



Prędkość kulki staczającej się z równi pochyłej

Zadanie z XXI Olimpiady fizycznej 1971/1972¹

Opracował Tadeusz M. Molenda

Zawody Stopnia I, zadanie teoretyczne

Na wierzchołku równi o wysokości h znajduje się kulka. Początkowe prędkości kulki (liniowa i kątowna) są równe zero. Współczynnik tarcia posuwistego (stycznego i kinetycznego) kulki o równię wynosi $f = 2/7$. Współczynnik tarcia tocznego kulki o równię równy jest zero. W pewnej chwili puszcza kulkę. Jak końcowa prędkość liniowa kulki v (tj. prędkość środka kulki w chwili, gdy mija ona najniższy punkt równi) zależy od kąta nachylenia równi α ? Zrób szkic wykresu funkcji $v(\alpha)$.

Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenia:

\vec{T} – siła tarcia (stycznego lub poślizgowego) między kulką a równią,

\vec{N} – siła nacisku kulki na równię

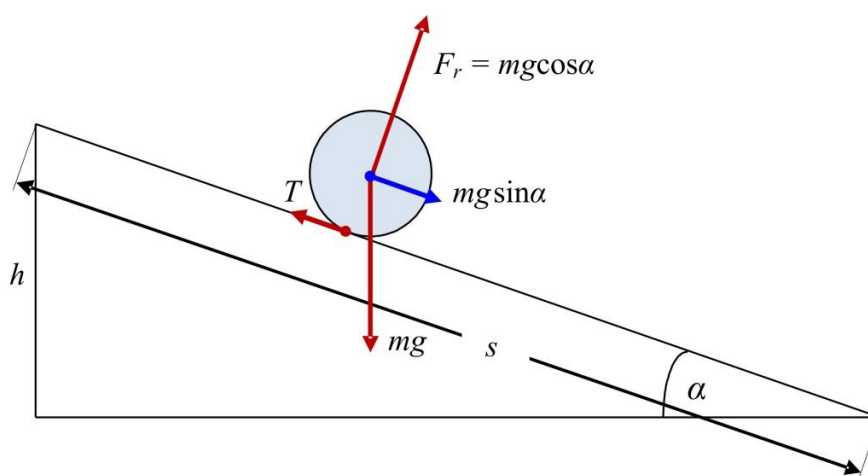
¹ Zadanie zostało udostępnione z bazy zadań Olimpiady Fizycznej w Szczecinie (www.of.szc.pl/) i dla *Fotonu* przygotowane przez przewodniczącego Komitetu Okręgowego OF w Szczecinie dra Tadeusza Molendę. W bazie znajduje się też zamieszczony w zbiorze Andrzeja Szymachy dodatek „dowcipny sposób znalezienia wzoru na moment bezwładności kuli nie odwołując się do całkowania”.

Zadanie wraz z rozwiązaniem zostało opublikowane w zbiorze „*Olimpiady Fizyczne XXI i XXII*”, WSiP, Warszawa 1975, str. 41 – 49, przez Andrzeja Szymachę ówczesnego członka Zarządu KGOF; *Zbiór zadań z olimpiady fizycznej*. WSiP, Warszawa 1987, zad. 6.2, przez Waldemara Gorzkowskiego ówczesnego członka Zarządu KGOF, późniejszego sekretarza naukowego w Komitecie Głównym Olimpiady Fizycznej.

