



Emisja wymuszona – modele klasyczne

Jerzy Ginter

Wydział Fizyki UW

1. Wprowadzenie

Jak wiadomo, zjawisko emisji wymuszonej stanowi podstawę działania laserów. Mówi się o nim na przykład tak (cytat z Wikipedii):

W optyce **emisja wymuszona** (*stymulowana, indukowana*) – proces emisji fotonów przez materię w wyniku oddziaływania z fotonem inicjującym. Warunkiem do tego, aby emisja wymuszona nastąpiła, jest równość energii fotonu z energią wzbudzenia atomu. Foton inicjujący emisję nie jest pochłaniany przez materię – pełni tylko rolę wyzwalającą proces. Foton emitowany przez atom ma częstotliwość (a więc również energię), fazę i polaryzację taką samą jak foton wywołujący emisję. Kierunek ruchu obu fotonów również jest ten sam. Światło złożone z takich identycznych fotonów nazywa się światłem spójnym. Zjawisko to jest podstawą działania laserów.

W sformułowaniu tym co najmniej dwie rzeczy są niezbyt precyzyjne:

1. Mogłoby się wydawać, że zjawisko emisji wymuszonej jest z natury swojej procesem kwantowym.
2. Mylone są dwa języki: falowy i korpuskularny, na przykład w zwrocie „foton ... ma fazę i polaryzację”.

Niniejszy artykuł poświęcony jest omówieniu kilku modeli klasycznych, które przynajmniej w pewnym stopniu mogą ułatwić zrozumienie zjawiska emisji wymuszonej.

1. Rozpocniemy od rozważania klasycznego oscylatora harmonicznego, pobudzanego siłą o częstości równej częstości własnej. Wykażemy, że w zależności od warunków początkowych dla położenia i prędkości oscylatora, istnieją dwie możliwości:
 - a. Pod wpływem siły zewnętrznej amplituda drgań rośnie z czasem. Energia jest przekazywana od źródła siły do oscylatora. Mamy do czynienia z „absorpcją” energii przez oscylator.
 - b. Pod wpływem siły zewnętrznej amplituda drgań maleje z czasem. Energia jest przekazywana od oscylatora do źródła siły. Mamy do czynienia z „emisją wymuszoną”.
2. Rozważymy przypadek, kiedy masa oscylatora byłaby także obdarzona ładunkiem, a ściślej mielibyśmy do czynienia z dipolem elektrycznym. Zastanowimy się, jak taki układ oddziałuje z falą elektromagnetyczną, a w szczególności, kiedy energia fali jest przez oscylator absorbowana, a kiedy mamy do czynienia z emisją wymuszoną.

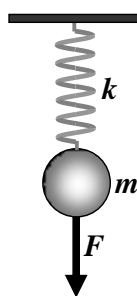
3. Omówimy układ wielu klasycznych mikrooscylatorów. Spróbujemy wyjaśnić, jak taki układ oddziałuje z falą elektromagnetyczną i dlaczego w takim przypadku zwykle mamy do czynienia z absorpcją energii.
4. Rozważymy ruch klasycznego bąka, który wykonuje precesję pod wpływem działającej na niego stałej siły.
5. Zastanowimy się – dla najprostszycch przypadków – jak taki bąk by się zachowywał, gdyby działała na niego siła periodyczna o częstości równej częstości precesji.
6. Rozważymy niezbyt fizyczny model, w którym obracający się bąk o stałej wartości momentu pędu ma jednocześnie pewien moment elektryczny, równoległy do momentu pędu bąka. Zastanowimy się, jak taki układ oddziaływałby z falą elektromagnetyczną.
7. Omówimy, jak można by przygotować układ wielu takich bąków, aby w oddziaływaniu z falą elektromagnetyczną emisja wymuszona przeważała nad procesem absorpcji.
8. Wspomnimy o prawdziwym spinowym momencie pędu i spinowym momencie magnetycznym elektronu. Omówiony model bąka może stanowić klasyczną – niestety dość daleką – ich analogię.

2. Klasyczny oscylator harmoniczny z siłą wymuszającą

Zacznijmy od przypadku bardzo prostego: klasycznego oscylatora harmonicznego o masie m i współczynniku sprężystości sprężyny k , czyli o częstości własnej $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, na który działa siła wymuszająca¹ (rys. 1)

$$F = F_0 \cos(\omega_0 t). \quad (1)$$

Jest to więc przypadek rezonansu.



Rys. 1

¹ Można byłoby także wybrać siłę wymuszającą opisaną funkcją $\sin(\omega_0 t)$. Wtedy jednak obliczenia byłyby nieco bardziej skomplikowane.

