



Prawo Archimedesesa? – ależ to bardzo proste!

Adam Smólski

I SLO „Bednarska” w Warszawie

Wydawałoby się, że prawo Archimedesesa to jeden z wdzięczniejszych tematów na lekcjach fizyki w gimnazjum. Może zostać odkryte na drodze logicznej analizy bardzo prostych obserwacji, a następnie ilościowo potwierdzone w doświadczeniu. A ile przy tym radości w chlapaniu wodą! Na koniec jeszcze refleksja: o wyprzedzającym epokę geniuszu Archimedesesa i o tym, jak się człowiek dobrze czuje, gdy coś zrozumie... Boż to satysfakcja nie do opowiedzenia – trzeba przeżyć samemu.

Niestety, niektórzy autorzy książek i podręczników postanowili dostarczyć tej satysfakcji po niższej cenie, sprzedając w ładnym opakowaniu karykaturę geniuszu i rozumienia.

I tak np. w podręczniku Dobsona do gimnazjum, na stronie 17, w okienku zatytułowanym – jakżeby inaczej – „Eureka”, czytamy:

Starożytni Grecy byli na pewno ludźmi wyrozumiałymi. Ale widok gołego człowieka biegnącego ulicami miasta i krzyczącego „Znalazłem! Znalazłem!” zaniepokoił pewnie niejednego mieszkańca Syrakuz i zainteresował grupę dzieci, które biegnąc za gołasem wykrzykiwały niecenzuralne słowa.

Ten dziwny człowiek to Archimedes. Był już wtedy znanym uczonym i właśnie rozwiązał bardzo istotny problem fizyczny. Odkrył bowiem prawo, które do dziś nosi jego imię. Legenda głosi, że król zwrócił się do Archimedesesa, by zbadał, czy ofiarowana mu nowa korona wykonana jest z czystego złota, czy też ze stopu złota i srebra. Odpowiedź przyszła mu do głowy, gdy kąpał się w wannie. Opierała się na prostym fakcie, że gdy wchodzisz do wanny z wodą, poziom wody się podnosi. Każdy to wie!

Ale Archimedes nagle zrozumiał, że objętość rozpychanej na boki wody musi być taka sama, jak objętość zanurzanego ciała.

To genialne odkrycie pozwoliło mu na zmierzenie objętości korony. Po zważeniu jej łatwo można wyznaczyć jej gęstość. Jeśli gęstość materiału będzie taka sama, jak gęstość czystego złota, król się ucieszy. Jeśli nie, złotnik znajdzie się w poważnych tarapatkach.

Archimedes stwierdził również, że przedmioty zanurzone w wodzie wydają się znacznie lżejsze.

Dalszy ciąg po paru zdaniach doprowadza do sformułowania prawa Archimedesesa, choć bez uzasadnienia jego słuszności. Czytelnik jednak jest przeświadczony, że to, co genialne, to odkrycie równej objętości ciała i wypartej wody. A dalszy ciąg, to coś, co Archimedes „stwierdził również”. Czy ktoś, kto tak opowiada o prawie Archimedesesa, rozumie, co robi?

Oto zabawna skądinąd książeczka Kjartana Poskitta „Ta zabójcza matma”, z serii „Monstrrrualna Erudycja”, wyd. Egmont, Warszawa 1999. Na str. 10 czytamy:

Eksperyment matematyczny, czyli matematyk w gorącej wodzie kąpany.

Napełnij wannę po sam brzeg.

Ostrożnie wejdź do niej.

Położ się powoli tak, abyś lekko unosił się w wodzie.

I co się dzieje? Woda, która przelała się na podłogę, ma taką samą objętość, jak twoje zanurzone ciało!

Kiedy ktoś popuka się w czoło, wyjaśnij, że sprawdzasz prawdziwość prawa Archimedesesa – a był to jeden z największych matematyków wszech czasów!

Popukamy się w czoło tak czy siak.

