnie ze swoją nazwą odpowiada części potencjalnej gęstości energii. Będziemy się także posługiwać pojęciem energii całkowitej, która jest całką z gęstości energii po całej przestrzeni, podobnie jak masa obiektu jest całką z jego gęstości masy po objętości.

Dla fundamentalnego pola skalarnego o potencjale V w d wymiarach przestrzennych równanie Eulera-Lagrange’a, czyli równanie ewolucji pola, przyjmuje formę

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \sum_{n=1}^d \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_n^2} + V'(\phi) = 0. \quad (2)$$

Konkretna postać funkcji $V(\phi)$ zależy od rozpatrywanego modelu, jednakże praktycznie zawsze fizyczne potencjały są ograniczone z dołu. Jeżeli kres dolny funkcji V oznaczymy przez V_{\min} , to możemy rozważyć nowy model, z poten-

cjałem równym $V(\phi) - V_{\min}$. Potencjał ten jest ograniczony z dołu przez zero. Z drugiej strony, taki model jest opisywany przez dokładnie takie same równania Eulera-Lagrange'a, gdyż występuje w nich jedynie pochodna potencjału, zatem odjęty przez nas stały wyraz znika. Oznacza to, że bez straty ogólności możemy założyć nieujemność funkcji V (a jeśli V osiąga swój kres dolny, to możemy zażądać, żeby w minimum globalnym przyjmował wartość równą zero). Zatem jeśli V osiąga minimum dla ϕ_0 , to pole równe wszędzie tożsamościowo ϕ_0 ma w każdym miejscu zerową gęstość energii (dlaczego?) i w rezultacie zerową energię całkowitą.

Kinki

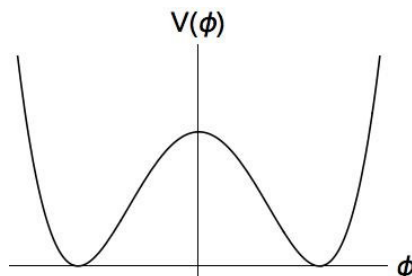
W dalszej części artykułu eksplorować będziemy model zwany ϕ^4 . Opisuje on pole skalarne z potencjałem (rysunek 1)

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \eta^2)^2, \quad (3)$$

gdzie λ i η są stałymi. Zaczniemy od zbadania jego własności w jednym wymiarze, gdy równanie Eulera-Lagrange'a ma postać

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \lambda \phi (\phi^2 - \eta^2) = 0. \quad (4)$$

Oczywiście pole ϕ jest tutaj cały czas funkcją współrzędnej czasowej t i przestrzennej x .



Rys. 1. Potencjał w modelu ϕ^4

Spróbujmy znaleźć rozwiązania równania (4). Łatwo się przekonać, że ich przykładami są funkcje stałe:

$$\phi(t, x) = \eta, \quad \phi(t, x) = -\eta \quad \text{oraz} \quad \phi(t, x) = 0. \quad (5)$$

Jako, że są to rozwiązania stałe, części kinetyczne ich gęstości energii znikają. Ponadto w przypadku dwóch pierwszych rozwiązań części potencjalne również są tożsamościowo równe zero, zatem całkowita energia tych rozwiązań jest zerowa. Z drugiej strony, ostatnie z rozwiązań ma w każdym miejscu gęstość energii $V_{\max} = \lambda\eta^4/4$, pochodzącą od części potencjalnej. Oznacza to, że jego energia całkowita jest nieskończona (jako całka z dodatniej stałej). W dalszej części tej sekcji będziemy chcieli się skupić na rozwiązaniach o skończonej energii.