Równanie ruchu ma w tym przypadku postać

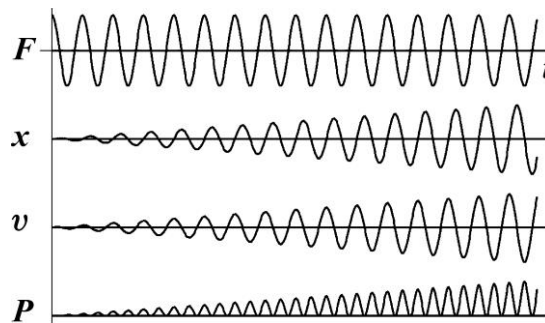
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + F_0 \cos(\omega_0 t), \quad (2)$$

czyli

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0 t). \quad (3)$$

Szczególne rozwiązanie równania niejednorodnego odpowiada drganiom o amplitudzie narastającej liniowo z czasem (rys. 2)

$$x_s = At \sin(\omega_0 t). \quad (4)$$



Rys. 2

Sprawdźmy to, a przy okazji wyznaczmy stałą A

$$\frac{d^2 x_s}{dt^2} = 2A\omega_0 \cos(\omega_0 t) - A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t). \quad (5)$$

Po podstawieniu równania (5) do (3) dostajemy

$$2A\omega_0 \cos(\omega_0 t) - A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) + A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0 t). \quad (6)$$

Widać, że funkcja (4) spełnia równanie ruchu, jeżeli

$$A = \frac{F_0}{2m\omega_0}. \quad (7)$$

Zatem

$$x_s = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t). \quad (8)$$

Rozwiązanie to odpowiada warunkom początkowym $x(0) = 0$ i $v(0) = 0$. Aby wykazać drugą z tych równości obliczmy pochodną (rys. 2)

$$v_s = \frac{dx_s}{dt} = \frac{F_0}{2m\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m} t \cos(\omega_0 t). \quad (9)$$

Widać, że v_s znika dla $t = 0$.

Z wzorów (8) i (9) wynika, że energia oscylatora rośnie z czasem. Mamy więc do czynienia z „absorpcją” energii z zewnętrznego źródła.

Na uzyskane wyniki możemy spojrzeć jeszcze z innego punktu widzenia. Moc uzyskiwana przez oscylator jest równa $P = vF$. Zatem (rys. 2)

$$\begin{aligned} P = v_s F &= \left[\frac{F_0}{2m\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m} t \cos(\omega_0 t) \right] F_0 \cos(\omega_0 t) = \\ &= \frac{F_0^2}{2m\omega_0} \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) + \frac{F_0^2}{2m} t \cos^2(\omega_0 t) = \\ &= \frac{F_0^2}{4m\omega_0} \sin(2\omega_0 t) + \frac{F_0^2}{2m} t \cos^2(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (10)$$

Pierwszy składnik ostatniego wiersza wyrażenia (10) uśredniony po okresie daje zero, drugi, nieujemny, opisuje przekazywanie energii od źródła siły do oscylatora.

Rozwiązanie ogólne równania (2) jest sumą rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego i rozwiązania ogólnego równania jednorodnego, ma więc postać

$$\begin{aligned} x &= \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + C \cos(\omega_0 t) \\ &= \left(\frac{F_0}{2m\omega_0} t + B \right) \sin(\omega_0 t) + C \cos(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (11)$$

Odpowiada mu prędkość

$$\begin{aligned} v &= \frac{F_0}{2m\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m} t \cos(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) - C\omega_0 \sin(\omega_0 t) = \\ &= \left(\frac{F_0}{2m\omega_0} - C\omega_0 \right) \sin(\omega_0 t) + \left(\frac{F_0}{2m} t + B\omega_0 \right) \cos(\omega_0 t) \end{aligned} \quad (12)$$

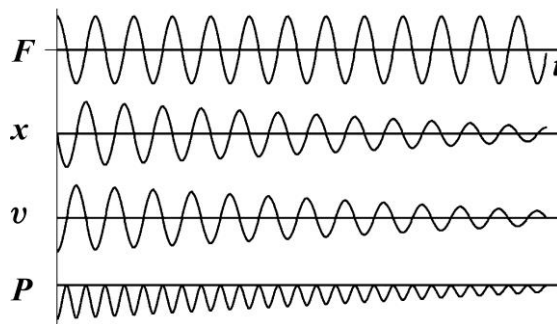
i moc

$$P = \left(\frac{F_0^2}{4m\omega_0} - \frac{C\omega_0 F_0}{2} \right) \sin(2\omega_0 t) + \left(\frac{F_0^2}{2m} t + B\omega_0 F_0 \right) \cos^2(\omega_0 t). \quad (13)$$

