Momenty bezwładności bez całek

Witold Zawadzki

Panuje przekonanie, że do obliczania momentów bezwładności brył konieczna jest znajomość rachunku całkowego. Okazuje się jednak, że momenty bezwładności wielu brył można obliczyć nie używając całek, czego dowodem niech będą poniższe przykłady. Przydatna będzie natomiast znajomość następujących twierdzeń:

1. moment bezwładności bryły jest wielkością addytywną (tzn. moment bezwładności bryły jest sumą momentów bezwładności części, na które daną bryłę można rozłożyć);
2. twierdzenie Steinera, które mówi: jeśli moment bezwładności bryły o masie m względem osi przechodzącej przez środek masy ciała wynosi I_0, to moment bezwładności tej bryły względem osi równoległej do danej osi i odległej od niej o d jest równy $I = I_0 + md^2$;
3. moment bezwładności większości brył można zapisać (analiza wymiarowa) w postaci: $I = k \cdot m \cdot l^2$, gdzie: m to masa bryły, l – charakterystyczny wymiar bryły (np. długość, promień), k to bezwymiarowy współczynnik zależny tylko od kształtu bryły i wyboru charakterystycznego wymiaru (np. promień czy średnica), a niezależny od wielkości bryły. Zaprezentowana idea obliczania momentów bezwładności polega na obliczeniu właśnie współczynnika k.

Analiza wymiarowa
Analiza wymiarowa jest narzędziem powszechnie stosowanym w fizyce, chemii oraz inżynierii. Opiera się na założeniu, że wszystkie wielkości fizyczne można wyrazić jako kombinacje wielkości podstawowych, tj. masy (m), długości (l), czasu (t) itd. Każde równanie wiążące wielkości fizyczne musi być wymiarowo spójne, tzn. wymiar prawej strony musi być taki sam jak wymiar lewej strony równania.
W odniesieniu do momentu bezwładności, którego jednostką jest kg·m^2, oznacza to, że jedyną możliwą kombinacją masy oraz wymiarów bryły, dającą prawidłowa jednostkę momentu bezwładności jest $m \cdot l^2$.

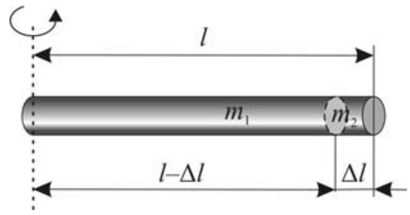
Zatem do dzieła!

1. Na początek – coś prostego!

Obliczymy moment bezwładności cienkiego pręta o znanej masie m i długości l, gdy oś obrotu jest do niego prostopadła i przechodzi przez jeden z jego końców. Zgodnie z tw. 3, możemy zapisać:

$$I = k \cdot m \cdot l^2 .$$

Przetnijmy „myślowo” nasz pręt w bardzo małej odległości Δl od jego końca nie leżącego na osi obrotu (rys. 1).



Rys. 1.

Korzystając z tw. 1 moment bezwładności całego pręta możemy zapisać w postaci sumy momentu bezwładności pręta o długości $l - \Delta l$ i masie m_1 oraz cienkiego plasterka (który możemy potraktować jako punkt materialny o masie m_2) znajdującego się w odległości $l - \Delta l/2$ od osi obrotu ([1]):

$$I = k \cdot m_1 \cdot (l - \Delta l)^2 + m_2 \cdot \left(l - \frac{\Delta l}{2}\right)^2.$$

Jak widać, w pierwszym składniku występuje ten sam, szukany współczynnik k, charakterystyczny dla cienkiego pręta. Masy m_1 i m_2 obliczamy z proporcji:

$$\frac{m_1}{m} = \frac{l - \Delta l}{l}, \quad \frac{m_2}{m} = \frac{\Delta l}{l}.$$

Mamy zatem

$$I = k \cdot m \frac{(l - \Delta l)^3}{l} + m \frac{\Delta l}{l} \cdot \left(l - \frac{\Delta l}{2}\right)^2 =$$

$$= k \cdot m \frac{l^3 - 3l^2 \Delta l + 3l(\Delta l)^2 - (\Delta l)^3}{l} + m \frac{\Delta l}{l} \cdot \left(l^2 - l\Delta l + \frac{(\Delta l)^2}{4}\right).$$

„Odcięty” kawałek pręta jest bardzo krótki ($\Delta l \ll l$), zatem w powyższym wyrażeniu możemy pominąć wyrazy mniejsze niż Δl, czyli te z $(\Delta l)^2$ itd.:

$$I = k \cdot m \frac{l^3 - 3l^2 \Delta l}{l} + m \frac{\Delta l}{l} \cdot l^2 = k \cdot m(l^2 - 3l\Delta l) + m \cdot l\Delta l =$$

$$= kml^2 - 3kml\Delta l + ml\Delta l = kml^2 + (1 - 3k)ml\Delta l$$

Przyrównując otrzymane wyrażenie z założonym $I = k \cdot m \cdot l^2$, otrzymujemy równanie:

$$kml^2 = kml^2 + (1 - 3k)ml\Delta l,$$

[1] Przyjęcie odległości odciętego kawałka pręta od osi obrotu równej l zamiast $l–\Delta l/2$ nie zmieni końcowego wyniku, a uprości obliczenia.

