



## Odbicie fali od granicy ośrodków

*Jerzy Ginter*

*Uniwersytet Warszawski*

### Kiedy światło się odbija?

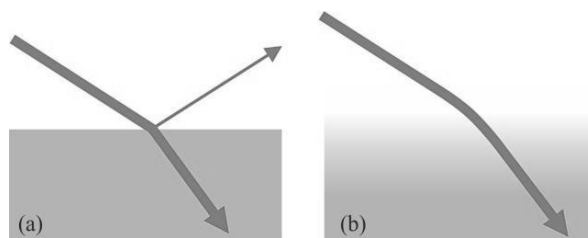
Znamy doskonale zjawisko załamania światła na granicy dwóch ośrodków o różnych współczynnikach załamania. Przebiega ono jednak istotnie różnie w dwóch skrajnych przypadkach:

1. Zmiana współczynnika załamania zachodzi w warstwie powierzchniowej o grubości małej w porównaniu z długością fali („skokowo”, rys. 1a). Wtedy oprócz promienia załamane go pojawia się promień odbity.

Jako przykład może służyć odbicie światła od szyby szklanej. Długość fali światła zielonego w powietrzu jest równa w przybliżeniu  $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ . Współczynnik załamania zmienia się od 1 dla powietrza do 1,5 dla szkła w warstwie o grubości porównywalnej z promieniem atomu, czyli rzędu  $d \approx 0,1 \text{ nm} = 0,0001 \mu\text{m}$ . Zatem stosunek  $\lambda/d \approx 5000$ .

2. Zmiana współczynnika załamania zachodzi płynnie w warstwie przejściowej o grubości znacznie większej od długości fali (rys. 1b). Wtedy promień odbity się nie pojawia!

Obserwację tego rodzaju przeprowadza się na granicy wody (na górze) i nasyconego roztworu soli kuchennej (na dole). Przypuśćmy, że na skutek zjawiska dyfuzji grubość warstwy przejściowej jest równa  $d = 1 \text{ cm} = 10\,000 \mu\text{m}$ . Jeżeli długość fali w powietrzu jest równa  $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ , w wodzie jest mniejsza i równa  $\lambda_w = 0,5 \mu\text{m}/1,33 \approx 0,38 \mu\text{m}$ . Stosunek  $\lambda_w/d$  jest więc równy około 0,00004.



Rys. 1.

Gdyby światło padało na granicę ośrodków nie pod kątem, ale prostopadle:

- (a) W przypadku 1 fala odbita znalazłaby się w tym samym obszarze, co fala padająca i nastąpiłaby jej interferencja z falą padającą. Gdyby odbicie było całkowite, powstałaby fala stojąca. Kiedy odbicie jest częściowe, powstaje fala „półstojąca”, którą można potraktować jako superpozycję fali stojącej

i fali biegnącej. W obu przypadkach amplituda fali świetlnej nie jest stała, ale periodycznie zależy od położenia.

(b) W przypadku 2 fali odbitej nie ma – a więc nie ma i interferencji fal.

Można więc zadać pytanie: jak gruba musi być „płynna” warstwa dzieląca ośrodki, aby od zachowania granicznego (a) przejść do zachowania granicznego (b)? Opis dla fal elektromagnetycznych byłby dość skomplikowany. Można jednak prześledzić problem na prostym modelu mechanicznym. Można do rozwiązania zagadnienia zastosować prostą metodę numeryczną. Zanim jednak do tego przejdziemy, musimy przypomnieć kilka spraw.

