

Zaskakująca symetria poziomów energetycznych prostych układów kwantowych

Piotr Zieliński

Instytut Fizyki Jądrowej im. H. Niewodniczańskiego Polskiej Akademii Nauk,
ul. Radzikowskiego 152, 31-342 Kraków

Streszczenie

Poziomy energetyczne atomu wodoru okazują się być subharmonikami (podharmonicznymi) poziomów jednowymiarowej prostokątnej studni kwantowej. Oba układy wiąże więc znane z praktyki muzycznej przekształcenie inwersji, będące też jednym ze sposobów objaśnienia dualności dur-moll. Ponieważ poziomy studni kwantowej tworzą wieloton harmoniczny, sygnał złożony z takich tonów prostych jest okresowy i wykazuje czytelną wysokość dźwięku, pozwalającą tworzyć melodie. Barwa dźwięku sygnału odpowiadającego studni kwantowej jest bardzo zbliżona do instrumentu zwanego dzwonekami chromatycznymi, co wskazuje na dodatkową symetrię pomiędzy układem kwantowym i klasycznym jako kolejny przykład niejednoznaczności w problemie rozpraszania odwrotnego.

Geneza zagadnienia

Panią Doktor Zofię Gołąb-Meyer, która zaszczytnie pozwoliła mi mówić do siebie Zosiu, poznałem na studiach. Była to początkowo znajomość jedynie z opowiadań studentów z innych grup ćwiczeniowych, dla których prowadziła zajęcia z mechaniki kwantowej. A były to opowiadania przerażające, gdyż Pani Doktor uznawała podobno tylko zadania doprowadzone do końcowego wyniku liczbowego. Wtedy nie było jeszcze kalkulatorów, więc najczęściej takich wyników nie miałem. Później było łatwiej, gdy spotkałem Zosię przy okazji „wyjazdu naukowo-turystycznego” do Holandii (1978). Zwiedziliśmy wtedy Laboratoria van der Waalsa i wiele innych egzotycznych miejsc, jak np. restaurację chińską, gdzie serwowano stuletnie jaja. No i było wiele okazji do rozmów, najwięcej w drodze powrotnej, bo siedzieliśmy w jednym przedziale, a Zosia zaraz przed wyjazdem obejrzała premierę „Raju Utraconego” K. Pendereckiego. Znając moje zainteresowania muzyczne, po latach zaproponowała mi napisanie artykułu o związkach muzyki z mechaniką kwantową do swojego *Fotonu* [1]. Końcowy wynik liczbowy powstał dzięki komputerowej syntezie dźwięku, a polegał na przedstawieniu brzmienia, czyli barwy dźwięku wielotonów, w których sinusoidalne tony proste pozostawały w stosunkach częstotliwości odpowiadających poziomom energetycznym znanych układów kwantowych. Znalazły się nawet stany koherentne oscylatora harmonicznego [2]. Stany te przechodzą przy zmniejszaniu amplitudy w sekularne stany własne oscylatora, co jest przedmiotem ciągle żywo dyskutowanego problemu dekoherencji na styku pomiędzy mechaniką klasyczną i kwantową.

Wysokość i barwa dźwięku a mechanika kwantowa

Dźwięki złożone z tonów prostych o częstotliwościach będących naturalnymi wielokrotnościami pewnej częstości podstawowej f , tj. wielotony harmoniczne,

tworzą – z jednej strony – sygnały okresowe, zgodnie z twierdzeniem Fouriera, a z drugiej strony wywołują wrażenie wysokości dźwięku. W systemie MIDI wysokości dźwięku wyrażają się następującą zależnością od częstotliwości podstawowej f (wyrażonej w hercach)[3]

$$n_{MIDI} = 69 + 12 \log_2 \left(\frac{f}{440 \text{ Hz}} \right). \quad (1)$$

Powyższy logarytmiczny związek częstotliwości i wysokości dźwięku nie ma dotychczas pełnego wyjaśnienia w fizjologii.