które przy dowolnie małym, lecz niezerowym Δl jest spełnione tylko wtedy, gdy $1 - 3k = 0$, czyli $k = 1/3$. Zatem moment bezwładności cienkiego pręta względem osi obrotu prostopadłej do niego i przechodzącej przez jeden z jego końców wyraża się wzorem

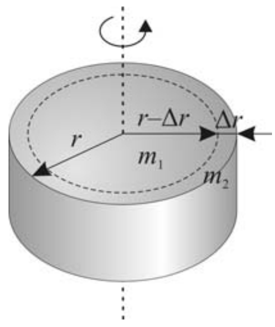
$$I = \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2 .$$

2. Coś okrągłego

Obliczymy moment bezwładności walca o znanej masie m i promieniu r, względem osi symetrii. Moment bezwładności punktu materialnego zależy od odległości od osi obrotu, zatem moment bezwładności walca zależy od jego promienia r, a nie zależy od jego długości (wysokości)[2]. Zgodnie z tw. 3, możemy zatem zapisać

$$I = k \cdot m \cdot r^2 .$$

Podzielmy „myślowo” nasz walec na cienkościenną rurę oraz walec o zmniejszonym promieniu (rys. 2).



Rys. 2.

Korzystając z tw. 1 moment bezwładności całego walca możemy zapisać jako sumę momentu bezwładności mniejszego walca o promieniu $r - \Delta r$ i masie m_1 oraz rury o grubości Δr, promieniu $r - \Delta r/2 \approx r$ i masie m_2.

$$I = k \cdot m_1 \cdot (r - \Delta r)^2 + m_2 \cdot r^2 .$$

Masy obu części jak poprzednio obliczamy z proporcji:

$$\frac{m_1}{m} = \frac{\pi (r - \Delta r)^2}{\pi r^2} = \frac{(r - \Delta r)^2}{r^2}, \quad \frac{m_2}{m} = \frac{2\pi r \Delta r}{\pi r^2} = \frac{2\Delta r}{r} .$$

Mamy zatem:

[2] Przy założeniu niezmiennej masy m walca.

$$I = k \cdot m \frac{(r-\Delta r)^2}{r^2}(r-\Delta r)^2 + m\frac{2\Delta r}{r}r^2 = k \cdot m \frac{(r-\Delta r)^4}{r^2} + 2mr\Delta r$$

Podobnie, jak w poprzednim zadaniu pomijamy wyrazy wyższej potęgi Δr i otrzymujemy:

$$I = k \cdot m(r^2 - 4r\Delta r) + 2mr\Delta r = kmr^2 - 4kmr\Delta r + 2mr\Delta r = kmr^2 + (2-4k)mr\Delta r\ .$$

Przyrównując otrzymane wyrażenie z założonym $I = k \cdot m \cdot r^2$, otrzymujemy równanie

$$kmr^2 = kmr^2 + (2-4r)mr\Delta r\ ,$$

które przy dowolnie małym, lecz niezerowym Δr jest spełnione tylko wtedy, gdy $2 - 4k = 0$, czyli $k = 1/2$. Zatem moment bezwładności walca (oraz płaskiego krążka) względem osi symetrii wyraża się wzorem

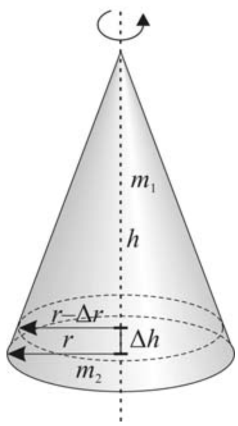
$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2\ .$$

3. Pora na stożek

Obliczymy moment bezwładności stożka o znanej masie m, wysokości h i promieniu podstawy r, względem osi symetrii. Jak poprzednio, moment bezwładności stożka zależy od jego promienia r, a nie zależy bezpośrednio od jego wysokości. Zgodnie z tw. 3, możemy zatem zapisać

$$I = k \cdot m \cdot r^2\ .$$

Odetnijmy „myślowo" od naszego stożka cienki plasterek, równoległy do podstawy (rys. 3).



Rys. 3.