### Odbicie na granicy dwóch ośrodków ciągłych

Przypomnijmy na początek, jak zachodzi odbicie na granicy dwóch ośrodków ciągłych. Przyjmijmy, że granica znajduje się w punkcie  $x = 0$ . Mówi się więc tak (rys. 2):

1. Na lewo od granicy istnieją dwie fale biegnące:

padająca:

$$U_P(x, t) = P \cos(q_1 x - \omega t), \quad (1)$$

i odbita:

$$U_R(x, t) = R \cos(q_1 x + \omega t). \quad (2)$$

gdzie

$$q_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}.$$

2. Na prawo jest jedna fala przechodząca, biegnąca ( $1 \rightarrow 2$ ):

$$U_Q(x, t) = Q \cos(q_2 x - \omega t). \quad (3)$$

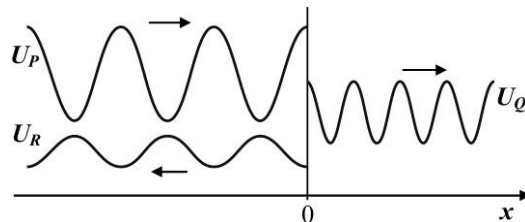
Warunek ciągłości funkcji na granicy ośrodków prowadzi do relacji:

$$P + R = Q. \quad (4)$$

Warunek ciągłości pochodnej na granicy ośrodków prowadzi do związku:

$$P - R = \frac{q_2}{q_1} Q = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} Q = nQ; \quad (5)$$

gdzie  $n$  jest współczynnikiem załamania światła ośrodka 2 względem ośrodka 1.



Rys. 2.

Zwykle amplitudę fali padającej  $P$  traktuje się jako wielkość znaną. Korzystając ze wzorów (4) i (5) oblicza się amplitudy fali odbitej  $R$  i fali przechodzącej  $Q$ . My jednak teraz postąpimy trochę inaczej. Powiemy: znamy falę w obszarze prawym. Jaka jest fala w obszarze lewym? Fala ta jest superpozycją fal  $U_P$  i  $U_R$ , ma więc postać:

$$\begin{aligned} U_1(x,t) &= P \cos(q_1 x - \omega t) + R \cos(q_1 x + \omega t) = \\ &= P [\cos(q_1 x) \cos(\omega t) + \sin(q_1 x) \sin(\omega t)] + R [\cos(q_1 x) \cos(\omega t) - \sin(q_1 x) \sin(\omega t)] = \\ &= (P + R) \cos(q_1 x) \cos(\omega t) + (P - R) \sin(q_1 x) \sin(\omega t) = \\ &= Q \cos(q_1 x) \cos(\omega t) + nQ \sin(q_1 x) \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (6)$$

Wyrażenie to ma postać sumy dwóch fal stojących, przesuniętych w fazie o ćwierć okresu.

Dla określonego  $x$  fala ta opisuje zmienność harmoniczną z częstością kołową  $\omega$ . Wyrażenie to można przedstawić w postaci:

$$U_1(x,t) = Q \sqrt{\cos^2(q_1 x) + n^2 \sin^2(q_1 x)} \cdot \left( \frac{\cos(q_1 x)}{\sqrt{\cos^2(q_1 x) + n^2 \sin^2(q_1 x)}} \cos(\omega t) + \frac{n \sin(q_1 x)}{\sqrt{\cos^2(q_1 x) + n^2 \sin^2(q_1 x)}} \sin(\omega t) \right). \quad (7)$$

Jest to więc ruch o amplitudzie, zależnej od  $x$ :

$$A(x) = Q \sqrt{\cos^2(q_1 x) + n^2 \sin^2(q_1 x)} = Q \sqrt{1 + (n^2 - 1) \sin^2(q_1 x)}. \quad (8)$$

Fazę  $\psi(x)$  tego ruchu określa związek:

$$\operatorname{tg} \psi(x) = \frac{n \sin(q_1 x)}{\cos(q_1 x)} = n \operatorname{tg}(q_1 x) \quad (9)$$

Fazę w dalszym ciągu nie będziemy się zajmować.

Powróćmy do amplitudy, określonej wzorem (8). Widać z niego, że głębokość jej oscylacji może być potraktowana jako miara intensywności fali odbitej. Na przykład:

- dla  $n = 2$  amplituda oscyluje pomiędzy 1 a 2;
- dla odbicia od ostrej granicy nie ma oscylacji, czyli nie pojawia się fala odbita, jeżeli  $n = 1$ . Jest to jednak przypadek trywialny.