Jaki warunek musi spełniać rozwiązanie, aby jego energia była skończona? Konieczne jest, aby w nieskończonościach dążyło ono do minimów potencjału (i to odpowiednio szybko). W odwrotnym przypadku, pojawiłby się nieskończonoj długości obszar, w którym gęstość energii byłaby silnie dodatnia (tzn. istnieje stała $C > 0$, taka że w każdym punkcie zachodzi $\rho > C$), zatem energia całkowita byłaby nieskończona. Szczegółowe rozumowanie prowadzące do tego wniosku wymaga użycia kilku faktów z analizy matematycznej, które opuścimy. Mimo tego, czytelnik zaznajomiony z podstawowymi własnościami granic oraz całek może spróbować udowodnić, że w przypadku gdy wartość pola w nieskończoności nie zmierza do η lub $-\eta$, energia całkowita istotnie jest nieskończona. Możemy wysunąć wniosek, że rozwiązanie o skończonej energii musi spełniać warunki

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(t, x) = \pm\eta, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(t, x) = \pm\eta, \quad (6)$$

gdzie znaki mogą zostać wybrane dowolnie, aczkolwiek jest to zaledwie warunek konieczny.

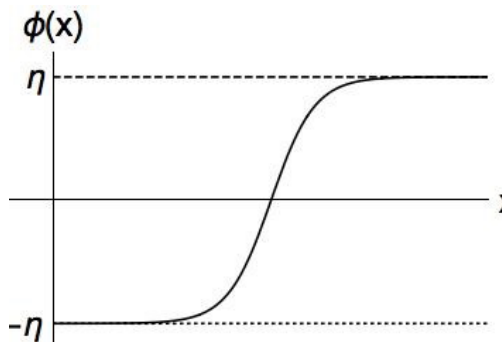
Konkretną postać warunków (6) można wybrać na jeden z czterech sposobów, jak pokazuje tabela 1. Wybór ten dzieli możliwe rozwiązania na cztery wiersze. Zastanówmy się, czy możliwe byłoby, aby rozwiązanie leżące w jednym z tych wierszy w trakcie ewolucji przeszło do innego. Spróbujmy zrobić to „na siłę” deformując rozwiązanie. Jednym ze sposobów, na które można byłoby to osiągnąć jest przeniesienie naraz całego fragmentu mieszczącego się w jednym z minimów do drugiego minimum (taki fragment osi rzeczywistej ma nieskończoną długość). Niestety, po drodze minęlibyśmy punkt $\phi = 0$, gdzie potencjał jest równy V_{\max} . Jak wcześniej, skoro na nieskończenie długim fragmencie gęstość energii jest silnie dodatnia, to całkowita energia byłaby w tym momencie nieskończona, czyli musielibyśmy wykonać nieskończoną pracę. Innym sposobem byłoby przrzucanie skończonych fragmentów osi z jednego minimum do drugiego, jednakże taka procedura zajęłaby nieskończenie wiele czasu. Wszelkie inne możliwe podejścia do tego problemu skończą się podobną konkluzją. Nie istnieje zatem sposób na ciągłe przejście z jednego wiersza do innego – możemy powiedzieć, że wiersze te są topologicznie rozdzielone.

Tab. 1. Możliwe warunki brzegowe dla rozwiązań o skończonej energii w jednowymiarowym modelu ϕ^4

Pole w $-\infty$	Pole w $+\infty$	Kink
η	η	nie
$-\eta$	$-\eta$	nie
$-\eta$	η	tak
η	$-\eta$	tak

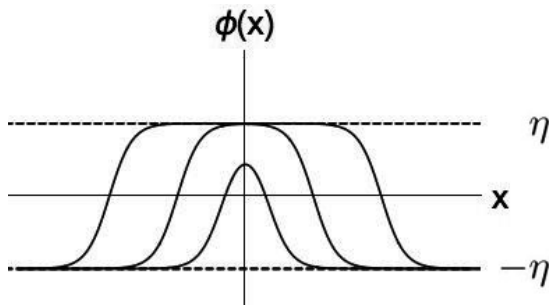
Rozważmy teraz rozwiązania należące do pierwszych dwóch wierszy z tabeli. Dla ustalenia uwagi skupmy się na pierwszym przypadku. Wówczas w punktach pośrednich pole może przyjmować dowolne wartości, o ile tylko dąży do η w nieskończoności odpowiednio szybko. W tym wierszu leży też znalezione wcześniej

rozwiązanie o zerowej energii: $\phi = \eta$ (przerywana linia na rysunku 2). Bardzo podobnie wygląda sytuacja w przypadku drugiego od góry wiersza w tabeli. Dla niego również znamy rozwiązanie o energii zerowej: $\phi = -\eta$ (kropkowana linia na rysunku 2).