Wzajemne stosunki amplitud tonów składowych wielotonów harmoniczych, a zatem mających częstotliwości nf , gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$, (muzycy mówią tu o szeregu harmonicznym alikwotów), odpowiadają za wielokryterialne, złożone, lecz wyraźnie postrzegane wrażenie barwy dźwięku, pozwalające rozróżnić między sobą instrumenty muzyczne i samogłoski. Wśród układów kwantowych drabinka poziomów energetycznych odpowiadająca wielotonom harmonicznym występuje m.in. dla oscylatora harmonicznego, o poziomach będących nieparzystymi wielokrotnościami częstotliwości podstawowe $E_n = hf(2n-1)$, symbol h oznacza tu stałą Plancka (podobnie jak w puszczalkach otwartych z jednego i zamkniętych z drugiego końca) oraz dla prostokątnej studni potencjału, w której poziomy są proporcjonalne do kwadratów liczb naturalnych $E_n = hf n^2$. Każda superpozycja stanów własnych takich układów będzie mieć wysokość i barwę dźwięku, byle tylko częstotliwości zostały przeskalowane do zakresu słyszalnego, tj. $16 \text{ Hz} \leq f \leq 20 \text{ kHz}$. Wysokości dźwięku nie wykazują superpozycje stanów własnych atomu wodoru, w którym poziomy energetyczne wyrażają się wzorem $E_n = -\frac{R_y}{n^2}$ (R_y jest stałą Rydberga). Odległości poziomów maleją przy zbliżaniu się do granicy jonizacji $n \rightarrow \infty$.

Symetria obiektu i symetria widma

Jednowymiarowy oscylator harmoniczny i prostokątna jednowymiarowa studnia potencjału wykazują niezmienniczość względem odbicia zwierciadlanego w płaszczyźnie prostopadłej do osi ruchu cząstki. Jeżeli zero tej osi wybierzemy na przecięciu z ową płaszczyzną, to funkcje falowe poszczególnych stanów okażą się albo parzyste, albo nieparzyste. Atom wodoru uproszczony do modelu punktowej naładowanej cząstki poruszającej się w pobliżu ciężkiego centrum-jądra o przeciwnym ładunku jest niezmienniczy względem wszystkich obrotów wokół tego jądra. Z tego powodu każdy stan ma funkcję falową będącą jedną z tzw. funkcji sferycznych. Te ostatnie dzielą się na podzbiory takie, że obroty przekształcają między sobą tylko funkcje należące do tego samego podzbioru, ale nigdy nie przeprowadzają funkcji z jednego podzbioru do innego. Wszystkie stany mające funkcje falowe z tego samego podzbioru mają też jednakową energię E_n . Złamanie niezmienniczości obrotowej przez wprowadzenie – realistyczne! – momentu pędu (spinu) ruchomej cząstki, prowadzi do znanego zjawiska niewielkiego rozszczepienia poziomów odpowiadających tej samej liczbie n .

W dalszym ciągu rozszczepienia tego nie będziemy uwzględniać. Wymienione powyżej niezmienniczości nazywane są w fizyce niemal synonimicznie symetriaми. Poznaliśmy więc symetrię zwierciadlaną i sferyczną.

Tymczasem w świecie dźwięków też występują symetrie. Np. wykonanie serii tych samych dźwięków w odwrotnej kolejności, zaczynając od końca sprawa, że otrzymamy zwierciadlanie symetryczny w czasie ciąg częstotliwości. Zabieg ten znany jest co najmniej od r. 1500 [4] i nazywany jest przekształceniem raka (który chodzi wstecz, ang. *retrograde motion*). Jeszcze częściej używana jest inwersja, tzn. zamiana w melodii każdego kroku ku wyższym wysokościami dźwięku takim samym krokiem w dół. Z powodu logarytmicznej zależności wysokości dźwięku od częstotliwości podstawowej (zob. równanie (1)) każdy krok-interwał odpowiada pewnemu stosunkowi częstotliwości. Na poniższym rysunku widzimy przykład inwersji z 1 inwersji dwugłosowej J.S. Bacha (BWV 772).