Porównaj zadania o podobnej tematyce z olimpiad: XX OF; st. II – zad. teoretyczne T1: *Ruch kulki na równi bez poślizgu*; XXII OF, st. II – zad. doświadczalne: *Wyznaczanie współczynnika tarcia kulki stalowej o szkło*; VI Międzynarodowa Olimpiada Fizyczna – zad. T1: *Ruch walców staczających się z równi*; XXIV OF, st. II – zad. dośw. D2 – dodatkowo: *Wyznaczanie współczynnika tarcia posuwistego rurki o równię*; XXVII OF, st. I – zad. T1: *Ruch kulki z równi pochyłej z uwzględnieniem tarcia potoczystego i posuwistego*; XXVII OF, st. III – zad. T2: *Opis ruchu kulki po poziomym stole z uwzględnieniem tarcia posuwistego i potoczystego*; XXX OF, st. I – zad. T4: *Analiza ruchu z równi pochyłej kulki z tarciem tocznym*; XXXI OF; st. wstępny – zad. dośw. D1: *Wyznaczanie współczynnika statycznego tarcia potoczystego stali o szkło*; LXV OF, st. II – zad. dośw.: *Wyznaczanie współczynnika tarcia tocznego kulki stalowej o gumę oraz momentu bezwładności kulki*.

Zadania z olimpiad fizycznych są na ogół oryginalne. Pomysły pochodzą z różnych źródeł, również od nauczycieli i samych zawodników olimpiady. Propozycje zadań były zmieniane w wyniku dyskusji w Komitecie Głównym OF i często nie przypominają tekstu „pomysłodawcy” (przyj. – Tadeusz Molenda, Instytut Fizyki, Uniwersytet Szczeciński).

- \vec{F}_r – siła reakcji podłoża na nacisk kulki
 \vec{v} – prędkość liniowa środka kulki,
 \vec{a} – przyspieszenie środka kulki,
 ω – prędkość kątowna kulki,
 ε – przyspieszenie kątowe ruchu obrotowego kulki,
 I – moment bezwładności kulki względem osi przechodzącej przez jej środek,
 m – masa kulki,
 R – promień kulki.



Rys. 1. Zaznaczono siły działające na kulkę znajdującą się na równi pochyłej. Dwie siły przyłożone w środku kulki: ciężar kulki o wartości mg i siłę sprężystości równi prostopadłą do niej, skierowaną ku górze o wartości $mg \cos \alpha$ (tj. siłę reakcji na siłę nacisku N kulki na podłoże o wartości $N = mg \cos \alpha$, nie zaznaczonej na rys.). Wypadkowa tych dwóch sił jest siłą zsuwającą równoległą do równi skierowaną w dół równi o wartości $mg \sin \alpha$. Trzecią siłą działającą na kulkę jest siła tarcia posuwistego \vec{T} przyłożona w punkcie styczności kulki z podłożem równi i skierowana wzdłuż równi ku górze

Przystępując do rozwiązania tego zadania należy uświadomić sobie, że mogą tu, w zależności od wartości kąta α , wystąpić dwa zasadniczo różne przypadki: ruchu z poślizgiem i ruchu bez poślizgu. Postarajmy się zrozumieć najpierw poglądowo, dlaczego tak musi być. Zacznijmy od równi nachylonej pod bardzo małym kątem. Gdyby nie było tarcia, to składowa siły ciężkości, równoległa do równi nadałaby kulce przyspieszenie $g \sin \alpha$. Kulka poruszałaby się ruchem postępowym, nie obracając się. Innymi słowy natychmiast po zwolnieniu kulki pojawiłaby się wolno rosnąca prędkość poślizgu. Jeśli jednak tarcie występuje, to sytuacja taka jest niemożliwa, gdyż natychmiast po rozpoczęciu ruchu pojawiłaby się duża siła tarcia $mg \cos \alpha$, większa od siły