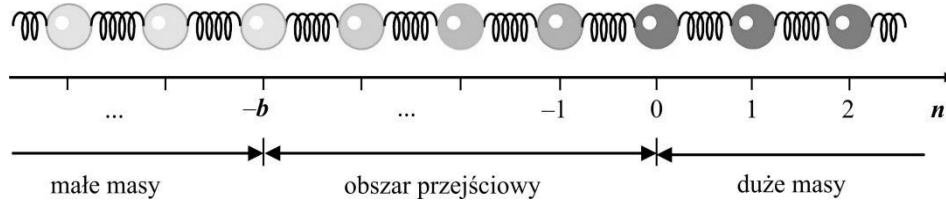
### Model mechaniczny

Rozważmy teraz model mechaniczny, o którym wspomnieliśmy na początku. Będzie to układ kul, które mogą się poruszać wzdłuż prostej (rys. 3). Kule te połączone są jednakowymi sprężynami, natomiast masy kul:

- po prawej stronie, dla  $n \geq 0$ , masy kul są jednakowe i równe 1;
- po lewej stronie, dla  $n \leq -b$ , masy kul są jednakowe i równe 0,25. Zakładając będziemy dla uproszczenia, że  $b$  jest całkowite.
- w środkowym obszarze przejściowym masy zmieniają się płynnie pomiędzy skrajnymi wartościami. W obliczeniach numerycznych przyjęto masy opisane poniższym wzorem (wykres widoczny jest w górnej części rys. 5):

$$m_n = 0,25 + 0,375 \left[ 1 + \cos \left( \frac{\pi}{b} n \right) \right]. \quad (10)$$

Nawias tej funkcji jest równy 2 dla  $n = 0$ , a równy zero dla  $n = -b$ . Jeżeli położymy  $b = 1$ , obszar przejściowy zniknie.



Rys. 3.

### Równania ruchu

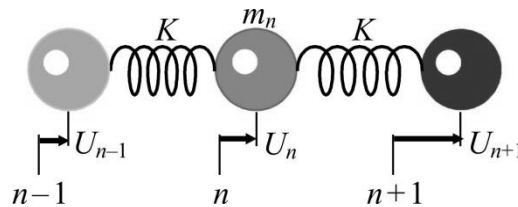
Ruch kul naszego modelu opisują równania Newtona

$$F_n = m_n a_n, \quad (11)$$

gdzie  $F_n$  oznacza siłę działającą na  $n$ -tą kulę,  $m_n$  masę tej kuli, a  $a_n$  jej przyspieszenie.

- Niech  $U_n$  oznacza wychylenie  $n$ -tej kuli z położenia równowagi  $n$  (rys. 4). Przyspieszenie  $a_n$  jest drugą pochodną  $U_n$  względem czasu, czyli:

$$a_n = \frac{d^2 U_n(t)}{dt^2}. \quad (12)$$



Rys. 4.

- Siła działająca na  $n$ -tą kulę zależy od wychyleń trzech kul:  $U_n$ ,  $U_{n-1}$  i  $U_{n+1}$ . Jest ona różna od zera wtedy, kiedy lewa sprężyna ma inną długość, niż

sprężyna prawa. Kula prawa działa na kulę środkową siłą proporcjonalną do wydłużenia sprężyny:

$$F_p = K(U_{n+1} - U_n); \quad (13)$$

gdzie  $K$  jest współczynnikiem sprężystości każdej ze sprężyn. Podobnie kula lewa działa na środkową siłą:

$$F_l = K(U_{n-1} - U_n). \quad (14)$$

Ich wypadkowa jest więc równa:

$$F_n = K(U_{n+1} - U_n) + K(U_{n-1} - U_n) = K(U_{n+1} + U_{n-1} - 2U_n). \quad (15)$$