Oto fragment serwisu edukacyjnego „Eduseek”

<http://www.eduseek.ids.pl/artykuly/artikul/ida/1360/>

NATCHNIENIE W WANNIE

Wanna pełna ciepłej wody to cudowne miejsce odpoczynku, ale nie tylko. Doskonale nadaje się też do spokojnych rozważań o tajemnicach życia. Bywa, że w kąpieli przychodzą do głowy najśmielsze pomysły! Podobno około roku 200 przed naszą erą Grek Archimedes spostrzegł w kąpieli, że kiedy się zanurza, podnosi się poziom wody w wannie. Zastanowiło go, iż ciało stałe – jego ciało – wywołuje taki skutek. W górę przemieściła się ilość wody odpowiadająca objętości jego ciała, jak gdyby robiąc mu w ten sposób miejsce. W owym momencie – jak mówi ta opowieść – Archimedes zrozumiał, że dokonał odkrycia. Krzyknął "Eureka", czyli "znalazłem", wyskoczył z wanny i nagi wybiegł na ulicę. Nie wiadomo, dokąd tak gnał, lecz pewne jest, że pędził za nim osłupiały sługa.

Jaki był powód tak niecodziennego zachowania sławnego potem Greka? Podobno ówczesny władca zwrócił się do Archimedesesa z trudnym zadaniem. Czuł się oszukany przez złotnika, który zrobił mu nową koronę. Archimedes miał stwierdzić, czy pod lśniącem złotem wspaniałej ciężkiej korony jest ten sam cenny kruszec, czy też kryje się pospolity ołów. Archimedes wiedział, że z dwóch bryłek takiej samej wagi – jednej z ołowiu, drugiej zaś ze złota – ołowiana była zdecydowanie większa. Można by zatem najpierw zmierzyć wielkość korony. Łatwo powiedzieć, ale jak to zrobić z przedmiotem tak misternie rzeźbionym?

Eureka!

Wówczas to doświadczenie z kąpieli podpowiedziało mu rozwiązanie zagadki. Wystarczy włożyć koronę do wody i zmierzyć, o ile podniesie się poziom wody. Sprytny Archimedes wziął zatem bryłkę czystego złota, która ważyła tyle co korona, i zanurzył ją w wodzie. Jeśli korona jest cała z najcenniejszego kruszcu – myślał – powinna wyprzeć ku górze tyle samo wody, ile wyparła zanurzona w wodzie bryłka złota. Jeśli zaś złotnik oszukał władcę, wypartej wody będzie znacznie więcej. Gdyby nie ten wspaniały pomysł, władca nigdy nie poznałby prawdy. Musiałby po-

godzić się z niepewnością lub zniszczyć koronę, by zobaczyć, co jest w środku. Archimedes odkrył więc dokładną metodę badania metali, przydatną nie tylko władcy, ale i kupcom. Zwłaszcza że można się nią posługiwać także w innych sytuacjach, np. by poznać ładowność statku.

Na szczęście nikt tu nie sugeruje, że mowa jest o prawie Archimedesesa. Zapewnia się nas za to, że zawartość serwisu została sprawdzona pod względem metodycznym. Czyli ktoś się wykapał.

Poczytać Państwu jeszcze? Może z jednej już tylko książki, skądinąd bardzo udanej, poza może następującym fragmentem:

Najsłynniejsza anegdota [o Archimedesie – przyp. A. S.] wiąże się z wiekopomnym prawem z dziedziny hydrostatyki. Opisał ją dokładnie rzymski autor Witruwiusz: „Hieron, król Syrakuz, postanowił złożyć w pewnej świątyni złotą koronę jako ofiarę nieśmiertelnym bogom. Zawarł kontrakt na zrobienie jej za ustaloną cenę i dokładnie odważył złotnikowi potrzebną ilość złota [...] oskarżono złotnika, że wykonując koronę ukraść część złota, dodając zamiast niego srebra. Hieron, wściekły, że być może został oszukany, zażądał, aby Archimedes zastanowił się nad tą sprawą. Ten, rozmyślając o całej historii, udał się do łaźni i wchodząc do wanny zauważył, że im bardziej jego ciało zanurza się w wodzie, tym więcej wody wylewa się z wanny. [...] uniesiony radością wyskoczył z wanny i pobiegł nagi do domu wołając gromkim głosem: heureka, heureka”.

Później, mając już metodę, przygotował Archimedes dwa ciała: jedno ze srebra, a drugie ze złota, o tym samym ciężarze, co korona, i zaobserwował, ile wody wypiera każde. Ilość wody wypartej przez koronę była większa od ilości wody wypartej przez próbkę złota, a mniejsza od ilości wody wypartej przez próbkę srebra. Tym samym uzyskał dowód na oszustwo rzemieślnika. Pełny dowód swojego prawa umieścił Archimedes w dziele *O ciałach pływających*.

