

Redefinicja jednostek układu SI – na przykładzie kelwina

Część II

Andrzej Zięba¹
AGH Kraków

1. Wstęp

Przygotowywane od dłuższego czasu zmiany w układzie jednostek SI zostały przegłosowane przez Międzynarodową Konferencję Miar, na posiedzeniu 16 listopada 2018 w Wersalu. Oficjalnie wejdą w życie 24 maja 2019 r. Istota zmian polega na zdefiniowaniu jednostek makroskopowych na podstawie ustalonych wartości wybranych stałych fizycznych.

Celem dwuczęściowego artykułu jest przedstawienie redefinicji jednostek układu SI na przykładzie jednostki temperatury – kelwina. W jego pierwszej części [1] przedyskutowano istotę zagadnienia, wykorzystując przykład termometru gazowego. Ten typ termometru *pierwotnego* może być wykorzystany do wyznaczenia k_B , ale pomiar taki jest mało dokładny.

Wysokie wymagania dotyczące niepewności wyznaczenia k_B zostały spełnione przez trzy rodzaje termometrów pierwotnych, które zostaną omówione w kolejnych rozdziałach. Realizacja termometrii stałej dielektrycznej gazu stała się możliwa dzięki teoretycznemu obliczeniu polaryzowalności atomu helu z dokładnością lepszą niż 10^{-6} i istota tego osiągnięcia jest tematem rozdziału 5. W podsumowaniu zostaną omówione konsekwencje zmiany definicji kelwina dla dokładnych pomiarów temperatury.

W przeciwieństwie do typowych prac przeglądowych [2], wyprowadzone zostaną - na poziomie elementarnym - podstawowe równania opisujące te metody. Wskazują one w szczególności, co trzeba mierzyć. Pominięte zostaną liczne czynniki poprawkowe, które są niezbędne dla uzyskania wymaganej dokładności. Artykuł powstał na podstawie referatu na Krakowskim Konwersatorium Fizycznym PTF, wygłoszonego w przeddzień głosowania nad zmianami definicji jednostek układu SI.

2. Termometria akustyczna

W gazach i cieczach mogą rozchodzić się wyłącznie fale podłużne. Prędkość fali określa wzór

$$v = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}, \quad (1)$$

¹ email: Andrzej.Zieba@fis.agh.edu.pl

w którego liczniku znajduje się iloczyn ciśnienia p i wykładnika adiabaty κ , tworzące razem moduł ściśliwości adiabatycznej. Symbol ρ oznacza gęstość ośrodka.

Rozpatrzmy teraz model gazu doskonałego, w którym w objętości V i temperaturze T znajduje się N jednakowych molekuł o masie m . Przy wykorzystaniu tych zmiennych równanie stanu zapisać można jako $pV/T = Nk_B$. Gęstość równa jest z definicji $\rho = (N \cdot m)/V$. Łącząc obydwie związki obliczamy gęstość $\rho = (p \cdot m)/(k_B T)$, którą podstawiamy do (1). W rezultacie uzyskujemy wzór

$$v = \sqrt{\frac{\kappa k_B T}{m}} \quad (2)$$

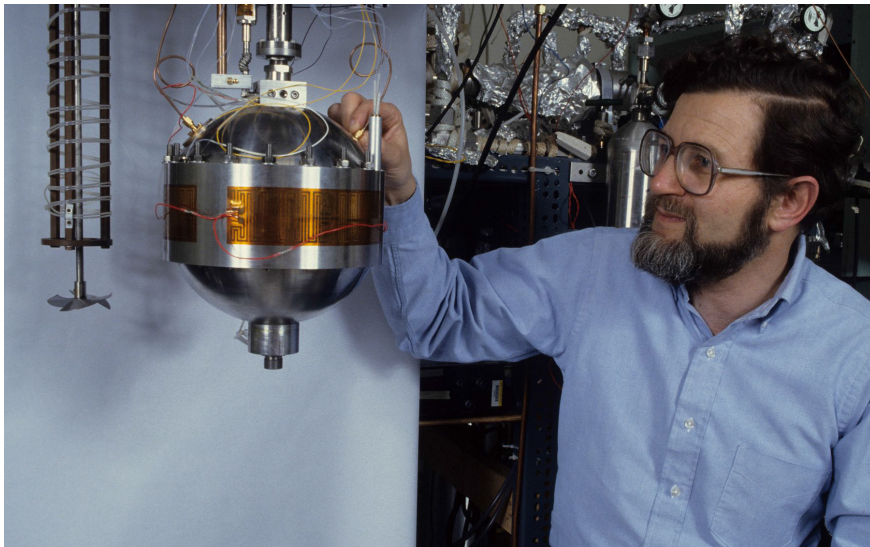
spełniony dokładnie tylko przez gaz doskonały. Dla gazów jednoatomowych $\kappa = 5/3$. Zauważmy niezależność prędkości dźwięku od ciśnienia gazu. Niemniej pomiar wykonuje się w funkcji ciśnienia, by móc ekstrapolować wyniki do granicy $p \rightarrow 0$, w której gaz rzeczywisty spełnia dokładnie równanie stanu gazu doskonałego.