Podstawmy wzory (12) i (15) do (11) i podzielmy od razu obie strony przez  $K$ . Dostajemy układ powiązanych ze sobą równań, opisujących ruch kul:

$$U_{n+1}(t) + U_{n-1}(t) - 2U_n(t) = \frac{m_n}{K} \frac{d^2 U_n(t)}{dt^2}. \quad (16)$$

### Fale harmoniczne

Ograniczmy się teraz do fal harmonicznycch o określonej częstotliwości kołowej  $\omega$ . W takim przypadku każda z kul porusza się ruchem periodycznym, który można opisać funkcją:

$$U_n(t) = A_n \cos(\omega t + \varphi_n). \quad (17)$$

Nieujemna wielkość  $A_n$  oznacza amplitudę, a  $\varphi_n$  fazę tego ruchu.

Korzystając ze wzoru na sumę cosinusów wyrażenie to możemy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} U_n(t) &= A_n \cos(\omega t + \varphi_n) = A_n [\cos(\omega t) \cos(\varphi_n) - \sin(\omega t) \sin(\varphi_n)] = \\ &= [A_n \cos(\varphi_n)] \cos(\omega t) + [-A_n \sin(\varphi_n)] \sin(\omega t) = C_n \cos(\omega t) + S_n \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (18)$$

Wprowadziliśmy w tym wzorze wielkości

$$C_n = A_n \cos(\varphi_n), \quad (19)$$

$$S_n = -A_n \sin(\varphi_n). \quad (20)$$

Zauważmy przy okazji, że  $(\cos^2 \varphi_n + \sin^2 \varphi_n = 1)$ :

$$A_n = \sqrt{C_n^2 + S_n^2}. \quad (21)$$

Podstawmy wyrażenie (18) do (16). Dostajemy:

$$\begin{aligned} (C_{n+1} + C_{n-1} - 2C_n) \cos(\omega t) + (S_{n+1} + S_{n-1} - 2S_n) \sin(\omega t) = \\ = -\frac{m_n}{K} \omega^2 C_n \cos(\omega t) - \frac{m_n}{K} \omega^2 S_n \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (22)$$

W równaniu tym muszą być równe po obu stronach odpowiednio współczynniki przy  $\cos \omega t$  i przy  $\sin \omega t$ , bo są to dwie funkcje liniowo niezależne. Prowadzi to do dwóch równań o identycznej postaci:

$$C_{n+1} + C_{n-1} - 2C_n = -\frac{m_n}{K} \omega^2 C_n, \quad (23)$$

$$S_{n+1} + S_{n-1} - 2S_n = -\frac{m_n}{K} \omega^2 S_n. \quad (24)$$

Pierwsze z nich wiąże ze sobą tylko wielkości  $C_n$ , a drugie tylko wielkości  $S_n$ .

### Jednakowe masy: rozwiązanie analityczne

Jeżeli wszystkie masy kul  $m_n$  są jednakowe, równanie (23) ma proste rozwiązanie analityczne, odpowiadające fali stojącej w układzie:

$$C_n = \cos(qn). \quad (25)$$

Wielkość  $q = \frac{2\pi}{\lambda}$ , gdzie  $\lambda$  oznacza długość fali wyrażoną w jednostce równej odległości między kulami, znajdującymi się w położeniach równowagi.

Podstawiając (16) do lewej strony (14) otrzymujemy – stosując wzory na sumę cosinusów i na kwadrat sinusa:

$$\begin{aligned} \cos[q(n+1)] + \cos[q(n-1)] - 2\cos(qn) &= 2\cos(qn)\cos(q) - 2\cos(qn) = \\ &= 2[\cos(q) - 1]\cos(qn) = -4\sin^2\left(\frac{q}{2}\right)\cos(qn). \end{aligned} \quad (26)$$

Wstawiając ten wynik oraz (16) do (14) otrzymujemy:

$$-4\sin^2\left(\frac{q}{2}\right)\cos(qn) = -\frac{m_n}{K} \omega^2 \cos(qn). \quad (27)$$

Skróćmy to wyrażenie przez  $-\cos(qn)$ . Dostaniemy związek pomiędzy  $q$  a  $\omega$ :

$$\sin^2\left(\frac{q}{2}\right) = \frac{m_n}{4K} \omega^2, \quad (28)$$

czyli

$$\sin\left(\frac{q}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m_n}{K}} \omega. \quad (29)$$

Związek ten podawany jest przy omawianiu drgań sieci krystalicznej w każdym elementarnym podręczniku fizyki ciała stałego.