Rys. 2. Przykładowe rozwiązania modelu ϕ^4 .

Możemy sobie wyobrazić sytuację, w której pole w obu nieskończonościach dąży do $-\eta$, ale na jakimś obszarze przechodzi do drugiego minimum potencjału (najbardziej zewnętrzna linia na rysunku 3). Jeżeli zbadamy ewolucję takiego rozwiązania okaże się, że pole będzie dążyło do zmniejszenia tego obszaru, tak jak pokazują to kolejne kroki przedstawione na rysunku 3. Jeśli poczekamy odpowiednio długo, to ostatecznie pole całkiem wyjdzie ze studni η i będzie wykonywało drgania wokół $-\eta$. Można zrozumieć to intuicyjnie odwołując się do sytuacji znanej z życia codziennego: wypuszczonego swobodnie z ręki kamienia. Ma on pewną energię potencjalną, która zamieniana jest na energię kinetyczną pod wpływem siły grawitacji. Podobnie tutaj, pole sporą energię potencjalną, związaną z maksimum w zerze, zamienia na energię kinetyczną drgań wokół $-\eta$, gdzie energia potencjalna jest niewielka. Różnica polega na tym, że nie dzieje się to pod wpływem zewnętrznej siły, a samooddziaływania pola (członu nieliniowego w równaniu Eulera-Lagrange'a).



Rys. 3. Kolejne etapy ewolucji pola omawianego w tekście. Przerywane linie zaznaczają wartości η oraz $-\eta$.

W pozostałych dwóch wierszach, czyli na przykład gdy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(t, x) = -\eta \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \phi(t, x) = \eta, \quad (7)$$

sytuacja staje się ciekawsza. Ponieważ pole jest ciągłe, w którymś miejscu ϕ musi przyjmować wartość równą zero (i gęstość energii jest tam dodatnia) – mówimy wówczas o występowaniu defektu topologicznego. Zatem tym razem spotykamy się z przeciwieństwem wyżej rozważanej sytuacji – pole musi przechodzić przez maksimum potencjału.

Oczywiście konieczność istnienia obszaru z niezerową gęstością energii oznacza, że niemożliwe jest znalezienie rozwiązania o zerowej energii całkowitej. Istotnie, metodami analizy matematycznej można obliczyć dokładną wartość najmniejszej możliwej energii oraz pokazać, że rozwiązanie o tej energii ma postać (ciągła linia na rysunku 2):

$$\phi(t, x) = \operatorname{tgh} \left(\eta \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (x - x_0) \right), \quad (8)$$

gdzie tgh jest funkcją nazywaną tangensem hiperbolicznym, zaś x_0 jest położeniem miejsca, w którym ϕ przyjmuje wartość równą zero. Możemy w tym przypadku powiedzieć, że defekt topologiczny zlokalizowany jest w pobliżu punktu x_0 . Takiego rodzaju jednowymiarowe defekty nazywa się kinkami.

Dociekliwy czytelnik może się zastanawiać: czy nie dałoby się zmniejszyć energii całkowitej rozwiązania (8) poprzez zmniejszenie obszaru w pobliżu którego pole jest bliskie zero. Taka zmiana oznaczałoby jednak, że w tym obszarze funkcja musi rosnąć szybciej (jej wykres jest bardziej stromy). Wiązałoby się to więc ze wzrostem części kinetycznej gęstości energii w pobliżu x_0 . Okazuje się, że ten wzrost jest większy niż spadek części potencjalnej, więc całkowita energia rośnie.

Podobną analizę można przeprowadzić dla innych potencjałów. Generalnie, kinki pojawiają się w modelach, w których rozmaitość próżniowa (tak nazywamy zbiór wartości ϕ , dla których $V(\phi) = 0$) jest zbiorem niespójnym. Czytelnik może sam spróbować zaproponować inne potencjały posiadające tę własność. Wskazówką niech będzie tu nazwa jednego z takich modeli: sinus-Gordon.