To urywek z książki A. Drzewińskiego i J. Wojtkiewicza *Opowieści z historii fizyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001. Dalszy tekst zawiera, owszem, wyjaśnienie rzeczywistego prawa Archimedesesa, jednak nie jest ono wyraźnie sformułowane. Czytelnik, nie znający fizyki, znowu wnioskuje: aha, prawo Archimedesesa, „im bardziej ciało zanurza się w wodzie, tym więcej wody wylewa się z wanny”, no tak, toż to bardzo proste. Ponawiam pytanie: czy ktoś, kto tak opowiada laikom o prawie Archimedesesa, jak autorzy *Opowieści z historii fizyki*, rozumie, co robi? To ma być popularyzacja?

Z wyobrażaniem sobie odkrycia Archimedesesa w taki sposób (że ciało wypiera tyle wody, ile zmieściłoby się w jego objętości) spotkałem się u wielu osób, niekoniecznie czytelników cytowanych wyżej książek. Mam swoją teorię, skąd się u ludzi bierze kojarzenie prawa Archimedesesa z tym dość banalnym faktem. Zapewne to jest coś, co ludzie po prostu ROZUMIEJĄ, w odróżnieniu od faktycznego prawa Archimedesesa, którego ich uczono, ale go nie zrozumieli. W sumie to nawet powinno być dla nas źródłem otuchy – zrozumienie jest tu początkiem trwałej wiedzy.

Niewykluczone także, że powodem zamieszania jest cała ta anegdota o królu i koronie. Trudno po nią nie sięgać, jest przecież wspaniała, choć zapewne daleka

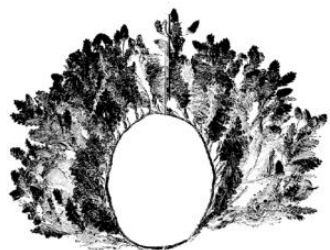
od faktycznych wydarzeń. A jak już zaczniemy kombinować, jakby tu sobie z tą koroną poradzić, pierwsze, co się narzuca, to zmierzyć objętość przez zanurzenie w naczyniu. My rozumiemy, uczniowie rozumieją, pełen sukces. Nie szkodzi, że nie ma to wiele wspólnego z prawem Archimedesesa, o którym miała być lekcja.

Tylko że to bzdura.

Tak się nie da zmierzyć objętości z dokładnością, która byłaby w tym wypadku do zaakceptowania. Korona, zwłaszcza taka, o jaką mogło chodzić królowi Hieronowi, to przedmiot o dużych rozmiarach, ale raczej o niewielkiej objętości użytego metalu. Zanurzanie jej w naczyniu dostatecznie dużym, aby się zmieściła, spowoduje podniesienie poziomu wody w stopniu zanikającym, nie do zmierzenia (menisk!). Przelewaniem okazuje się równie niedokładne. Jeśli zamiarem było wykrycie paroprotentowego fałszerstwa, ta metoda w ogóle nie wchodziła w grę.

Zwraca na to uwagę Chris Rorres na świetnej stronie [www poświęconej Archimedesowi: http://www.mcs.drexel.edu/~crorres/Archimedes/contents.html](http://www.mcs.drexel.edu/~crorres/Archimedes/contents.html)

Można tam znaleźć zdjęcia złotych greckich koron, jakie zachowały się do naszych czasów. Były to raczej misternie kute wieńce niż korony o typowym kształcie. Wkładano je na głowy posągów, nie żywych ludzi, tak więc Hieron pewnie zamawiał koronę na głowę jakiegoś bóstwa. Zdjęcie poniżej, wyjęte ze wspomnianej strony [www](http://www.mcs.drexel.edu/~crorres/Archimedes/contents.html), przedstawia koronę z miejscowości Vergina w Macedonii z IV wieku przed Chrystusem. Jest to największa znana złota korona z tamtych czasów, o masie 714 g i średnicy 18,5 cm.