Do pomiaru prędkości dźwięku wygodnie jest wykorzystać zjawisko rezonansu akustycznego we wnęcie. Wysoka dokładność pomiaru jest możliwa dlatego, że w tej samej wnęcie wzbudzić można również stojące fale elektromagnetyczne (EM). Obydwie częstotliwości rezonansowe zapisać można jako

$$f_A = \frac{v}{l_{n,l}^{(A)}} \quad \text{oraz} \quad f_{EM} = \frac{c}{l_{n,l}^{(EM)}}. \quad (3)$$

W liczniku znajduje się prędkość dźwięku v lub prędkość światła c , w mianowniku – stała o wymiarze długości, zależna od geometrii wnęki oraz liczb naturalnych n, l , określających typ wzbudzonej fali stojącej, czyli modu (dla analogicznego przypadku drgań struny o długości d zachodzi $l_n^{(A)} = 2d/n$). W pierwszym przybliżeniu $l_{n,l}^{(A)} = l_{n,l}^{(EM)}$ i stosunek f_A/f_{EM} staje się niezależny od geometrii wnęki. Z układu równań (2) i (3) obliczamy stałą Boltzmanna.

Wnękę rezonansową (rys. 1) wypełnioną helem lub argonem umieszcza się w termostacie realizującym zadaną temperaturę, np. punktu potrójnego wody TPW (TPW – od ang. *Triple Point of Water*). Ze względu na różne prędkości dźwięku i światła odpowiednie częstotliwości rezonansowe są rzędu pojedynczych kiloherców i gigaherców. Częstotliwości rezonansowe można wyznaczyć z wysoką dokładnością, dlatego opisana metoda jest najdokładniejszym sposobem wyznaczenia k_B . Metoda została rozwinięta przez Moldovera i innych [3] z National Institute of Standards and Technology (NIST). Uzyskana dokładność 1,7 ppm (1 ppm, z ang. *part per milion*, to 10^{-6}) była 5-krotnie lepsza od wyników poprzednich i pozostała rekordowa przez ponad dwadzieścia lat. Najnowszy pomiar [4] stałej Boltzmanna tą metodą obarczony jest niepewnością względną 0,56 ppm.



Rys. 1. Michael Moldover i zbudowana w jego zespole kulista wnęka rezonansowa przeznaczona do dokładnego wyznaczenia stałej Boltzmanna. Fotografia wykonana ok. 1990, reprodukcja z [5] dzięki uprzejmości NIST.

3. Termometria szumowa

Dowolny rezystor R jest źródłem szumu termicznego². Uśredniony po czasie kwadrat napięcia szumów $\langle U^2 \rangle$ określa wzór Johnsona-Nyquista

$$\langle U^2 \rangle = 4k_B TR\Delta f. \quad (4)$$

We wzorze tym Δf oznacza przedział częstotliwości, w którym szum jest mierzony.

W zjawisku tym dwie rzeczy są godne uwagi: uniwersalność wzoru oraz fakt, że małe i fluktuujące napięcie można zmierzyć z tak wysoką dokładnością. Dla jej osiągnięcia wykonuje się pomiar porównawczy: napięcie szumu porównuje się z szumem wzorcowym generowanym cyfrowo, o napięciu kontrolowanym przez kwantowy wzorzec działający w oparciu o złącze Josephsona. Najdokładniejszy wynik [6] obarczony jest niepewnością względną 2,7 ppm. Potrzeba uśredniania po czasie oznacza w praktyce, że pomiar napięcia szumów trwał około stu dni.