Wyraz $C \cos(\omega_0 t)$ we wzorze (11) jest mniej interesujący, bo średnia moc z nim związana jest równa zero. Załóżmy więc na razie $C = 0$. Wtedy

$$x = \left(\frac{F_0}{2m\omega_0} t + B \right) \sin(\omega_0 t). \quad (14)$$

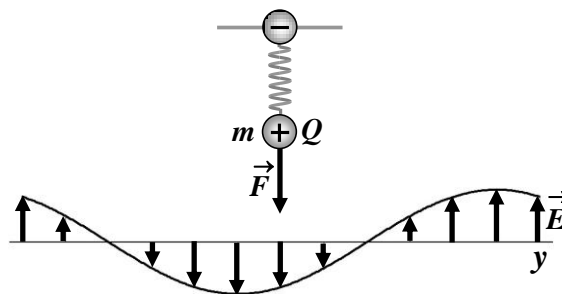
1. Jeżeli $B \geq 0$, amplituda drgań rośnie z czasem. Mamy do czynienia z „absorpcją” energii przez oscylator.
2. Jeżeli $B < 0$, dla niezbyt długich czasów wyrażenie w dużym nawiasie wzoru (14) jest ujemne. Jego wartość bezwzględna, czyli amplituda drgań, z czasem maleje (rys. 3). Energia jest przekazywana od oscylatora do źródła. Widać to też ze wzoru na moc, w którym prawy duży nawias dla małych czasów jest ujemny (rys. 3). Mamy do czynienia z **emisją wymuszoną** energii z oscylatora do źródła siły.



Rys. 3

3. Oddziaływanie oscylatora z falą

Przypuśćmy teraz, że nasz oscylator jest obdarzony ładunkiem Q i znajduje się w polu płaskiej fali elektromagnetycznej o pionowym kierunku pola elektrycznego i o częstotliwości równej ω_0 (rys. 4).



Rys. 4

Pole elektryczne tej fali opisane jest funkcją

$$E(x, t) = E_m \cos(ky - \omega_0 t). \quad (15)$$

Zakładamy, że długość fali $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ jest znacznie większa od rozmiarów oscylatora (co rysunek nie najlepiej oddaje), oraz że oscylator znajduje się w pobliżu punktu $y = 0$.

Pole elektryczne fali (15) w chwili $t = 0$ w punkcie $y = 0$ jest zwrócone do góry. Na masę oscylatora, oprócz siły sprężystości, działa teraz siła elektryczna

$$F = QE_m \cos(\omega_0 t). \quad (16)$$

Jest ona zgodna z wyrażeniem (1), przy czym $F_0 = QE_m$. Zatem ruch oscylatora opisują uzyskane wyżej wyrażenia.

W szczególności możemy mieć do czynienia z dwoma przypadkami:

1. w chwili początkowej masa oscylatora znajduje się w położeniu równowagi. Siła opisana wzorem (16) wywoływać będzie oscylacje o narastającej amplitudzie. Energia będzie przekazywana od fali do oscylatora, zatem będziemy mieli do czynienia z **absorpcją** fali;
2. w chwili początkowej wychylenie oscylatora jest zerowe, ale jego prędkość jest różna od zera i zwrócona w dół. Odpowiada to $B < 0$ i $C = 0$ dla ruchów omówionych w poprzedniej części artykułu. Amplituda drgań oscylatora będzie więc malała. Będziemy mieli do czynienia z przekazywaniem energii od oscylatora do fali, czyli z **emisją wymuszoną**.

4. Układ wielu mikrooscylatorów

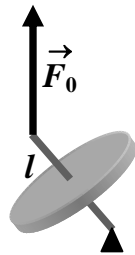
Zastanówmy się teraz, co by było, gdybyśmy mieli do czynienia z układem bardzo wielu małych klasycznych elektrycznych oscylatorów, opisanych powyżej. Wyobraźmy sobie, że oscylatory te wykonują drgania termiczne z przypadkowymi fazami i amplitudami. Gdyby na taki układ padała fala elektromagnetyczna, w niektórych z oscylatorów mielibyśmy do czynienia z absorpcją, a w innych z emisją wymuszoną.

Oznaczałoby to jednak, że ruchy poszczególnych oscylatorów opisane są funkcjami, danymi przez wzór (11). Człon narastający w czasie – czyli pierwszy wyraz w górnym wierszu wzoru – byłby jednakowy dla wszystkich oscylatorów. Człony pozostałe odpowiadałyby przypadkowemu doborom stałych B i C . Po uśrednieniu po wszystkich oscylatorach istotne byłyby tylko człony narastające. Absorpcja przeważałaby nad emisją wymuszoną. Emisja wymuszona mogłaby przeważać tylko wtedy, gdyby fazy początkowe wszystkich oscylatorów były odpowiednio dobrane do fazy fali – ale nie widać, jak taką sytuację można by technicznie zrealizować.