$mg \sin \alpha$ (przy dostatecznie małym kącie α) i przeciwnie do niej skierowana. Wypadkowa siły tarcia i siły $mg \sin \alpha$ byłaby skierowana przeciwnie do przyspieszenia, co jest jawnie sprzeczne z II zasadą dynamiki Newtona. Dla dostatecznie małych kątów α , w ruchu bez prędkości początkowej, nie może więc występować poślizg, lecz jedynie toczenie, w czasie którego chwilowa prędkość punktu styczności kuli względem równi wynosi zero. Jeśli nie ma poślizgu, to tarcie jest tarciem statycznym, a jak wiemy siła tarcia statycznego nie jest określona jednoznacznie przez siłę nacisku i współczynnik tarcia – ich iloczyn wyznacza tylko maksymalną możliwą siłę tarcia. Czy można wyznaczyć ruch, skoro działa na ciało siła o nieustalonej wartości? Można, jeśli posiadamy dodatkowe wiadomości o ruchu. W naszym, przypadku będzie to warunek kinematyczny mówiący, że gdy $T < fN$, wtedy prędkość liniowa równa $v - \omega R = 0$. Warunek toczenia bez poślizgu nie tylko pozwoli wyznaczyć ruch, ale i siłę tarcia potrzebną do tego, by ruch rzeczywiście spełniał ten warunek.

Wyobraźmy sobie teraz, że powtarzamy spuszczenie kulki po równi, zwiększając stale kąt nachylenia. Przekonamy się, że ze wzrostem kąta nachylenia rosła też będzie wartość siły tarcia statycznego T niezbędna do zapewnienia staczania bez poślizgu. Dla pewnego kąta osiągniemy taką wartość siły T , która równa jest fN . Przy dalszym zwiększaniu kąta α siła tarcia statycznego T nie może już rosnąć, gdyż osiągnęła swą wartość maksymalną. Musi wystąpić poślizg i nie będziemy mogli korzystać z równania $v = \omega R$, a jedynie z nierówności $v - \omega R > 0$ wyznaczającej kierunek siły tarcia „pod górę”, a więc hamującej ruch. Znowu powstaje problem, bo gubimy jedno równanie. Ale natychmiast zyskujemy drugie! Skoro kula toczy się z poślizgiem, to siła tarcia kinetycznego jest wyznaczona przez nacisk: $T = fN$, a więc znowu będziemy mieli liczbę równań wystarczającą do wyznaczenia ruchu. Po tej wyczerpującej analizie możemy przystąpić do obliczeń.

1. Toczenie bez poślizgu

Prawo dynamiki dla ruchu postępowego:

$$ma = mg \sin \alpha - T. \quad (1)$$

Prawo dynamiki dla ruchu obrotowego:

$$I\varepsilon = TR. \quad (2)$$

Brak poślizgu:

$$v = \omega R \Rightarrow a = \varepsilon R. \quad (3)$$

Nierówność tarcia statycznego:

$$T \leq fmg \cos \alpha. \quad (4)$$

Z równań (1), (2) i (3) możemy obliczyć trzy wielkości: a , T i ε . W tym celu z równań (2) i (3) znajdujemy najpierw związek

$$\frac{Ia}{R^2} = T, \quad (5)$$

który wstawiamy do (1) i otrzymujemy

$$ma = mg \sin \alpha - \frac{Ia}{R^2}. \quad (6)$$

Stąd

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{I}{R^2}} = \frac{1}{1 + \frac{I}{mR^2}} g \sin \alpha, \quad (7)$$

a po wstawieniu rozwiązania (7) do (5) mamy

$$T = \frac{1}{1 + \frac{mR^2}{I}} mg \sin \alpha. \quad (8)$$

Przekonujemy się, że istotnie T rośnie wraz z kątem α . Tarcie maksymalne zostaje osiągnięte dla kąta α_0 spełniającego równanie

$$T_{max} = \frac{1}{1 + \frac{mR^2}{I}} mg \sin \alpha_0 = fmg \cos \alpha_0, \quad (9)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = f \left(1 + \frac{mR^2}{I} \right).$$

Rozwiązanie dane wzorem (7) obowiązuje więc dla kątów α spełniających warunek

$$\alpha \leq \operatorname{arctg} \left[f \left(1 + \frac{mR^2}{I} \right) \right]. \quad (10)$$