4. Termometria stałej dielektrycznej gazu

Wykorzystanie pomiaru pojemności kondensatora wypełnionego gazem o znanej (z teorii) polaryzowalności atomowej do zbudowania termometru pierwotnego o metrologicznej dokładności zostało zaproponowane i szczegółowo przeanalizowane przez Moldovera [7]. Spróbujmy wyprowadzić najprostszy wzór na pojemność takiego kondensatora.

² Wyprowadzenie wzoru (4) np. w podręczniku *Feynmanna wykłady z fizyki*, t. I., rozdz. 41-1.

Pojedynczy atom umieszczony w polu elektrycznym o natężeniu E uzyskuje indukowany dipolowy moment elektryczny

$$\mu = \alpha_d E, \quad (5)$$

gdzie α_d nazywamy polaryzowalnością. Wielkość ta jest związana z przenikalnością elektryczną względną ϵ_r wzorem Clausiusa-Mossottiego³

$$3 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{n \alpha_d}{\epsilon_0}. \quad (6)$$

We wzorze tym n oznacza koncentrację cząstek, którą dla gazu doskonałego obliczyć można jako $n = p/(k_B T)$. Otrzymujemy

$$3 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{p \alpha_d}{k_B T \epsilon_0}. \quad (7)$$

Pojemność kondensatora wypełnionego jednorodnym dielektrykiem zapisać można jako

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r l^* \quad (8)$$

gdzie, niezależnie od geometrii kondensatora, l^* jest stałą o wymiarze długości. (Dla kondensatora płaskiego l^* jest stosunkiem powierzchni okładek do ich odległości.) Stałą tej nie musimy znać, jeżeli wykonamy pomiar pojemności w funkcji ciśnienia gazu. Z układu równań (7) i (8) można wyprowadzić zależność, dla której podajemy wiodący wyraz rozwinięcia w szereg potęgowy

$$\frac{C(p)}{C(p=0)} \cong 1 + \frac{p \alpha_d}{\epsilon_0 k_B T} + \dots \quad (9)$$

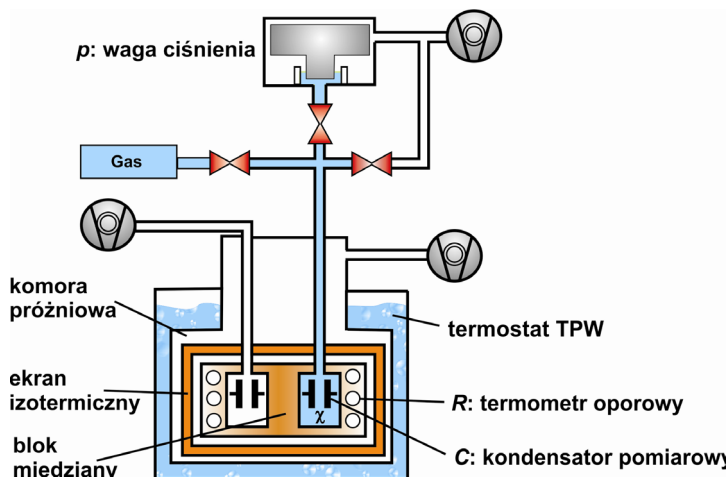
Pomiar wykonuje się w stałej temperaturze punktu potrójnego wody T_{TPW} . Bardzo małe zmiany pojemności mierzy się precyzyjnym mostkiem pojemnościowym. Wzór (9) nie uwzględnia zjawiska kompresji elektrod kondensatora, powodujących zmniejszenie efektywnej długości l^* . Niepewność związana z tą poprawką jest dużym przyczynkiem do $u(k_B)$ [8]. Wyzwaniem jest też dokładny pomiar ciśnienia. Najdokładniejszy wynik uzyskany w Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB) w Berlinie obarczony był niepewnością 1,9 ppm [9].

5. Obliczenie polaryzowalności atomu helu

Wykorzystanie wzoru (9) wymaga teoretycznego obliczenia polaryzowalności α_d . Atom helu jest jedyną molekułą gazu, dla której da się to zrobić z wystarczającą dokładnością. Obliczenie takie stanowi pouczający przykład wykorzystania kolejnych wariantów teorii kwantowej.