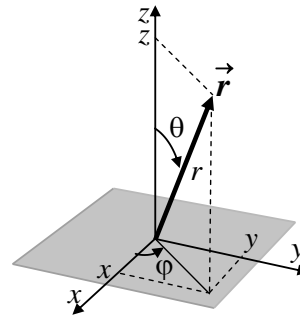
5. Precesja klasycznego bąka

Rozważmy więc teraz inny model klasyczny: wirujący bąk symetryczny o stałej wartości momentu pędu \vec{L} (rys. 5), którego jeden koniec ma ustalone położenie². Przypuśćmy najpierw, że na drugi koniec bąka działa stała siła pionowa i zwrócona w górę \vec{F}_0 , z którą związany jest poziomy moment siły

$$\vec{M}_0 = \vec{l} \times \vec{F}_0. \quad (17)$$



Rys. 5



Rys. 6

Przyjmijmy, że \vec{L} jest równoległe do \vec{l} . Wtedy można napisać

$$\vec{M}_0 = \frac{l}{L} \vec{L} \times \vec{F}_0. \quad (18)$$

Bąk taki będzie wykonywał precesję. W rozumowaniach wygodnie posłużyć się biegunowym układem współrzędnych, przedstawionym na rys. 6.

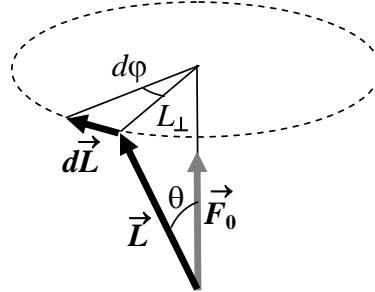
Równanie ruchu można napisać w postaci

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_0 = \frac{l}{L} \vec{L} \times \vec{F}_0. \quad (19)$$

Z wzoru (19) wynika, że przyrosty $d\vec{L}$ są zawsze prostopadłe i do \vec{F}_0 i do \vec{L} (rys. 7). Składowa pionowa wektora \vec{L} jest więc stała, nie zmienia się kąt θ . Wierzchołek wektora \vec{L} zakreśla w przestrzeni okrąg w płaszczyźnie prostopadłej do \vec{F}_0 ze zwrotem zaznaczonym strzałką. Zmiana wartości kąta ϕ , czyli $d\phi$, jest równa

$$d\phi = \frac{dL}{L_{\perp}}. \quad (20)$$

² Jak dyskutowane niżej zachowania bąka można zademonstrować za pomocą żyroskopu z koła rowerowego opisuje *Wstęp do fizyki 1* Andrzeja Wróblewskiego i Janusza Zakrzewskiego.



Rys. 7

Z wzoru (19)

$$dL = dt \frac{l}{L} L F_0 \sin \theta ; \quad (21)$$

ponadto

$$L_{\perp} = L \sin \theta . \quad (22)$$

Podstawiając (21) i (22) do (20), dostajemy

$$d\varphi = dt \frac{\frac{l}{L} L F_0 \sin \theta}{L \sin \theta} = dt \frac{l}{L} F_0 , \quad (23)$$

a więc częstość kołowa precesji Ω_0 jest równa

$$\Omega_0 = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{L} F_0 \quad (24)$$

i nie zależy od kąta θ . Oznacza to, że częstość precesji bąka nie zależy od tego, jaki kąt tworzy moment pędu \vec{L} ze stałą siłą \vec{F}_0 .

Nie wykonują precesji takie bąki, dla których:

1. \vec{L} jest równoległe do \vec{F}_0 . Jest to stan równowagi trwałej.
2. \vec{L} jest antyrównoległe do \vec{F}_0 . Jest to stan równowagi nietrwalej.

6. Klasyczny bąk z momentem wymuszającym

Zastanówmy się teraz, co by było, gdyby na nasz bąk działa dodatkowa siła \vec{F}_1 , która miałaby stałą wartość, ale obracałaby się w tę samą stronę, w którą zachodzi precesja. Pojawienie się siły \vec{F}_1 powoduje powstanie dodatkowego momentu siły, działającego na bąk, określonego wzorem

$$\vec{M}_1 = \vec{l} \times \vec{F}_1 . \quad (25)$$

Nowe równanie ruchu będzie zatem miało postać

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{l} \times \vec{F}_0 + \vec{l} \times \vec{F}_1, \quad (26)$$

czyli

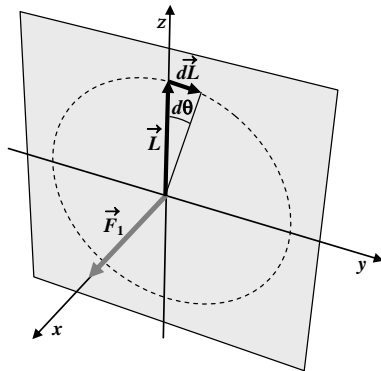
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{l}{L}(\vec{L} \times \vec{F}_0) + \frac{l}{L}(\vec{L} \times \vec{F}_1). \quad (27)$$