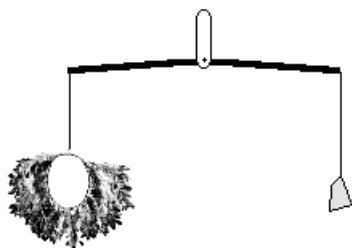
Chris Rorres przeprowadza rachunek, który każdy może z łatwością zrobić sam, zrobmy go więc i my: taka korona ma objętość około 37 cm^3 , zanurzana w naczyniu o średnicy 20 cm spowodowałaby podniesienie się poziomu wody o około 1,2 mm. Jeżeli do złota domieszono by srebra stanowiącego 20% masy korony, zajmowałaby ona około 43 cm^3 , powodując podniesienie poziomu wody o niecałe 1,4 mm. Różnica jest

mniejsza niż oczywisty błąd odczytu (menisk!). Proponuję zresztą przekonać się, przeprowadzając samemu podobny eksperyment.

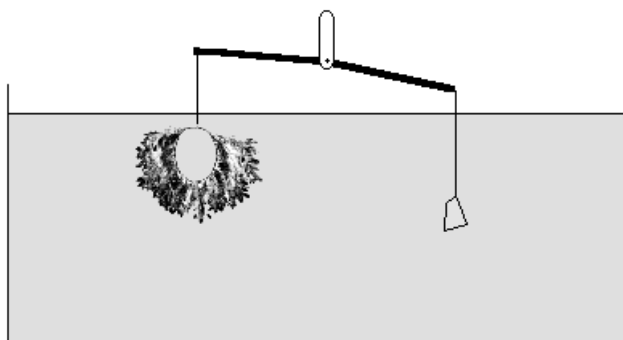
Tych wszystkich, którzy tak sobie dotąd wyobrażali metodę Archimedesesa, mogą pocieszyć, że mają nie byle jakich poprzedników. Autorem pomysłu z zanurzeniem i mierzaniem, ile się wyleje, jest zapewne wspomniany Witruwiusz, rzymski architekt i inżynier z czasów Oktawiana Augusta, postać ze wszech miar wybitna. Historyjkę, której początek cytowałem z książki A. Drzewińskiego i J. Wojtkiewicza, Witruwiusz opowiedział w IX księdze swego głównego dzieła *De architectura*. Dalszy ciąg historyjki i szczegóły pomiaru – Archimedes wrzuca (sic!) bryłkę złota do naczynia, żeby woda się przelała, po czym dopełnia naczynie wodą z pojemnika służącego jako miara objętości – świadczą raczej o wymyśleniu wszystkiego „przy biurku”. Zapewne Witruwiuszowi także wystarczyło, że ROZUMIE.

Wątpliwości musiały narodzić się wcześniej, bo poemat *Carmen de ponderibus et mensuris* z ok. 500 roku próbuje w inny sposób odtworzyć metodę Archimidesa. Można tu tylko snuć różne domysły, bo w dziełach Archimidesa brak jakichkolwiek śladów anegdoty.

Cóż jednak byłoby w zgodzie z naszą wiedzą o tym mędrцу? Coś zarazem prostego i genialnego: oczywiście trzeba koronę ZWAŻYĆ w powietrzu i w wodzie. Najprostsza wersja takiego doświadczenia nie wymaga nawet odważników. Należy na dwuramiennej wadze zrównoważyć koronę odpowiednią ilością czystego złota:



a następnie zanurzyć wszystko w wodzie:



Jeśli korona jest sfalszowana, czyste złoto przeważy. Przy danych z naszych poprzednich obliczeń różnica ciężarów w wodzie wyniosłaby ok. 0,06 N – wielkość z dużym zapasem mieszcząca się w zakresie dokładności nawet prymitywnych wag.

Zauważmy, że masa złota nie musi dokładnie być równa masie korony – zrównoważenie wagi w powietrzu możemy osiągnąć przesuwaniem punktów zaczepienia nitki, ramiona wagi nie muszą być jednakowe. Prawda, że genialne?

Na zdjęciu pokazuję podobne doświadczenie w wersji mini (potrzebne do doświadczenia kieliszki uczniowie przynoszą z domu). Ważone są kawałki drutu ze stali i z mosiądzu.



Jeśli na taki właśnie pomysł wpadł Archimedes podczas kąpieli, jasne się staje, że „po drodze” sformułował swoje prawo.

A JAK TO BYŁO NAPRAWDĘ?