Kosmiczne ściany domenowe

Po dyskusji przypadku jednowymiarowego, przenieśmy się z naszym modelem ϕ^4 do trzech wymiarów. Od razu napotykamy się na problem z odpowiednim postawieniem warunków brzegowych. Jeżeli chcielibyśmy się ponownie skupić na rozwiązaniach o skończonej energii, musielibyśmy zażądać, aby w nieskończoności pole dążyło do wartości leżącej na rozmaitości próżniowej (czyli równej η bądź $-\eta$). Jeżeli jednak w pewnym kierunku pole dążyłoby do jednego z minimów potencjału, a w innym kierunku do drugiego, napotkalibyśmy na problem. Używając argumentacji opartej na ciągłości pola można pokazać, że wówczas istniałby obszar w nieskończoności, w którym pole miałoby wartość bliską zero, a zatem silnie dodatnią gęstość energii. Oznaczałoby to, że energia całkowita jest

nieskończona, zatem musielibyśmy się ograniczyć do rozwiązań, w których albo w nieskończoności pole we wszystkich kierunkach dąży albo do η , albo do $-\eta$. Niestety, takie warunki nie zapewniają nam istnienia defektów topologicznych.

Dokonajmy radykalnego kroku i postanówmy nie przejmować się warunkami brzegowymi. W końcu chcemy zająć się polem wypełniającym cały Wszechświat – kto wie co w ogóle miałyby oznaczać termin brzeg w takim wypadku. Rozważmy zatem sytuację, w której nasz Wszechświat jest wypełniony hipotetycznym polem skalarnym z potencjałem (3) i zastanówmy się, co by z niego mogło wynikać. Jeżeli istniałyby pewne obszary, w których pole jest w pobliżu jednego z minimumów potencjału oraz inne obszary, w których znajdowałoby się w drugim minimum, musiałyby one być rozdzielone rejonami, gdzie pole byłoby bliskie zeru. Takie rejony nazywa się ścianami domenowymi, a spójne obszary wpadające do jednego z minimumów – domenami (przez podobieństwo do domen magnetycznych w ferromagnetykach).

Skąd mogłaby się wziąć taka struktura domenowa w kosmosie? Wiemy, że dawno temu Wszechświat był dużo gęstszy i bardziej gorący. W tamtym okresie gęstość energii naszego pola skalarnego również byłaby wysoka w każdym miejscu. Oznacza to, że w różnych miejscach pole mogłoby przyjmować bardzo różne wartości, leżące zarówno blisko minimumów potencjału z rys. 1, jak i blisko zera, a nawet daleko w lewą i prawą stronę wykresu. W trakcie rozszerzania się Wszechświata, ochładzałyby się on i w efekcie spadałyby gęstość energii naszego pola. W pewnym momencie gęstość energii mogłaby spaść do poziomu mniejszego niż V_{\max} , co oznaczałoby, że w pewnych miejscach pole zeszkłoby do jednego z minimumów potencjału, zaś w innych do drugiego z nich. W ten sposób pojawiłyby się domeny, które ze względu na ciągłość musiałyby być przedzielone ścianami domenowymi. Domeny te ewoluowałyby dalej, niektóre z nich mogłyby zniknąć (podobnie jak w przypadku zilustrowanym na rys. 3). Mogłoby się też zdarzyć tak, że ostatecznie jedna z domen objęłaby cały Wszechświat. Wówczas nie istniałaby żadna ściana domenowa, ale przecież nie mamy gwarancji, że musi istnieć jakikolwiek defekt (w przeciwieństwie do rozważanego wyżej przykładu kinku).

Zastanówmy się nad tym jak można byłoby wykryć istnienie omawianego pola skalarnego ϕ . Nasze urządzenia pomiarowe zbudowane są z materii i mogą wchodzić w interakcję z materią i promieniowaniem. Jeżeli chcielibyśmy móc zarejestrować istnienie pola ϕ , musi ono być w stanie wchodzić w interakcję z naszymi przyrządami. Nie jest to jednak jedyny warunek, który musi zostać spełniony. Zauważmy, że wewnątrz domen pole jest blisko minimum potencjału oraz prawie się nie zmienia, zatem gęstość energii pola jest bardzo mała. Praktycznie cała energia pola jest zawarta w ścianach domenowych. W szczególności oznacza to, że będąc wewnątrz jakiejś domeny moglibyśmy nie być w stanie tego wykryć. Jedynie przejścia przez ściany mogłyby być rejestrowane przez nasze instrumenty.