Rozpatrzmy tylko dwa najprostsze przypadki:

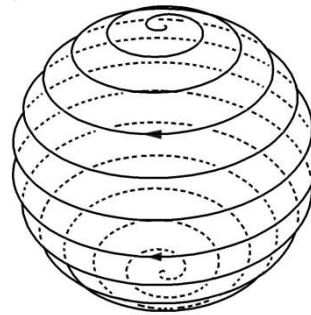
1. kiedy w chwili początkowej moment \vec{L} jest równoległy do \vec{F}_0 ;
2. kiedy w chwili początkowej moment \vec{L} jest antyrównoległy do \vec{F}_0 .

Przypadek 1

W chwili początkowej wektor \vec{L} jest równoległy do \vec{F}_0 i oba mają kierunek osi z , a więc pierwszy człon prawej strony równania (27) znika (rys. 8). W tej samej chwili siła \vec{F}_1 ma kierunek osi x . Z drugiego członu wynika, że w krótkim czasie dt nastąpi zmiana wektora \vec{L} o $d\vec{L}$ prostopadłe i do \vec{L} i do \vec{F}_1 , czyli i do osi x i do osi z , a więc mające kierunek osi y .



Rys. 8



Rys. 9

Oznacza to, że

1. kąt θ wektora \vec{L} zmieni się od zera o $d\theta$ równe

$$d\theta = \frac{dL}{L} = \frac{dt \frac{l}{L} L F_1}{L} = dt \frac{l}{L} F_1; \quad (28)$$

2. wektor \vec{L} przestanie być równoległy do wektora \vec{F}_0 , zacznie więc uczestniczyć w ruchu precesyjnym wokół osi pionowej.

W rezultacie oddziaływania z obu siłami:

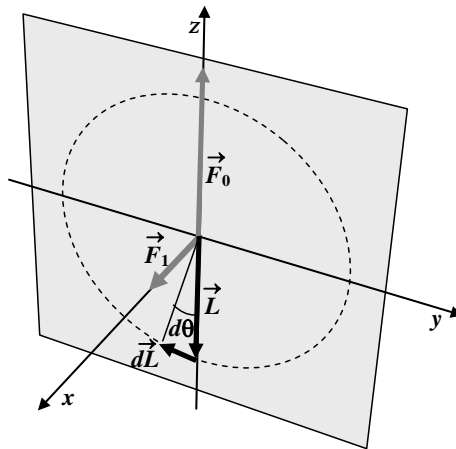
1. wektor \vec{L} będzie znajdował się stale w płaszczyźnie przechodzącej przez oś pionową i obracającą się wokół tej osi z prędkością precesji Ω_0 ;
2. obracająca się siła \vec{F}_1 będzie stale do tej płaszczyzny prostopadła i będzie wywoływać zmiany θ ze stałą prędkością kątową

$$\Omega_1 = \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{L} F_1; \quad (29)$$

3. koniec wektora \vec{L} będzie zakreślał na powierzchni kulistej o promieniu L specyficzną przestrzenną spiralę (rys. 9);
4. kąt θ pomiędzy momentem \vec{L} a stałą siłą \vec{F}_0 będzie wzrastał od 0 do π , a więc energia potencjalna momentu bąka będzie rosła. Mamy więc do czynienia z przekazywaniem energii od źródła siły \vec{F}_1 do bąka, czyli z **absorpcją**.

Przypadek 2

W chwili początkowej wektor \vec{L} jest antyrównoległy do \vec{F}_0 (rys. 10).



Rys. 10

Oba mają kierunek osi z , ale pierwszy ma zwrot ujemny, a drugi dodatni. Pierwszy człon prawej strony równania (27) znika. W tej samej chwili siła \vec{F}_1 ma kierunek osi x . Z drugiego członu wynika, że w krótkim czasie dt nastąpi zmiana wektora \vec{L} o $d\vec{L}$ prostopadłe i do \vec{L} , i do \vec{F}_1 , czyli i do osi x , i do osi z , a więc mające kierunek osi y , ale zwrot przeciwny. Oznacza to, że:

1. kąt θ wektora \vec{L} zmieni się o $d\theta$ o wartości równej

$$d\theta = dt \frac{L}{L} F_1; \quad (30)$$

2. wektor \vec{L} przestanie być równoległy do wektora \vec{F}_1 , zacznie więc uczestniczyć w ruchu precesyjnym wokół osi pionowej.

