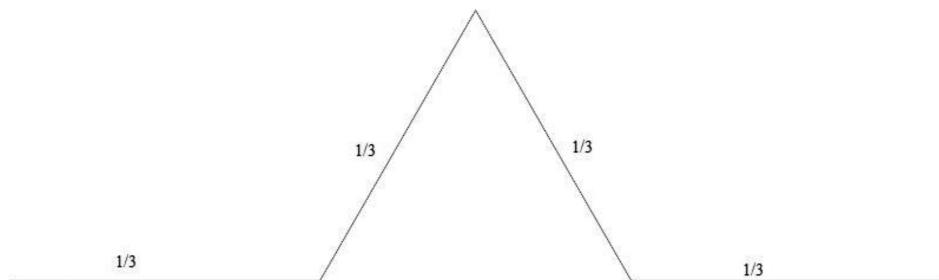


Podróż na Księżyc i Słońce na krzywej Kocha

Marek Berezowski

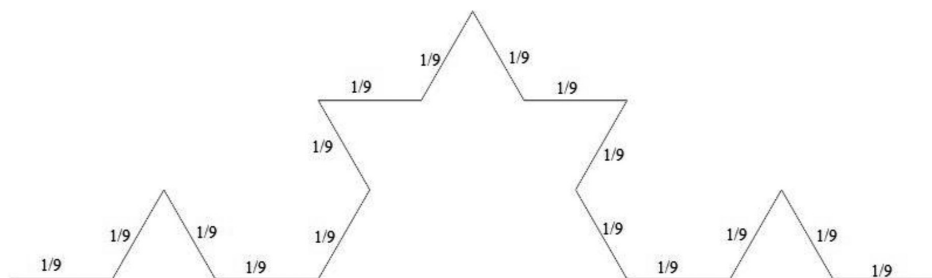
Spróbujmy odbyć podróż na Księżyc i Słońce. Podróż tę odbędziemy jednak w nietypowy sposób, bo na płątku śniegu. W tym celu musimy zbudować taki płatek. Weźmy odcinek o umownej długości równej $L_0 = 1$. Następnie podzielmy go na 3 równe części i część środkową usuńmy. W to miejsce wstawmy trójkąt równoboczny o boku równym $1/3$, jak na rys. 1. Niech takie postępowanie będzie pierwszym krokiem pewnej iteracji. Każdy następny krok jest identyczny i dotyczy wszystkich aktualnych odcinków.

A zatem, w pierwszym kroku będziemy mieli $s_1 = 4^1$ odcinków, o długości $1/3$ każdy,



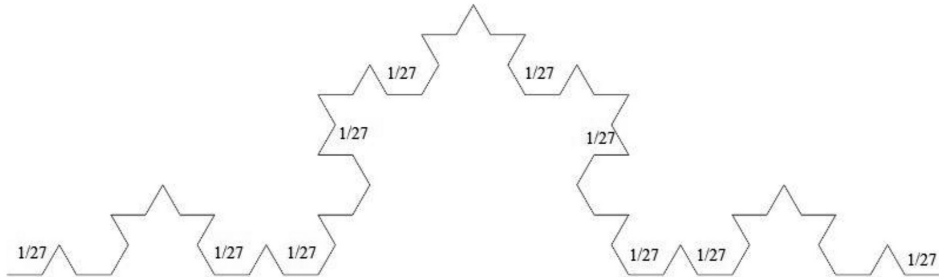
Rys. 1. Pierwszy krok iteracyjny: $n = 1$

w drugim $s_2 = 4^2$ odcinków, o długości $1/9$ każdy,



Rys. 2. Drugi krok iteracyjny: $n = 2$

w trzecim $s_3 = 4^3$ odcinków, o długości $1/27$ każdy, itd.

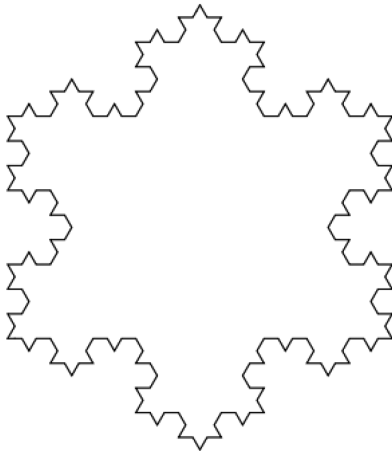
Rys. 3. Trzeci krok iteracyjny: $n = 3$

W n -tym kroku będziemy mieli

$$s_n = 4^n \quad (1)$$

odcinków, o długości $1/3^n$ każdy. Powstała w ten sposób linia nazywa się krzywą Kocha i jest fraktalem [1].

Gdybyśmy zbudowali krzywą Kocha, opierając się nie na jednym tylko odcinku, ale na trójkącie o trzech bokach, to otrzymalibyśmy figurę przypominającą płatek śniegu (rys. 4).