Załóżmy jeszcze, że  $q$  jest małe, czyli długość fali w ośrodku jest znacznie większa od odległości między kulami (patrz też dalej, rys. 5). Możemy wtedy zastosować przybliżenie  $\sin x \approx x$ , co prowadzi do równości:

$$q = \sqrt{\frac{m_n}{K}} \omega. \quad (30)$$

Powróćmy do naszego zagadnienia i zauważmy: masy  $m_n$  w obszarze lewym są cztery razy mniejsze, niż w obszarze prawym. Wynika stąd w naszym przybliżeniu, że wartość  $q$  w obszarze lewym jest dwa razy mniejsza, niż w obszarze prawym. A więc długość fali w obszarze lewym jest dwa razy większa, niż w obszarze prawym. Oznacza to, że współczynnik załamania jest równy 2.

Czytelnik może sprawdzić samodzielnie, że rozwiązania równania (15) można poszukiwać w postaci

$$S_n = \sin(qn). \quad (31)$$

Prowadzi to ponownie do związków (29) i (30).

### Niejednakowe masy, algorytm obliczeń numerycznych

Jeżeli masy kul nie są równe, można wyznaczyć wielkości  $C_n$  i  $S_n$  numerycznie. Wielkości  $C_n$  wyznaczymy następująco:

1. Przyjmiemy, że obszar prawy odpowiada  $n \geq 0$ . W obszarze tym przyjmiemy dla  $C_n$  rozwiązanie (25), w którym  $q$  wyrazimy przez  $\omega$  wzorem (30).
2. Dla obszaru lewego i przejściowego, czyli dla  $n < 0$ , wzór (23) potraktujemy jako podstawę algorytmu obliczenia numerycznego, w którym kolejne  $C_{n-1}$  będziemy wyrażać przez  $C_n$  i  $C_{n+1}$  (wędrujemy od  $n = 0$  w lewo):

$$C_{n-1} = \left( 2 - \frac{m_n}{K} \omega^2 \right) C_n - C_{n+1}. \quad (32)$$

W algorytmie tym trzeba przyjąć dwie wielkości wyjściowe, czyli  $C_0$  i  $C_1$ . Obliczymy je ze wzoru (25), obowiązującego dla obszaru prawego. Wielkości

te są więc odpowiednio równe  $C_0 = 1$  i  $C_1 = \cos\left(\sqrt{\frac{m_n}{K}} \omega\right)$ .

Podobnie obliczymy wielkości  $S_n$ .

1. Przyjmiemy dla obszaru prawego  $n \geq 0$  rozwiązanie (31), w którym  $q$  wyrazimy przez  $\omega$  wzorem (30).
2. Natomiast dla obszaru lewego i przejściowego wzór (24) potraktujemy jako podstawę algorytmu

$$S_{n-1} = \left( 2 - \frac{m_n}{K} \omega^2 \right) S_n - S_{n+1}. \quad (33)$$

W algorytmie tym do obliczenia  $S_0$  i  $S_1$  zastosujemy wzór (31). Wielkości te są więc odpowiednio równe  $S_0 = 0$  i  $S_1 = \sin\left(\sqrt{\frac{m_n}{K}} \omega\right)$ .