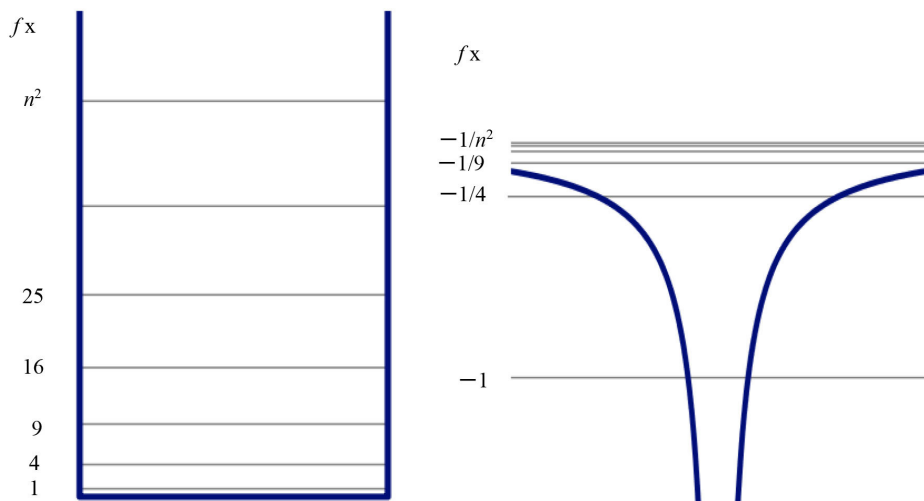
Rys 1. Przykład inwersji chromatycznej z 1 inwersji dwugłosowej J.S. Bacha¹. Przerzywana linia wskazuje płaszczyznę odbicia (nutę pivot)

Inwersja odpowiada więc w zapisie nutowym zwierciadlanemu odbiciu w płaszczyźnie poziomej (tu na wysokości D), a w dziedzinie częstotliwości na zamianie wyższych harmonicznymi podharmonicznymi, tzn. zamiast pomnożyć daną częstotliwość przez jakiś czynnik, dzielimy ją przez ten czynnik. Jean Philippe Rameau [5] zauważył, że wśród tonów harmonicznymi danej częstotliwości f zawsze występuje akord dur. Rzeczywiście, ton $3f$ jest o kwintę plus oktawę wyższy niż f , a $5f$ jest o tercję wielką plus dwie oktawy wyższy od f . Nie ma jednak w szeregu harmonicznymi składników akordu moll z podstawą f . Tymczasem akord moll jest obrazem akordu dur w inwersji chromatycznej. Kontrowersje na temat fizycznych, fizjologicznych i estetycznych podstaw akordu moll i jego dualności względem akordu dur doprowadziły do przykrych sporów J. Ph. Rameau z J. le R. d'Alembertem i trwają do dziś [6]. Trzeba pamiętać, że przekształcenie inwersji szeregu harmonicznego nie prowadzi do szeregu harmonicznego. Warto też zwrócić uwagę, że opisane tu operacje symetrii dotyczące widm, a więc działające w dziedzinie częstotliwości, są jakościowo różne od operacji symetrii znanych z podstawowej mechaniki kwantowej.

¹ Używa się też inwersji diatonicznej, w której rozmiar interwału odwróconego nie musi być równy interwałowi pierwotnemu, lecz wynika z dźwięków dostępnych w stosowanej skali. Inwersję chromatyczną tematu utworze Bacha mamy np. w t. 3, 15. Na Rys.1 temat w inwersji jest przetransponowany o kwartę dół, aby lepiej zilustrować płaszczyznę odbicia.