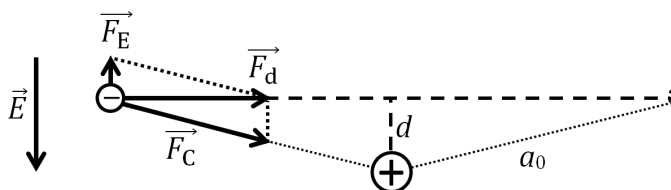
Początkiem mechaniki kwantowej był model Bohra. Model ten, obok podstawowego przeznaczenia – obliczenia widma atomu wodoru – umożliwił elementarne wyjaśnienie szeregu zjawisk, w tym również polaryzowalności atomu.

³ Więcej nt. tego równania w podręczniku *Feynmanna wykłady z fizyki*, t. II., rozdz. 32-3.



Rys. 2. Schemat aparatury wykorzystywanej w PTB. Wg. [8], adoptowany do tego artykułu przez Christofa Gaisera z PTB.

Zakładamy, że poruszający się wokół jądra elektron znajduje się w polu elektrycznym o wektorze natężenia E prostopadłym do płaszczyzny orbity (rys. 3). Na elektron działają dwie siły: kulombowskiego przyciągania przez jądro $F_C = (4\pi\epsilon_0)^{-1}e^2/a_0$ oraz pochodząca od pola elektrycznego $F_E = eE$. Ich wypadkowa jest siłą dośrodkową F_d utrzymującą elektron na orbicie. Płaszczyzna orbity nie przechodzi już przez jądro, lecz jest przesunięta o odcinek d (rys. 3). „Środek ciężkości” ujemnego ładunku elektronu nie pokrywa się z dodatnim ładunkiem jądra. Indukowany zostaje dipolowy moment elektryczny $\mu = ed$.



Rys. 3. Wyjaśnienie powstania momentu dipolowego w modelu Bohra.

Z podobieństwa trójkątów na rys. 3 wynika proporcja $F_E/F_C = d/a_0$, w której a_0 oznacza promień Bohra. Z proporcji tej obliczamy kolejno: długość d , moment elektryczny $\mu = ed$ i polaryzowalność $\alpha_0 = \mu/E$. Otrzymujemy wzór

$$\alpha_d^{(Bohr)} = 4\pi\epsilon_0 a_0^3, \quad (10)$$

który określa prawidłowo rząd wielkości rzeczywistych wartości polaryzowalności atomów. Ponadto definiuje atomową jednostkę polaryzowalności (a. u.), równą $1,649 \cdot 10^{-41} \text{ C}^2\text{m}^2/\text{J}$. W tych jednostkach teoretycy wyrażają wyniki obliczeń (np. podane w Tabeli 1).

Tabela 1. Zestawienie przyczynków do obliczenia statycznej polaryzowalności ${}^4\text{He}$. Wyrażone są w jednostkach atomowych $\times 10^{-6}$. Cyfry w nawiasie oznaczają ocenę niepewności ostatnich cyfr wyniku, brak tej informacji – że ostatnia cyfra jest pewna. Wartości teoretyczne z [14], wynik doświadczalny z pracy [15], wyrażony w jednostkach atomowych.

Wynik nierelatywistyczny	1 383 809,9864
relatywistyczny α^2	-80,3599
QED α^3 (bez $\partial_E^2 \ln k_0$)	30,4738(1)
QED α^3 wyraz $\partial_E^2 \ln k_0$	0,183(1)
QED α^4	0,56(14)
relat. na masę jądra $\alpha^2 m_e / M_{\text{He}}$	-0,0935(1)
skończony rozmiar jądra	0,0217(1)
Suma	1 383 760,77(14)
Wartość doświadczalna	1 383 761,6(27)

Najprostszym wariantem „prawdziwej” mechaniki kwantowej jest teoria nierelatywistyczna, formułowana najczęściej z wykorzystaniem równania Schrödingera. Dokładne obliczenie dla atomów innych niż wodór wymagają użycia wieloelektronowej funkcji falowej. Obliczenia takie są możliwe tylko dla najbliższych atomów⁴ – już dla helu funkcja falowa zależy od 6 współrzędnych przestrzennych (po 3 dla każdego elektronu).