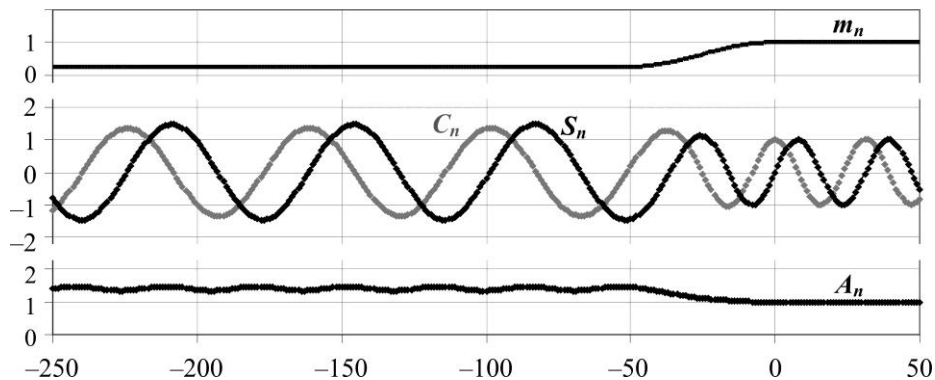
### Wyniki obliczeń numerycznych

Szczegółowe obliczenia numeryczne znajdują się w excelowskim pliku [zmiennie n](#). W programie tym przyjęto  $K = 1$ ,  $\omega = 0,2$ . Można w nim dowolnie zmieniać szerokość obszaru przejściowego, czyli  $b$ .

Przytoczmy tu przykładowe wyniki dla  $b = 50$  (rys. 5).

1. Krzywa górna przedstawia zależność  $m_n$  od  $n$ . Zgodnie z wyjściową umową w prawej części  $m_n = 1$ , w lewej  $m_n = 0,25$ .
2. Zależności obliczonych  $C_n$  i  $S_n$  od  $n$  przedstawiają krzywe – odpowiednio szara i czarna – w środkowej części rys. 5. Zauważamy, że w obu przypadkach długość fali w obszarze lewym jest dwa razy większa niż w obszarze prawym, czego należało oczekiwać na podstawie wzoru (31). W obszarze przejściowym płynnie zmieniają się zarówno długość fali, jak i jej amplituda.

Krzywą dolną przedyskutujemy poniżej.



Rys. 5.

### Uzyskane fale stojące

Powróćmy do wzoru (19). Wyrażenia  $C_n \cos(\omega t)$  dla różnych  $n$ , z obliczonymi powyżej wartościami  $C_n$ , odpowiadają pewnej fali stojącej. Jest ona trochę różna od typowo omawianej w szkole, bo jej długość fali zmienia się od miejsca do miejsca. Ponadto różne są amplitudy drgań w różnych strzałkach. „Przyzwoicie” zachowuje się tylko w obszarach skrajnych, w których masy kul  $m_n$  są stałe. Niemniej zależność czasową w każdym punkcie opisuje ta sama funkcja:  $\cos \omega t$ . Podobny charakter ma i człon  $S_n \sin \omega t$ , jego ruch jest w stosunku do zależności poprzedniej przesunięty w fazie o  $\frac{1}{4}$  okresu.



### Budujemy falę biegnącą

Nas jednak właściwie interesowało coś innego: oczekiwaliśmy, że w obszarze prawym powinna istnieć tylko fala biegnąca w prawo (por. rozważania na początku artykułu). Dopuszczaliśmy przy tym możliwość, że w obszarze lewym będzie istniała i biegnąca w prawo fala padająca i biegnąca w lewo fala odbita – które w sumie dają falę „półstojącą”.

Takie rozwiązanie możemy sobie zbudować z fal omówionych powyżej. Musimy tylko zauważyć, że falę biegnącą można uzyskać przez superpozycję fal stojących. Napiszmy wzór na falę biegnącą w prawo w obszarze prawym i zastosujmy do niego wzór na cosinus sumy:

$$U_n(t) = A \cos(qn - \omega t) = A \cos(qn) \cos(\omega t) + A \sin(qn) \sin(\omega t). \quad (34)$$

We wzorze tym amplituda  $A$  nie zależy od  $n$ . Utwórzmy zatem we wszystkich obszarach funkcję

$$U_n(t) = C_n \cos \omega t + S_n \sin \omega t. \quad (35)$$

1. W obszarze prawym  $C_n = A \cos(qn)$  (wzór 25). W pozostałych obszarach „doczepiliśmy” do tego cosinusa wielkości  $C_n$  obliczone numerycznie.
2. Podobnie w obszarze lewym  $S_n = A \sin(qn)$  (wzór 31), w pozostałych – znamy  $S_n$  z obliczeń numerycznych.