W rezultacie oddziaływania na skutek działania obu sił:

- wektor \vec{L} będzie znajdował się stale w płaszczyźnie przechodzącej przez oś pionową i obracającą się wokół tej osi z prędkością precesji Ω_0 ;
- obracające się pole \vec{F}_1 będzie stale do tej płaszczyzny prostopadłe i będzie wywoływać zmiany θ ze stałą prędkością kątową

$$\Omega_1 = \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{L} F_1; \quad (31)$$

- koniec wektora \vec{L} będzie zakreślał na powierzchni kulistej o promieniu L specyficzną przestrzenną spiralę, podobną do przedstawionej na rys. 9.
- teraz jednak kąt θ pomiędzy momentem \vec{L} a siłą \vec{F}_0 będzie **malał** od π do 0, a więc energia potencjalna bąka będzie malała. Mamy więc do czynienia z przekazywaniem energii od bąka do źródła siły \vec{F}_1 , czyli z **emisją wymuszoną**;
- w omawianym przypadku nie musimy specjalnie dobierać fazy ruchu, jak to miało miejsce dla oscylatora. Siła \vec{F}_1 sama narzuci odpowiednią fazę zmianom wektora \vec{L} .

Jeżeli ktoś ma wątpliwości co do słuszności powyższych „dowodów przez machanie rękami”, może rozpisać równanie (27) na współrzędnych, przyjmując wyrażenie na siłę \vec{F}_1

$$\vec{F}_1 = [F_1 \cos(\Omega_0 t), -F_1 \sin(\Omega_0 t), 0]. \quad (32)$$

Równanie to ściśle spełniają funkcje

$$\begin{aligned} L_x &= L \sin(\Omega_1 t) \sin(\Omega_0 t); \\ L_y &= L \sin(\Omega_1 t) \cos(\Omega_0 t); \\ L_z &= L \cos(\Omega_1 t). \end{aligned} \quad (33)$$

Wzory (33) oznaczają, że

- w chwili początkowej $t = 0$ zachodzi $L_x = L_y = 0$ i $L_z = L$;

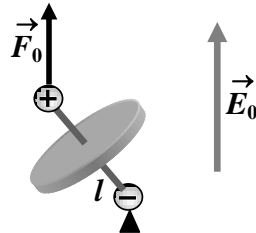
2. moment pędu \vec{L} odwraca się o 180° , czyli o π , po czasie t_1 , spełniającym związek $\Omega_1 t_1 = \pi$, czyli $t_1 = \frac{\pi}{\Omega_1}$. Od $t = 0$ do $t = t_1$ energia potencjalna bąka wzrasta;
3. moment pędu \vec{L} odwraca się o 360° , czyli o 2π , po czasie $2t_1$. Od $t = t_1$ do $t = 2t_1$ energia potencjalna bąka maleje.

Sprawdzenie, że funkcje (33) spełniają równanie (27) jest proste, ale żmudne, więc go tu nie przytaczamy.

7. Elektryczny bąk w stałym polu elektrycznym

Rozważmy teraz następny model klasyczny: wirujący bąk o momencie pędu \vec{L} , z którego osią związany jest dipol elektryczny o momencie \vec{p}_e . Dla uproszczenia rozumowań przyjmijmy, że ładunek ujemny dipola jest nieruchomy, a porusza się tylko jego ładunek dodatni.

Przypuśćmy, że rozważany bąk znalazł się w jednorodnym pionowym polu elektrycznym o natężeniu \vec{E}_0 (rys. 11). Będzie on wykonywał precesję – podobnie jak w przykładzie omówionym w części 5.



Rys. 11

Siła \vec{F}_0 działająca na ładunek dodatni będzie zwrócona pionowo w górę i równa iloczynowi ładunku Q i natężenia pola elektrycznego \vec{E}_0

$$\vec{F}_0 = Q\vec{E}_0. \quad (34)$$

Na dipol będzie działał wtedy moment siły

$$\vec{M}_0 = \vec{p}_e \times \vec{E}_0. \quad (35)$$

Równanie ruchu można napisać w postaci

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_0 = \vec{p}_e \times \vec{E}_0 = \frac{p_e}{L} (\vec{L} \times \vec{E}_0). \quad (36)$$

Wierzchołek wektora \vec{L} zakreślać więc będzie w przestrzeni okrąg w płaszczyźnie prostopadłej do \vec{E}_0 .

Zmieniając odpowiednio oznaczenia we wzorze (24) wykażemy, że częstość kołowa precesji jest równa

$$\Omega_0 = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p_e}{L} E_0 \quad (37)$$

i nie zależy od kąta θ .