Znaczenie efektów relatywistycznych można w sposób elementarny ocenić przy pomocy modelu Bohra, przez obliczenie stosunku prędkości elektronu v na orbicie $n = 1$ do prędkości światła c . Uzyskana bezwymiarowa liczba

$$\alpha = \frac{e^2}{2 \varepsilon_0 h c} \cong \frac{1}{137,02} \quad (11)$$

zwana tradycyjnie stałą struktury subtelnej, jest podstawową stałą fizyczną określającą „siłę” oddziaływań elektromagnetycznych. Różne przyczynki relatywistyczne są proporcjonalne do kolejnych potęg stałej α .

Poprawka relatywistyczna rzędu α^2 może być obliczona przy pomocy równania Breita-Pauliego lub metod równoważnych. Jej wartość stanowi tylko -58 ppm wyniku nierelatywistycznego [10]. Przyczynki wyższych rzędów wymagają użycia teorii elektrodynamiki kwantowej (QED). Wiodący przyczynek rzędu α^3 został obliczony po raz pierwszy przez Pachuckiego i Sapirsteina [11]. Zaskakująca okazała się jego względnie wysoka wartość, stanowiąca -38% składnika α^2 . Autorzy ocenili dokładność swoich obliczeń na 2 ppm.

⁴ Najprostsze obliczenie wykonać można dla atomu wodoru, ale molekuly gazowego wodoru są dwuatomowe, czyli jest to układ bardziej złożony niż atom helu.

Dokładność obliczeń teoretycznych potrzebną dla interpretacji eksperymentu udało się osiągnąć w pracy Łacha, Jeziorskiego i Szalewicza [12]. Co zostało obliczone dodatkowo?

- (i) brakujący przyczynik QED rzędu α^3 (tzw. druga pochodna logarytmu Bethego względem pola elektrycznego $\partial_E^2 \ln k_0$)
- (ii) przyczynki QED rzędu α^4
- (iii) relatywistyczne poprawki na skończoną masę M_{He} jądra helu. (poprawka nierelatywistyczna jest włączona do wartości „wynik nierelatywistyczny”)

Wyniki obliczeń polaryzowalności zostały uściślone w pracach [13] i [14], z tej ostatniej pochodzą dane zamieszczone w tabeli 1. Głównym źródłem wypadkowej niepewności jest niepewność składnika QED α^4 . Dokładność obliczeń jest więcej niż wystarczająca do interpretacji eksperymentu.

Głównym celem prac [13] i [14] było obliczenie polaryzowalności dynamicznej, czyli polaryzowalności zależnej od częstotliwości przyłożonego pola elektrycznego. Uzyskana wartość 1,39181197(14) a. u. [14] obliczona została dla częstotliwości odpowiadającej długości fali światła lasera helowo-neonowego 633 nm. Jest znacząco, bo ponad pół procenta większa od polaryzowalności statycznej. Do czego ten wynik może się przydać?

Tytuł pracy [7] wskazuje, że termometria stałej dielektrycznej gazu została zaproponowana przez Moldovera jako sposób na uzyskanie nowego standardu ciśnienia. Jak zostało opisane, pomiar tą metodą jest trudny. Alternatywą jest interferometryczny pomiar zmian współczynnika załamania światła gazu n , który związany jest z wartościami przenikalności względnych ośrodka relacją

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} . \quad (12)$$

Przenikalność ϵ_r obliczyć trzeba przy wykorzystaniu teoretycznej wartości polaryzowalności dynamicznej. Metoda może zastąpić najdokładniejszy do chwili obecnej wzorzec ciśnienia, jakim od ponad 300 lat pozostaje odpowiednio wysoka kolumna rtęci.

6. Finalna wartość stałej Boltzmanna

Uważny czytelnik zauważy, że najdokładniejsze rezultaty pomiaru k_B różnymi metodami [4], [6], [9] zostały opublikowane w 2017 r w tym samym numerze czasopisma *Metrologia*. Stało się tak dlatego, że nowe rezultaty należało nadsyłać do 1 lipca 2017. Na ich podstawie komitet CODATA ustalił finalną wartość stałej Boltzmanna i jej niepewność, $k_B = 1,38064903(51) \cdot 10^{-23}$ J/K [16]. Podstawą do obliczenia średniej ważonej było 9 wyników termometrii akustycznej, wykonanych z wykorzystaniem tak helu, jak i argonu oraz pojedyncze wyniki termometrii szumowej [6] i termometrii stałej dielektrycznej gazu [9].