Symetria–dualność poziomów energetycznych atomu wodoru i prostokątnej studni potencjału

Poziomy energetyczne atomu wodoru są schematycznie przedstawione na Rys. 2 na tle wykresu energii potencjalnej wytwarzanej przez jądro. Energia ta jest funkcją odległości bezspinowego elektronu od jądra, ale trzeba pamiętać, że elektron ma swobodę ruchu w całej trójwymiarowej przestrzeni. Obok znajduje się analogiczny schemat poziomów energetycznych jednowymiarowej prostokątnej studni potencjału. Jak wiadomo z hipotezy de Broglie, poziom energetyczny E_n odpowiada częstotliwości $f_n = E_n/h$. Widać, że po przekształceniu $f \rightarrow -f$ (parzystość w dziedzinie energii–częstotliwości) poziomy energetyczne atomu wodoru stają się podharmonicznymi poziomów prostokątnej studni potencjału.



Rys. 2 Energia potencjalna (gruba linia) i poziomy energetyczne prostokątnej jednowymiarowej studni potencjału a) i atomu wodoru b). W kolumnach podano czynniki liczbowe, przez jakie należy pomnożyć energię (częstotliwość f) stanu podstawowego, aby otrzymać poziom numer n

Otrzymujemy symetrię (lub nawiązując do odpowiedniości dur-moll – dualność) poziomów energetycznych polegającą na zastąpieniu częstotliwości harmonicznymi częstotliwościami podharmonicznymi. Warto zauważyć, że nie jest to dokładnie inwersja stosowana w muzyce, gdyż tam zamiana harmonik i podharmonik dotyczy tylko częstotliwości podstawowych, podczas gdy tutaj zamianie podlegają wszystkie składowe widma energetyczne. Należy też podkreślić, że ta symetria-dualność zachodzi pomiędzy układami o różnej wymiarowości, choć podobną odpowiedniość można też osiągnąć dla sześciennego studni potencjału.

Znaczenie fizyczne

Nawet w dziedzinie syntezy dźwięku przedstawiona zamiana harmonik z podharmonikami nie jest łatwo zauważalna. Sygnał dźwiękowy odpowiadający studni potencjału ma określoną wysokość dźwięku i ostrą, metaliczną barwę, szczegól-

nie gdy amplituda wyższych harmonicznycy staje się duża, podczas gdy wieloton zbudowany z częstotliwości odpowiadających poziomom atomu wodoru jest rodzajem szumu, wywołanego bliskimi sobie częstotliwościami. Oczywiście wszystko zależy od amplitud poszczególnych składowych. W każdym razie trudno tu zauważyć jakąś odpowiedniość, mimo że wywodzi się ona ze znanej muzykom inwersji. Nie znam reguły pozwalającej zaprojektować układ – kwantowy lub drgający klasyczny – którego widmo drgań własnych byłoby wynikiem takiej transformacji z danego układu. Zapewne zadanie to można rozwiązać na wiele sposobów, gdyż wiemy, że to samo widmo drgań mogą mieć różne układy [7]. Synteza dźwięków o alikwotach analogicznych do prostokątnej studni, wybrzmiewających tym szybciej, im wyższy jest numer harmonicznycy, tzn. tak jak w instrumentach szarpanych lub uderzanych, prowadzi do efektu bardzo zbliżonego do dzwonek chromatycznych – instrumentu, w którym grający uderza w prostokątne płytki metalowe. Rzeczywiście wzór Chladniego [8] zawiera potęgę liczb naturalnych. W niektórych przypadkach potęgi te są podawane jako bliskie 2.