Jak mogą wyglądać takie instrumenty? To zależy od sposobu, w jaki pole ϕ oddziałuje (sprzęga się) z materią. Jedną z możliwości jest oddziaływanie podobne do magnetycznego. Takiego rodzaju sprzężeń szuka *Global Network of Optical Ma-*

gnometers for Exotic Physics (w skrócie GNOME). Jak sama nazwa wskazuje, jest to ogólnoswiatowa sieć magnetometrów, czyli urządzeń służących do pomiaru pola magnetycznego. Są one ekranowane w taki sposób, żeby nie były wyczuwalne żadne zewnętrzne pola magnetyczne. Dzięki temu, gdy zaczną coś wykrywać, możemy wysuwać przypuszczenie, że jest to omawiane pole ϕ . Spodziewany sygnał od takiego pola byłby jednak bardzo słaby, porównywalny z szumami aparatury, więc potrzeba całej sieci stacji pomiarowych. Wówczas, dzięki skorelowaniu odczytów z różnych przyrządów (podobnie jak w przypadku wykrywaczy fal grawitacyjnych) jest się w stanie nie tylko odróżnić rzeczywisty sygnał od szumu, ale nawet podać kierunek, z którego nadeszła zaobserwowana ściana domenowa oraz określić jej prędkość. GNOME, który zaczynał jako kooperacja między uniwersytetami w Krakowie oraz Berkeley, obecnie składa się z kilkunastu stacji pomiarowych rozmieszczonych w Europie, Ameryce Północnej i Azji Wschodniej.

Inny pomysł przyświecał twórcom projektu GPS.DM (*Global Positioning System as a dark matter observatory*). Jeśli pole skalarne sprzęga się w jakiś sposób ze zwykłą materią, to jego obecność będzie modyfikowała wyniki eksperymentów. Te modyfikacje można traktować jako zmiany wartości fundamentalnych stałych przyrody. Można byłoby zatem dokonywać pomiarów pewnych wielkości (np. odstępów między poziomami energetycznymi w atomach) i sprawdzać czy nie pojawiają się jakieś odstępstwa, które można by wytłumaczyć naszym polem ϕ . Ponownie, takie zmiany byłyby bardzo małe, porównywalne z szumami, zatem potrzebowałibyśmy całej sieci układów pomiarowych, których wyniki można by porównywać. Jak można się domyślić z nazwy opisywanego projektu, dobrym wyborem są satelity GPS. Na pokładzie każdego z kilkudziesięciu satelitów tego systemu, znajduje się dokładny zegar atomowy, którego „wskazania” zależą od lokalnych wartości stałych fizycznych. Przejście omawianego defektu topologicznego przez taki zegar spowoduje chwilową desynchronizację z pozostałymi. GPS.DM zajmuje się poszukiwaniem właśnie takich zdarzeń.

Oczywiście żadne z opisanych wyżej doświadczeń do tej pory nie pozwoliło wykryć przejścia Ziemi przez jakikolwiek defekt topologiczny. Powody tego mogą być różne: zbyt słaba czułość przyrządów, błędne założenia o sposobie oddziaływania defektów z naszymi urządzeniami, czy po prostu ich brak we Wszechświecie. Ostatnia ewentualność może też być interpretowana dwójako: być może ściany domenowe (lub inne defekty) zniknęły w toku ewolucji Wszechświata, a może ich nigdy nie było. Niemniej jednak, warto prowadzić dalsze poszukiwania. Potencjalnych wytłumaczeń obserwacji ciemnej materii, ciemnej energii, czy wielkoskalowej struktury Wszechświata jest wiele, a defekty topologiczne są tylko jednym z nich. Ale kto wie, może to właśnie w nich tkwi rozwiązanie nurtujących nas problemów. Jeśli nie będziemy szukać, nigdy się tego nie dowiemy.