Podana wyżej niepewność bezwzględna oznacza niepewność względną średniej ważonej $u_r(k_B) = 0,37$ ppm, co z zapasem spełnia warunek [17], by wartość ta była mniejsza od 1 ppm. Drugi warunek, by co najmniej jedna inna metoda potwierdziła

wynik termometrii akustycznej z dokładnością nie gorszą niż 3 ppm, został też zrealizowany z nadmiarem, bo dwoma metodami, zasadniczo różniącymi się między sobą.

Ostateczna wartość przyjęta do rewizji układu SI, to $k_B = 1,380\ 649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$.

7. Konsekwencje zmiany definicji kelwina

Są w dużym stopniu podobne do skutków redefinicji kilograma, ampera i mola. Ustalenie k_B ustala wartość licznych stałych pochodnych, np. stałej gazowej $R = N_A k_B$. W pomiarach temperatur o niskiej dokładności nic się nie zmienia.

Warto omówić znaczenie redefinicji kelwina dla zagadnienia dokładnych pomiarów temperatury. Pomiarów te, w szczególności cechowanie dokładnych termometrów wtórnych, wykorzystują zalecenia Międzynarodowej Skali Temperatur ITS-90. Jednym z elementów tej skali jest ciąg 14 temperatur wzorcowych związanych z wybranymi przemianami fazowymi, od punktu potrójnego wodoru (13,8 K) do temperatury topienia miedzi (1358 K), zawierający również temperaturę TTPW. W przeciwieństwie do innych temperatur wzorcowych przypisywano jej zerową niepewność związaną z odchyłką od idealnej temperatury termodynamicznej [18].

Teraz wszystkie punkty skali ITS-90 staną się równouprawnione. Po ustaleniu k_B jej niepewność względna 0,37 ppm staje się niepewnością względną wyznaczenia temperatury T_{TPW} . Jest tak dlatego, że wszystkie opisane eksperymenty wykonane zostały w dużych termostatach, w których realizowany był punkt potrójny wody. Niepewność bezwzględna $u(T_{\text{TPW}}) = 273,16 \text{ K} \times 0,37 \cdot 10^{-6} = 0,10 \text{ mK}$.

Nowa definicja kelwina ułatwi rozwój różnych termometrów pierwotnych, których wskazań nie trzeba będzie już odnosić do T_{TPW} . W temperaturach wysokich jest to w szczególności termometria radiacyjna, wykorzystująca wzór Plancka dla widma promieniowania ciała doskonale czarnego. Istnieje też kilka rodzajów termometrów pierwotnych, które mogą być użyte w niskich i bardzo niskich temperaturach.

Wieloletni program dokładnego pomiaru e , h , N_A i k_B stanowi jednocześnie, zapewne największy w historii fizyki, program doświadczalnego testowania jej matematycznego formalizmu. Dotyczył tak fizyki klasycznej, jak i kwantowej, i potwierdził naturę fizyki jako nauki ścisłej. Program pomiaru stałej Boltzmanna był jedynym, w którym doświadczalny test dotyczył wyników wyrafinowanych teorii mechaniki kwantowej i elektrodynamiki kwantowej.

8. Podziękowania i gratulacje

Składam podziękowanie dwu osobom, bez których artykuł pewnie by nie powstał. Znajomy metrolog Zygmunt Warsza, podczas konferencji w PTB w Berlinie w 2017 r., zabrał mnie na prywatną wizytę do laboratorium pomiarów termicznych. Tam jego szef, Joachim Fischer, pokazał nam aparaturę termometrii stałej dielektrycznej gazu (o której to metodzie nie miałem wtedy pojęcia) i poinformował, że „wykorzystujemy tu pewien wynik teoretyczny uzyskany w Warszawie”. Bogumiłowi Jeziorskiemu jestem wdzięczny za merytoryczne korekty manuskryptu, szczególnie dotyczące rozdziału 5.