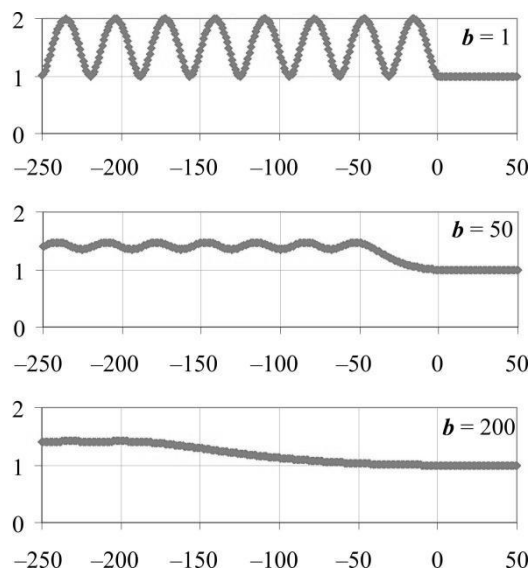
Na podstawie wzoru (34) widzimy, że kombinacja (35) daje w prawym obszarze falę biegnącą w prawo o amplitudzie jednostkowej.

Musimy się zastanowić, jaka jest ta fala w pozostałych obszarach. Możemy na to pytanie odpowiedzieć, obliczając zależność amplitudy fali od  $n$ , posługując się wyrażeniem  $A_n = \sqrt{C_n^2 + S_n^2}$  (21). Jeżeli mamy do czynienia z falą „półstojącą”, amplituda ta nie powinna być stała, ale quasi-periodycznie zależeć od  $n$ . Przedstawia to dolny wykres na rys. 5. W prawym obszarze przyjęta została amplituda  $A = 1$ . Widać, że dla  $b = 50$  wyraźnie widoczne są „zafalowania”.

Rysunek 6 przedstawia już tylko zależności amplitudy  $A_n$  od  $n$  dla trzech wartości parametru  $b$ .

1. Dla  $b = 1$  nie ma obszaru przejściowego, masy dla  $n \geq 0$  mają wartość równą 1, dla  $n < 0$  wartość równą 0,25. Zgodnie z tym, czego należało oczekiwać, amplituda dla  $n < 0$  zmienia się w funkcji  $n$  pomiędzy 1 i 2 (patrz wyżej, rozważania dla ośrodków ciągłych). Oznacza to, że w omawianym przypadku pojawiła się fala odbita.
2. Dla  $b = 50$  zafalowanie jest słabsze, ale jeszcze wyraźnie widoczne.
3. Dla  $b = 200$  zafalowanie jest już tylko ledwo widoczne. Oznacza to, że dla tak szerokiego obszaru prawie nie pojawia się fala odbita, czyli osiągnęliśmy sytuację (b) z rozważań wstępnych. Sięgając do programu komputerowego łatwo stwierdzić, że w obszarze przejściowym mieści się około 5 „zmiennych” długości fali.

Czytelnik może problem prześledzić szczegółowo, zmieniając dowolnie parametr  $b$  w programie komputerowym *Zmienne n*.



Rys. 6.

### Podsumowanie

Znaleźliśmy numerycznie odpowiedź na pytanie postawione na początku artykułu. Stwierdziliśmy, że odbicie fali znika, jeżeli grubość płynnej warstwy przejściowej jest rzędu 10 długości fali. Oznacza to – w języku znanym z mechaniki kwantowej – przejście do sytuacji, w której można stosować przybliżenie WKB.

Jak zawsze w obliczeniach numerycznych wynik ten zależy od zespołu wybranych parametrów. Rozszerzenie ich zakresu pozostawiamy inwencji Czytelnika.