Zauważmy ponadto: pole elektryczne \vec{E}_0 ma kierunek pionowy. Przesunięcia $d\vec{l}$ ładunku dodatniego dipola są poziome. A więc wykonywane prace elementarne $dW = \vec{E}_0 d\vec{l} = 0$.

Oczywiście nie wykonują precesji takie bąki, dla których:

1. \vec{p}_e jest równoległe do \vec{E}_0 . Jest to stan równowagi trwałej o energii potencjalnej równej $E_p = -p_e E_0$. Jest to klasyczny analog układu kwantowego w stanie podstawowym.
2. \vec{p}_e jest antyrównoległe do \vec{E}_0 . Jest to stan równowagi nietrwałej o energii potencjalnej równej $E_p = +p_e E_0$. Jest to klasyczny analog układu kwantowego w stanie wzbudzonym.

8. Oddziaływanie bąka z falą elektromagnetyczną

Zajmiemy się teraz ruchem naszego bąka pod wpływem zmiennego pola elektrycznego \vec{E}_1 , prostopadłego do pola \vec{E}_0 , a które obraca się z częstością kołową precesji Ω_0 . Źródłem takiego pola może być fala elektromagnetyczna. Przyjmujemy, że na układ pada pionowo w górę fala o polaryzacji kołowej prawej i częstości kołowej równej Ω_0 (rys. 12), opisana wzorami³

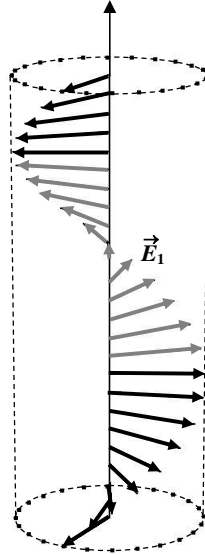
$$E_{1x} = E_m \cos(kz - \Omega_0 t), \quad (38)$$

$$E_{1y} = -E_m \sin(kz - \Omega_0 t). \quad (39)$$

Pole elektryczne tej fali \vec{E}_1 w miejscu, gdzie znajduje się dipol, obraca się z prędkością kołową Ω_0 w tę samą stronę, w którą obracał się koniec wierzchołka wektora \vec{L} , wykonujący precesję, omówioną w części 5.

Zakładamy – jak dla oscylatora – że długość fali $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ jest znacznie większa od rozmiarów naszego bąka, oraz że bąk znajduje się w pobliżu płaszczyzny $z = 0$.

³ Animacja przedstawiająca taką falę znajduje się w Internecie: *ginter polaryzacja youtube*.



Rys. 12

Istnienie pola \vec{E}_1 powoduje powstanie dodatkowego momentu siły, działającego na błąk, o postaci

$$\vec{M}_1 = \vec{p}_e \times \vec{E}_1. \quad (40)$$

Zatem nowe równanie ruchu będzie miało postać (por. wzory (26) i (27))

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{p}_e \times \vec{E}_0 + \vec{p}_e \times \vec{E}_1, \quad (41)$$

czyli

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{p_e}{L} (\vec{L} \times \vec{E}_0) + \frac{p_e}{L} (\vec{L} \times \vec{E}_1). \quad (42)$$

Rozpatrzmy tylko dwa najprostsze przypadki, analogiczne do omówionych w części 6:

1. kiedy w chwili początkowej moment \vec{p}_e jest równoległy do \vec{E}_0 ;
2. kiedy w chwili początkowej moment \vec{p}_e jest antyrównoległy do \vec{E}_0 .

Przypadek 1

W chwili początkowej wektor \vec{L} jest równoległy do \vec{E}_0 i oba mają kierunek osi z , a więc pierwszy człon prawej strony równania znika.

1. Wektor \vec{L} będzie znajdował się stale w płaszczyźnie przechodzącej przez osi pionową i obracającej się wokół tej osi z prędkością precesji Ω_0 .

2. Obracające się pole \vec{E}_1 będzie stale do tej płaszczyzny prostopadłe i będzie wywoływać zmiany θ ze stałą prędkością kołową.
3.

$$\Omega_1 = \frac{d\theta}{dt} = \frac{p_e}{L} E_1 \quad (43)$$
4. Koniec wektora \vec{L} będzie zakreślał na powierzchni kulistej o promieniu L specyficzną przestrzenną spiralę (jak na rys. 9).
5. Kąt θ pomiędzy momentem dipolowym \vec{p}_e a polem \vec{E}_0 będzie wzrastał od 0 do π , a więc energia potencjalna momentu dipolowego w tym polu będzie rosła od $E_p = -p_e E_0$ do $E_p = +p_e E_0$. Mamy więc do czynienia z przekazywaniem energii od fali elektromagnetycznej do dipola, czyli z **absorpcją**.