Przegłosowanie zmian w układzie SI zbiegło się, zapewne nieprzypadkowo, z przyznaniem Nagrody Fundacji na rzecz Nauki Polskiej 2018 w obszarze nauk matematyczno-fizycznych i inżynierskich Krzysztofowi Pachuckiemu z Wydziału Fizyki UW za *precyzyjne kwantowo-elektrodynamiczne obliczenia spektroskopowych parametrów lekkich atomów i cząsteczek*. Komunikat fundacji dodaje też, że „osiągnięcia te są podstawą dokładnego wyznaczania fundamentalnych stałych fizycznych.” Bogumił Jeziorski, kierownik Pracowni Chemii Kwantowej na Wydziale Chemii UW i współautor prac [10] i [12] - [14], nagrodę FNP uzyskał poprzednio w r. 2000 za *stworzenie nowego formalizmu dokładnych kwantowych obliczeń oddziaływań międzyatomowych i międzymolekularnych*. Obydwaj „polscy nobliści” i ich współpracownicy kontynuują osiągnięcia polskiej szkoły chemii kwantowej, zapoczątkowanej przed półwieczem przez Włodzimierza Kołosa. Wszystkim składam gratulacje w imieniu czytelników *Fotonu*.

Referencje

- [1] A. Zieba. *Redefinicja jednostek układu SI - na przykładzie kelwina*. Część I. *Foton* 142, jesień 2018.
- [2] J. Fischer. *Progress towards a new definition of the kelvin*. *Metrologia* 52 (2015) S364–S375; J. Fischer i inni. *The Boltzmann project*. *Metrologia* 55 (2018) R1–R20.
- [3] M. R. Moldover i inni. *Measurement of the Universal Gas Constant R Using a Spherical Resonator*. *Phys. Rev. Lett.* 60 (1988) 249-252.
- [4] L. Pitre i inni. *New measurement of the Boltzmann constant k by acoustic thermometry of helium-4 gas*. *Metrologia* 54 (2017) 856-873.
- [5] <https://www.nist.gov/si-redefinition/kelvin-boltzmann-constant>
- [6] J. Qu i inni. *An improved electronic determination of the Boltzmann constant by Johnson noise thermometry*. *Metrologia* 54 (2017) 549-558.
- [7] M. R. Moldover. *Can a Pressure Standard be Based on Capacitance Measurements?* *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.* 103 (1998) 167-175.
- [8] B. Fellmuth i inni, *Determination of the Boltzmann constant by dielectric-constant gas thermometry*. *Metrologia* 48 (2011) 382-390.
- [9] Ch. Gaiser i inni. *Final determination of the Boltzmann constant by dielectric-constant gas thermometry*. *Metrologia* 54 (2017) 280-289.
- [10] W. Cencek, K. Szalewicz i B. Jeziorski. *Breit-Pauli and Direct Perturbation Theory Calculations of Relativistic Helium Polarizability*. *Phys. Rev. Lett.* 86, 5675 (2001).
- [11] K. Pachucki i J. Sapirstein, *Relativistic and QED corrections to the polarizability of helium*. *Phys. Rev. A* 63, 012504 (2001).
- [12] G. Łach, B. Jeziorski, K. Szalewicz, *Radiative Corrections to the Polarizability of Helium*. *Phys. Rev. Lett.* 92, 233001 (2004).
- [13] K. Piszczatowski i inni. *Frequency-Dependent Polarizability of Helium Including Relativistic Effects with Nuclear Recoil Terms*. *Phys. Rev. Lett.* 114, 173004 (2015).
- [14] M. Puchalski i inni. *Theoretical determination of the polarizability dispersion and the refractive index of helium*. *Phys. Rev. A* 93, 032515 (2016).
- [15] C. Gaiser, B. Fellmuth. *Polarizability of Helium, Neon, and Argon: New Perspectives for Gas Metrology*. *Phys. Rev. Lett.* 120, 123203 (2018).
- [16] D. B. Newell i inni. *The CODATA 2017 values of h, e, k, and NA for the revision of the SI*. *Metrologia* 55 (2018) L13–L16.
- [17] Consultative Committee for Thermometry (CCT) 2014 Report of the 27th Meeting. *Recommendation CCT T1* (www.bipm.org/utls/common/pdf/CC/CCT/CCT27.pdf).
- [18] *Temperature fixed points (of the International Temperature Scale of 1990: ITS-90)*. Dokument z portalu National Physical Laboratory, UK.