Dla tych wartości kątów możemy bez kłopotu obliczyć w elementarny sposób końcową prędkość kulki. Ponieważ długość równi wynosi $h/\sin \alpha$, a przyspieszenie dane jest wzorem (7), to ze związku

$$\frac{v^2}{2} = sa,$$

słusznego ogólnie w ruchu jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej, dostajemy:

$$v^2 = 2 \frac{h}{\sin \alpha} \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I}{mR^2}} = \frac{2gh}{1 + \frac{I}{mR^2}} \quad \text{dla } \alpha \leq \alpha_0. \quad (11)$$

Zauważmy, że w przypadku toczenia bez poślizgu prędkość punktu, do którego przyłożona jest siła tarcia, wynosi zero – siła tarcia nie wykonuje zatem pracy i do wyznaczenia prędkości końcowej moglibyśmy skorzystać z zasady zachowania energii mechanicznej. Uwzględnienie energii ruchu obrotowego prowadzi właśnie do charakterystycznego czynnika $1 + \frac{I}{mR^2}$ we wzorze (11), który poza tym jest podobny do wzoru dla spadku swobodnego $v^2 = 2gh$.

Warto tutaj dodatkowo podkreślić, że do staczania się bez poślizgu konieczne jest występowanie siły tarcia. Spotykany czasami zwrot „kulka stacza się bez tarcia i bez poślizgu”, jest oczywistym błędem świadczącym o niezrozumieniu procesu staczania się. Podczas staczania się bez poślizgu siła tarcia statycznego nie wykonuje pracy.

2. Toczenie z poślizgiem

Równania (1) i (2) nie ulegają oczywiście zmianie. Zamiast równania (3) i nierówności (4) mamy w tym przypadku

$$v - \omega R > 0, \quad (12)$$

$$T = fmg \cos \alpha. \quad (13)$$

Podstawiając teraz znaną siłę T ze wzoru (13) do równań (1) i (2) dostajemy natychmiast:

$$a = g \sin \alpha - fg \cos \alpha, \quad (14)$$

$$\varepsilon = \frac{fmgR \cos \alpha}{I}, \quad (15)$$

a więc zarówno ruch postępowy, jak i obrotowy są, podobnie jak w przypadku toczenia bez poślizgu, jednostajnie przyspieszone. Możemy obliczyć prędkości – liniową i kątową – dla dowolnego czasu t :

$$v = t(g \sin \alpha - fg \cos \alpha),$$

$$\omega = t \frac{fmgR \cos \alpha}{I}.$$

Wstawiając znalezione rozwiązania do nierówności (12) dostajemy po skróceniu przez t i g

$$\sin \alpha - f \cos \alpha > \frac{f m R \cos \alpha}{I} R$$

lub po uproszczeniu

$$\operatorname{tg} \alpha > f \left(1 + \frac{mR^2}{I} \right). \quad (16)$$

Oczekiwaliśmy na podstawie dyskusji jakościowej, że warunek na toczenie z poślizgiem będzie przeciwny do warunku na toczenie bez poślizgu, ale nie zaszkoziło się o tym przekonać. Obliczenie prędkości końcowej nie nastręczy także teraz żadnych kłopotów skoro znamy przyspieszenie i przebytą odległość.

$$v^2 = \frac{2gh}{\sin \alpha} (\sin \alpha - f \cos \alpha) = 2gh(1 - f \operatorname{ctg} \alpha) \quad \text{dla } \alpha > \alpha_0. \quad (17)$$

Aby zrobić szkic wykresu, musimy podstawić wartość momentu bezwładności. W zadaniu tego typu uczeń może skorzystać ze znanego wzoru na moment bezwładności kuli bez wyprowadzenia. Podstawiając $I = \frac{2}{5}MR^2$ oraz wartość $f = \frac{2}{7}$ do wzorów (9), (11) i (17) dostajemy:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{2}{7} \left(1 + \frac{1}{\frac{2}{5}} \right) = 1 \Rightarrow \alpha_0 = 45^\circ,$$

$$v^2 = \frac{10}{7}gh \quad \text{dla } \alpha \leq 45^\circ, \quad (18)$$

$$v^2 = 2gh \left(1 - \frac{2}{7} \operatorname{ctg} \alpha \right) \quad \text{dla } \alpha > 45^\circ. \quad (18')$$