Przypadek 2

W chwili początkowej wektor \vec{L} jest równoległy do \vec{E}_0 . Oba mają kierunek osi z , ale pierwszy ma zwrot ujemny, a drugi dodatni. W rezultacie oddziaływania z obu polami elektrycznymi:

1. wektor \vec{L} będzie znajdował się stale w płaszczyźnie przechodzącej przez os pionową i obracającą się wokół tej osi z prędkością precesji Ω_0 ;
2. obracające się pole \vec{E}_1 będzie stale do tej płaszczyzny prostopadłe i będzie wywoływać zmiany θ ze stałą prędkością kołową Ω_1 ;
3. koniec wektora \vec{L} będzie zakreślał na powierzchni kulistej o promieniu L specyficzną przestrzenną spiralę.
4. teraz jednak kąt θ pomiędzy momentem dipolowym \vec{p}_e a polem \vec{E}_0 będzie malał od π do 0, a więc energia potencjalna momentu dipolowego w tym polu będzie malała od $E_p = +p_e E_0$ do $E_p = -p_e E_0$. Mamy więc do czynienia z przekazywaniem energii od dipola do fali elektromagnetycznej, czyli z **emisją wymuszoną**.

9. Emisja spontaniczna i do czego można by ją wykorzystać

W naszych dotychczasowych rozważaniach zupełnie pomijaliśmy istotny fakt. Jeżeli dipol elektryczny wykonuje ruch precesyjny w nieobecności fali zewnętrznej, sam wysyła falę elektromagnetyczną. Mamy wtedy do czynienia z **emisją spontaniczną**. Obracający się dipol będzie tracił energię. Kąt pomiędzy kierunkiem dipola a kierunkiem stałego pola elektrycznego \vec{E}_0 będzie malał, aż w końcu dipol ustawi się równoległe do pola.

Rozpatrzmy teraz zespół wielu bąków dipolowych. Pojawia się następująca hipotetyczna możliwość: wytwórzmy jednorodne pionowe pole elektryczne \vec{E}'_0 o zwrocie przeciwnym do omawianego wyżej pola \vec{E}_0 . Jeżeli odczekamy dosta-

tecznie długo, wszystkie dipole ustawią się równoległe do tego nowego pola \vec{E}'_0 . A teraz szybko wyłączmy pole \vec{E}'_0 i włączmy pole \vec{E}_0 . Wtedy wszystkie dipole będą ustawione antyrównoległe do zewnętrznego pola, czyli będą w stanach o wyższej energii potencjalnej $E_p = +p_e E_0$. Jest to klasyczny analog układu kwantowego z odwróconą populacją.

Jeżeli na taki układ padłaby fala spolaryzowana kołowo, omówiona w poprzedniej części, we wszystkich rozważanych centrach wywołałaby emisję wymuszoną. Energia zostałaby przekazana od bąków do fali, nastąpiłoby więc wzmocnienie fali. Mielibyśmy do czynienia z ośrodkiem o **ujemnym współczynniku absorpcji**. Ten fakt stanowi podstawę działania maserów i laserów.

10. Spin

W przyrodzie nie ma obiektów, które miałyby charakter bąka obdarzonego dipolowym momentem elektrycznym. Wiele cząstek jest jednak obdarzonych jednocześnie spinowym momentem pędu i spinowym **momentem magnetycznym**. Należą do nich i elektron, i proton. Omówiony wyżej fikcyjny model w pewnym stopniu można zastosować do elektronu, związanego w atomie wodoru.

1. Spinowe momenty magnetyczne elektronu \vec{p}_m ustawiają się w zewnętrznym jednorodnym polu **magnetycznym** \vec{B}_0 . Mogą przyjmować dwa stany: o energii mniejszej $E_p = -p_m B_0$ i energii większej $E_p = +p_m B_0$.
2. Spinowe momenty magnetyczne mogą oddziaływać z falą elektromagnetyczną, z jej polem magnetycznym \vec{B}_1 – a nie z polem elektrycznym. Oddziaływanie to może przesuwać elektrony z poziomu niższego na wyższy, czyli wywoływać absorpcję fali. Może też przesuwać elektrony ze stanu wyższego na niższy – i wywoływać emisję wymuszoną.

W rzeczywistości jednak nawet w atomie wodoru sytuacja jest bardziej złożona. Spin ma nie tylko elektron, ale i proton, który jest jądrem atomu wodoru. Ich wzajemne oddziaływanie powoduje, że układ poziomów energetycznych jest bardziej skomplikowany.

11. Konkluzja

Na zakończenie trzeba stwierdzić wyraźnie: mikroświat musi być opisywany przez mechanikę kwantową, a nie mechanikę klasyczną. Najbardziej wymyślne modele klasyczne mogą więc co najwyżej ilustrować tylko pewne wybrane aspekty rzeczywistości.