Pytania, przypuszczenia, wnioski

Czy da się zbudować instrument mający szereg alikwotów zadany dokładnie wzorem $f_n = fn^2$? Wykładnik 2 w mechanice kwantowej pochodzi ze specyficznej relacji dyspersji cząstki kwantowej. W przypadku drgającej płyty musi być związany z kształtem i być może niejednorodnościami własności sprężystych drgającego obiektu. W każdym razie drganiami tymi nie mogą być fale płaskie w jednorodnym ośrodku bezdyspersyjnym. Zapewne jakaś rola przypada tu grubości płyty. Prowadzi bowiem do nieharmoniczności, podobnie jak to się dzieje w strunach fortepianowych z powodu ich skończonego przekroju [9].

Świat symetrii kryje w sobie jeszcze z pewnością wiele tajemnic. Nie wiadomo, czy i jakie są konsekwencje, a może i praktyczne zastosowania przekształcenia polegającego na zamianie składowych harmonicznycy z podharmonicznymi. Drgania podharmoniczne rozpatrywali już J.Ph. Rameau, G.Tartini, J. R. d’Alembert, J.A. Serre, J.W. Goethe, H. Riemann i in. [6] Dziś częstotliwości podharmoniczne znane są z zachowania układów nieliniowych, wykazujących podwojenia okresu przy zbliżaniu się do chaosu [10]. Czy ma to związek z odpowiednością między atomem wodoru i dzwonekami chromatycznymi? Tego na razie nie wiem. Na pewno jednak nauczanie i upowszechnianie fizyki powinno się odbywać z uwzględnieniem i poszanowaniem osiągnięć innych dziedzin wiedzy, techniki i sztuki, w której to misji Zosia wielce się zasłużyła i wskazała swoim uczniom szeroki wachlarz sposobów realizacji.

Podziękowania

Autor składa serdeczne podziękowania Pani Doktor Zofii Gołąb-Meyer za wiele fascynujących inspiracji i pełną życzliwość pasję upowszechniania wiedzy fizycznej w różnych środowiskach.

Literatura

- [1] Zieliński, Piotr (2011) , *Muzyka kwantów (I)*, FOTON, 115: 17-30; (2012) *Muzyka kwantów (II)*, FOTON, 116: 4-15.
- [2] Schiff, Leonard I. (1977), *Mechanika kwantowa*, PWN Warszawa: 75-78; Glauber, Roy J. (1963), *Coherent and Incoherent States of the Radiation Field*, .Physical Review. American Physical Society (APS). 131 (6): 2766-2788.
- [3] zob. np. <https://newt.phys.unsw.edu.au/jw/notes.html>
- [4] Vicentina, Nicola (1555), *L'antica musica ridotta alla moderna prattica*, Rzym.
- [5] Rameau, Jean Philippe (1750), *Démonstration du principe de l'harmonie servant de base à tout l'art musical théorique et pratique*, Paryż.
- [6] Snyder, John L. (1980), *Harmonic Dualism and the Origin of the Minor Triad*, Indiana Theory Review 4, no. 1 (1980): 45-78, <http://www.jstor.org/stable/24044496>; Pau Andrew (2018), *The Harmonic Theories of Jean-Adam Serre*, *Intégral* 32:1–13.
- [7] Kac, Mark (1966), *Can One Hear the Shape of a Drum?*, *American Mathematical Monthly*. 73 (4, part 2): 1–23; Gordon, C., Webb, D., Wolpert, S. (1992), *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds*, *Inventiones Mathematicae*, 110 (1): 1–22.
- [8] Stewart, J.K., Colwell, R.C. (1939), *The Calculation of Chladni Patterns*, *The Journal of the Acoustical Society of America* 11: 147; Rossing, Thomas D., Fletcher, Neville H. (2004), *Principles of Vibration and Sound*, Springer, 73–74.
- [9] Giordano, Nicolas (2015), *Explaining the Railsback stretch in terms of the inharmonicity of piano tones and sensory dissonance*, *The Journal of the Acoustical Society of America* 138: 2359-2366 ; <https://doi.org/10.1121/1.4931439>
- [10] Hilborn, Robert C. (2006), *Chaos and Nonlinear Dynamics. An introduction for Scientists and Engineers*, Oxford University Press.