Rys. 4. Płatek śniegu

I na takim właśnie płatkach spróbujemy dotrzeć na Księżyc i Słońce. Z tym, że podróż tę odbędziemy nie na całym płatkach, a tylko na jego fragmencie, czyli na wspomnianej krzywej Kocha.

Wróćmy zatem do tej krzywej. Załóżmy, że na początku mamy odcinek o długości jednego metra, czyli $L_0 = 1$ [m]. Zgodnie z wyżej pokazaną procedurą tworzenia krzywej Kocha, dzielimy go na 3 równe części, usuwamy część środkową i w to miejsce wstawiamy trójkąt równoboczny o bokach równych $1/3$ [m].

Wobec tego w pierwszym kroku otrzymamy krzywą o długości $L_1 = (4/3)^1$ [m], złożoną z $s_1 = 4^1$ odcinków. W drugim kroku otrzymamy krzywą o długości $L_2 = (4/3)^2$ [m], złożoną z $s_2 = 4^2$ odcinków. W kroku trzecim otrzymamy krzywą o długości $L_3 = (4/3)^3$ [m], złożoną z $s_3 = 4^3$ odcinków, itd. Ogólnie, w n -tym kroku otrzymamy krzywą o długości

$$L_n = (4/3)^n \text{ [m]}, \quad (2)$$

złożoną z $s_n = 4^n$ odcinków. Łatwo zauważyć, że gdy liczba kroków dąży do nieskończoności, krzywa Kocha staje się również nieskończenie długa ($L_n = \infty$). I to właśnie spróbujemy wykorzystać do naszych podróży. Stworzymy bowiem krzywe, których długości będą równe odległościom Ziemi od Księżyca i Ziemi od Słońca.

Policzmy zatem, ile należy zrobić iteracyjnych kroków, aby długość krzywej Kocha równa była odległości Ziemi od Księżyca lub odległości Ziemi od Słońca. Załóżmy, że odcinek początkowy ma długość 1[m]. Ze wzoru (2) łatwo wyliczyć, że liczba kroków, to:

$$n = \frac{\log(L_n)}{\log\left(\frac{4}{3}\right)} \quad (3)$$

Polećmy najpierw na Księżyc. Średnia odległość Ziemi od Księżyca, to ok. 400 000 km, czyli ok. $4 \cdot 10^8$ m. Korzystając ze wzoru (3), wyliczamy, że aby dotrzeć na Księżyc, trzeba zrobić ok. $n = 69$ kroków iteracyjnych. To wydaje się niedużo. Wystarczy zatem zrobić zaledwie 69 prostych iteracji i już będziemy na Księżycu. Sprawdźmy jednak, czy jest to fizycznie wykonalne. Przy takiej liczbie iteracji krzywa Kocha będzie miała $s_{69} = 4^{69} = 3 \cdot 10^{41}$ odcinków. To dużo. Każdy z tych odcinków będzie miał długość ok. 10^{-33} [m]. Średnica atomu wodoru to ok. 10^{-10} [m]. Zatem długość pojedynczego odcinka w takiej krzywej Kocha byłaby aż o 23 rzędy mniejsza od średnicy atomu wodoru. Najmniejsza długość w przyrodzie, tzw. długość Plancka, to ok. $1,616 \cdot 10^{-35}$ [m]. Oznacza to, że długość pojedynczego odcinka naszej Krzywej Kocha byłaby zaledwie o 2 rzędy większa od długości Plancka. To powoduje, że podróż na Księżyc jest w taki sposób praktycznie niewykonalna.

Mimo, że już wiemy, że podróż na Księżyc na płatku śniegu jest nierealna, to sprawdźmy, jak podobne wyliczenia wyglądają, gdybyśmy chcieli wybrać się na Słońce. Otóż, podobnie jak poprzednio, załóżmy, że początkowy odcinek ma długość 1[m]. Średnia odległość Ziemi od Słońca to ok. 150 000 000 km. Mimo tak dużej różnicy między odległością Ziemi od Księżyca a odległością Ziemi od Słońca, różnica liczby kroków iteracyjnych potrzebnych do wygenerowania tych odległości nie jest już tak znacząca. Okazuje się bowiem, że aby stworzyć krzywą Kocha o długości równej odległości Ziemi od Słońca, wystarczy wykonać zaledwie $n = 89$ iteracji. W przypadku Księżyca było to ok. $n = 69$ kroków, a więc zaledwie o 20 kroków mniej. Jednakże liczba odcinków w przypadku podróży na Słońce jest znacząco większa i wynosi aż $s_{89} = 4^{89} = 7 \cdot 10^{53}$ odcinków. To oznacza, że każdy z tych odcinków ma długość ok. $2 \cdot 10^{-43}$ [m]. Długość odcinka w takiej krzywej Kocha musiałaby być mniejsza od długości Plancka i to aż o 8 rzędów, co jest oczywiście fizycznie niemożliwe do wykonania.

Literatura cytowana

- [1] E. Lamb, A Few of My Favorite Spaces: The Koch Snowflake, Scientific American, Nov. 30, 2017.