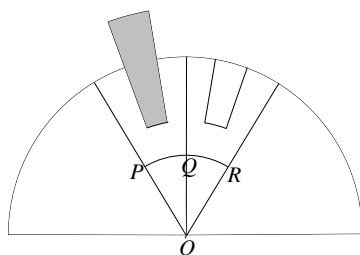
Jak powiedziałem, próżno by szukać w dziełach Archimedesów śladów jakiejś burzliwej historii jego odkryć, bo też i dzisiaj nikt w naukowym czasopiśmie nie zdradza, czy rozwiązanie znalazł w łazience, czy przy kuflu piwa. Prace Archimedesów utrzymane są w euklidesowej konwencji logicznego wywodu: twierdzenie, dowód, twierdzenie, dowód itd. Nie ma tu miejsca na anegdoty...

Swoje prawo Archimedes wyprowadził w pierwszej księdze dwuczęściowego dzieła *O ciałach pływających*, zachowanego jedynie w przekładzie łacińskim. Prześledźmy jego rozumowanie, mając na widoku naszą, jak na razie nieudaną, szkolną lekcję.

(Korzystam z wydania po angielsku dzieł wszystkich Archimedesów, w opracowaniu T. L. Heath, Dover Publications Inc., New York 1912).

Już początkowe twierdzenie Archimedesów jest szokujące: „Powierzchnia jakiegokolwiek cieczy jest powierzchnią sfery, której środek jest identyczny ze środkiem Ziemi”. Całe dalsze rozumowanie będzie prowadzone w ramach tego modelu. Czemu Archimedes nie stosuje przybliżenia, jak powiedzielibyśmy dzisiaj, „jednorodnego pola grawitacyjnego”? Nie umiem odpowiedzieć, poza żartobliwym przypuszczeniem, że... zwyciężył w nim matematyk.

Kluczowe jest twierdzenie następne, które głosi, że ciało o tej samej gęstości co ciecz, będzie się w niej unosić, ani nie wypływając, ani nie tonąc. Wyjaśnieniem jest rysunek:

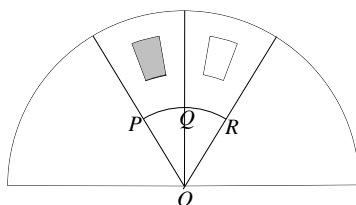


Załóżmy, że ciało pływa, wystając z cieczy. Archimedes dzieli w wyobraźni przestrzeń cieczy na dwie połowy. Ciało pływa w jednej połowie (rysunek). W drugiej połowie wydzielamy w wyobraźni część cieczy będącą jakby repliką zanurzonej części ciała. Poniżej rozpatrujemy sferyczną powierzchnię PQR . Jeżeli ciecz jest w spoczynku, parcie na PQ musi być takie samo jak parcie na QR . To jednak nie zachodziłoby, gdyby ciało wystawało z cieczy – ciało waży więcej niż jego „replika” w drugiej połowie.

Dlaczego nie tonie? Tu argumentacja jest zdawkowa. Chodzi, domyślam się, o to, że jeśli na rysunku takim jak powyżej ciało nie wystaje z cieczy, to równowaga jest osiągnięta i nic się nie musi zmieniać (my wiemy, że ciało pchnięte w dół jednak opadłoby na dno).

Następne twierdzenie: „Ciało lżejsze niż ciecz” – chodzi oczywiście o gęstość – „nie będzie, jeśli je zanurzyć, całkowicie zatopione, ale część jego będzie wystawać ponad powierzchnię”.

Właściwie do dowodu mógłby służyć ten sam rysunek, ale Archimedes wyraźnie preferuje rozumowania *ad absurdum*, robi więc rysunek następujący:



Znowu ciało i jego „replika” z samej cieczy. Gdyby było zanurzone całkowicie, równość nacisków na PQ i QR nie byłaby możliwa.

Kolejne twierdzenie, w którym po raz pierwszy pojawia się termin „ciecz wyparta”: „Ciało lżejsze od cieczy pływa zanurzając się na tyle, by ciężar wypartej cieczy był taki, jak ciężar ciała”. Przez „ciecz wypartą” rozumie się oczywiście ciecz zajmująca taką samą objętość jak zanurzona część ciała. Żadnego przelewania się przez brzegi wanny! Dowód prowadzony jest znowu na podstawie rysunku pierwszego i idea jest wciąż ta sama: naciski na PQ i QR są równe. Chyba już widać metodę: na ciało w równowadze otaczająca ciecz działa tak samo jak na „replikę” (zanurzonej części) z samej cieczy.