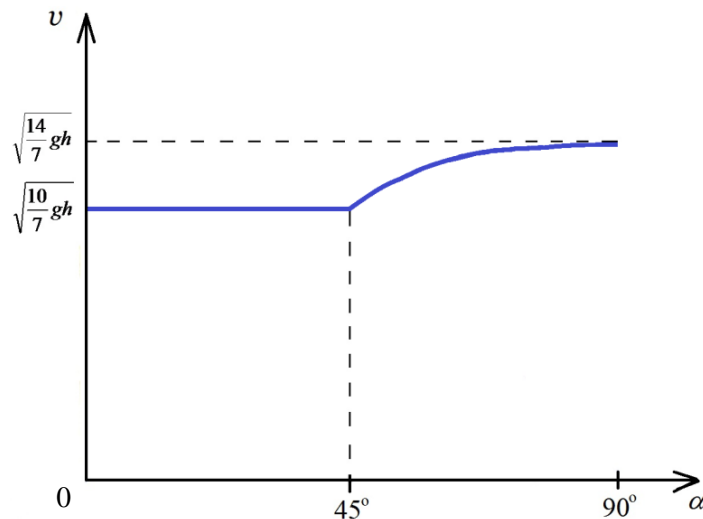
Nietrudno przekonać się, że wzory (18) i (18') przedstawiają funkcję ciągłą. Istotnie, przechodząc w drugim wzorze do granicy $\alpha \rightarrow 45^\circ$ dostajemy:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 45^\circ} 2gh \left(1 - \frac{2}{7} \operatorname{ctg} \alpha \right) = \frac{10}{7}gh,$$

a więc tyle samo, ile daje wzór (18) obowiązujący dla $\alpha \leq 45^\circ$. Mimo ciągłości na wykresie będzie charakterystyczne załamanie, gdyż część wykresu jest oczywiście odcinkiem równoległym do osi α , a część funkcją rosnącą od wartości $\sqrt{\frac{10}{7}}gh$ dla $\alpha = 45^\circ$, do wartości $\sqrt{2gh}$ dla $\alpha = 90^\circ$. Szkic wykresu przedstawia rys. 2.

Mogłoby się na pierwszy rzut oka wydawać, że wynik jest sprzeczny z zasadą zachowania energii. Przecież dla wszystkich kątów α wysokość h , a więc i zmiana energii potencjalnej, jest ta sama. Dla $\alpha < 45^\circ$ żadna część tej energii

nie rozprasza się na ciepło (siła tarcia nie wykonuje pracy, gdy nie ma poślizgu), a mimo to końcowa prędkość jest mniejsza dla małych kątów niż dla kątów, przy których na pewno część energii mgh zamienia się na ciepło! Pamiętać musimy jednak jeszcze o energii ruchu obrotowego. Dla kątów $\alpha < 45^\circ$ jest ona stałym ułamkiem energii ruchu postępowego, a dla kątów większych zaczyna szybko maleć. Jej ubytek jest większy, niż wzrost energii kinetycznej ruchu postępowego, a więc wydzielające się ciepło jest dodatnie, o czym można przekonać się stosując wprowadzone wzory. Nie będziemy już tego robić, sprawdzimy jedynie spoglądając na wzór (18), że dla $\alpha = 90^\circ$, kiedy zniknie nacisk (kula spada po prostu obok pionowej deski), czyli kiedy znika i tarcie i ruch obrotowy, wtedy końcowa energia kinetyczna ruchu postępowego równa się po prostu mgh .



Rys. 2. Wykres zależności prędkości końcowej v kulki puszczonej z równi pochyłej z wysokości h w zależności od kąta nachylenia α równi do poziomu. Współczynnik tarcia posuwistego (stycznego i kinetycznego) kulki o równię wynosi $f = 2/7$. Współczynnik tarcia tocznego kulki o równię równy jest zero