Koncepcja siły działającej ze strony cieczy na ciało pojawia się w następnym twierdzeniu: ciało lżejsze od cieczy, zmuszone do całkowitego zanurzenia, będzie wypychane siłą równą różnicy ciężaru wypartej cieczy i ciężaru ciała. Tu Archimedes „dociąża” ciało z góry balastem równym wspomnianej różnicy. Wtedy ciało utrzymuje się tuż pod powierzchnią, tak że dodany balast wystaje. Balast równoważy działanie cieczy – intuicja trzeciej zasady całkiem wyraźna.

I teraz następuje twierdzenie, w którym prawo Archimedes’a zostaje ostatecznie sformułowane. To historyczna chwila, zacytujmy je wiernie:

„Ciało cięższe od cieczy, jeśli się je zanurzy, będzie opadać na dno, a związane w cieczy okaże się lżejsze niż jego prawdziwy ciężar o ciężar cieczy wypartej”.

Dowód przeprowadzony jest tak, by powołać się na wcześniej udowodnione twierdzenia. W tym celu Archimedes obok rozpatrywanego ciała A o ciężarze $G + H$, gdzie G jest ciężarem wypartej przez ciecz, każe wyobrazić sobie ciało B o ciężarze G i takie, by ciecz o objętości ciała B ważyła $G + H$. Wtedy łącznie A i B mają ciężar taki sam jak ciecz przez oba wyparta. Zatem A i B połączone będą unosić się bez wypływania ani tonięcia. Ciężar A w cieczy jest taki jak siła pchająca samo B do góry: $(G + H) - G = H$, c.b.d.o.¹

Zawile? Tak, choć oczywiście można by to uprościć, przyjmując model „płaskiej Ziemi”. Ciągle jednak nie jest to odpowiednie na lekcję w przeciętnej klasie. Spróbujmy zatem wydobyć z rozumowania Archimedes’a tylko kluczowy pomysł. To chyba pomysł, by rozpatrywać „replikę” zanurzonej części ciała – z samej cieczy. Ciało i ta „replika” doznają takiego samego oddziaływania ze strony reszty cieczy. To oddziaływanie nazywamy siłą wyporu. W przypadku „repliki” ma ona wartość równą ciężarowi „repliki”, czyli ciężarowi wypartej cieczy. W przypadku ciała zatem tyle samo.

To rozumowanie wypadałoby wesprzeć rysunkami, a i tak wymaga ono, od ucznia, sporej koncentracji. Może dlatego tradycyjna szkolna metoda polega na rozpatrywaniu ciała w kształcie prostopadłościanu itd., z późniejszym uogólnieniem na zasadzie „machania rękami”. Jako uczeń odbierałem takie uogólnienia jak oszustwo. Pod tym względem rozumowanie podane przed chwilą (szeroko znane, ja usłyszałem je przed laty na wykładzie W. Gorzkowskiego) nie ma wady. Poza tym jest naprawdę prostsze. Uczeń, który dostrzeże tę prostotę, ma zagwarantowane niezapomniane przeżycie intelektualne (jak Państwo widzą, pamiętam, wręcz mam w oczach tamten wykład).

No a co począć z anegdotą o królu Hieronie? Przerobić! Propozycją takiej przeróbki jest przedstawienie „Korona króla Hierona”, przygotowane przeze mnie wspólnie z uczniami pierwszych klas gimnazjum (I Społeczne Gimnazjum i Liceum Ogólnokształcące im. Jam Sacheba Digvijajsinhji w Warszawie, w skrócie „Bednarska”) na wiosnę 2001 roku. Wystawiliśmy je potem na I Ogólnopolskim Przeglądzie Teatrów Szkół Niepublicznych w Szczecinie. Zdjęcia ze spektaklu i tekst sztuki dostępne są na stronie www.wsip.com.pl/serwisy/czasfiz/

Od Redakcji:

Pan Artur Ludwikowski z Gdańska (współautor wspomnianego w tym zeszycie *Fotonu* podręcznika dla gimnazjum), autor nagrodzonej przez PTF – Sekcja Nauczycielska lekcji pokazowej (Kraków 2000), również prezentuje poprawne i stosowne „przedstawienie dla uczniów gimnazjum”.

¹ Zwróćmy uwagę na kapitalne wykorzystanie symetrii między przypadkami ciała „cięższego” i „lżejszego” od cieczy. Można sądzić, że powodem wyboru takiej właśnie metody jest matematyczna estetyka dowodu.