Korzystając z tw. 1 moment bezwładności całego stożka możemy zapisać jako sumę momentu bezwładności mniejszego stożka o promieniu $r_1 = r - \Delta r$ i masie m_1 oraz krążka o grubości Δh, promieniu $r - \Delta r/2 \approx r$ i masie m_2:

$$I = k \cdot m_1 \cdot r_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \cdot r^2 .$$

Oba stożki są bryłami podobnymi ($\Delta r/r = \Delta h/h$), a stosunek ich objętości (również mas), jest równy trzeciej potędze skali podobieństwa (równej r_1/r):

$$\frac{m_1}{m} = \frac{r_1^3}{r^3} = \frac{(r - \Delta r)^3}{r^3} .$$

Stosunek masy krążka do masy stożka jest równy ilorazowi objętości tych brył, zatem:

$$\frac{m_2}{m} = \frac{\pi r^2 \Delta h}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \frac{3\Delta h}{h} = \frac{3\Delta r}{r} .$$

Mamy zatem:

$$I = k \cdot m \frac{(r - \Delta r)^3}{r^3} \cdot (r - \Delta r)^2 + \frac{1}{2} m \frac{3\Delta r}{r} \cdot r^2 = k \cdot m \frac{(r - \Delta r)^5}{r^3} + \frac{3}{2} m \cdot r\Delta r .$$

Podobnie, jak w poprzednim zadaniu pomijamy wyrazy wyższe potęgi Δr i otrzymujemy:

$$I = k \cdot m(r^2 - 5r\Delta r) + \frac{3}{2} mr\Delta r = kmr^2 - 5kmr\Delta r + \frac{3}{2} mr\Delta r =$$
$$= kmr^2 + \left(\frac{3}{2} - 5k\right) mr\Delta r.$$

Przyrównując otrzymane wyrażenie z założonym $I = k \cdot m \cdot r^2$, otrzymujemy równanie

$$kmr^2 = kmr^2 + \left(\frac{3}{2} - 5k\right) mr\Delta r ,$$

które przy dowolnie małym, lecz niezerowym Δr jest spełnione tylko wtedy, gdy $3/2 - 5k = 0$, czyli $k = 3/10$. Zatem moment bezwładności stożka względem osi symetrii wyraża się wzorem

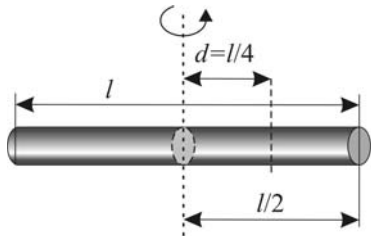
$$I = \frac{3}{10} \cdot m \cdot r^2 .$$

4. Cienki pręt po raz drugi

Obliczymy moment bezwładności cienkiego pręta o znanej masie *m* i długości *l*, gdy oś obrotu jest do niego prostopadła i przechodzi przez środek pręta. Zgodnie z tw. 3, możemy zapisać

$$I = k \cdot m \cdot l^2 .$$

Przetnijmy „myślowo” nasz pręt w połowie długości (rys. 4).



Rys. 4.

Korzystając z tw. 1 moment bezwładności całego pręta względem jego osi symetrii jest dwa razy większy od momentu bezwładności jednej połówki względem osi symetrii całego pręta. Oś symetrii każdej z połówek jest oddalona od osi obrotu o $d = l/4$. Korzystając z twierdzenia Steinera możemy napisać:

$$I = 2 \cdot \left[k \cdot \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{l}{4}\right)^2 \right] = \frac{1}{4} kml^2 + 16ml^2 .$$

Jak widać, w pierwszym składniku występuje ten sam, szukany współczynnik *k*, charakterystyczny dla pręta. Przyrównując otrzymane wyrażenie z założonym $I = k \cdot m \cdot l^2$, otrzymujemy równanie

$$kml^2 = \frac{1}{4} kml^2 + 16ml^2 ,$$

którego rozwiązaniem jest k=1/12. Zatem moment bezwładności cienkiego pręta względem osi obrotu prostopadłej do niego i przechodzącej przez jego środek wyraża się wzorem

$$I = \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2 .$$

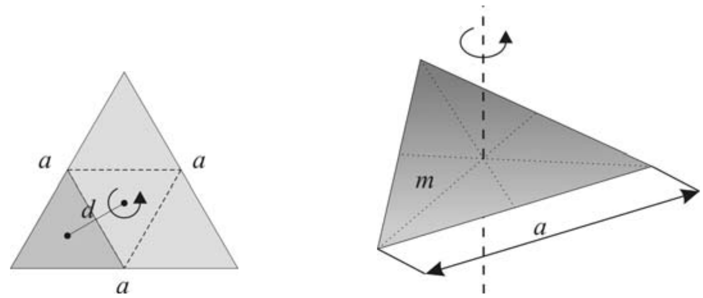
5. Figury płaskie – trójkąt

Obliczymy moment bezwładności figury płaskiej – trójkąta równobocznego o znanej masie *m* i boku o długości *a*, gdy oś obrotu jest do niego prostopadła i przechodzi przez środek masy trójkąta. Zgodnie z tw. 3 (patrz s. 32, możemy zapisać:

$$I = k \cdot m \cdot a^2 .$$

Przetnijmy „myślowo" nasz trójkąt na 4 mniejsze trójkąty (rys. 5). Środek jednego z nich znajduje się na osi obrotu, a środki trzech pozostałych trójkątów w odległości

$$d = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$



Rys. 5.

Korzystając z tw. 1 zapisujemy moment bezwładności całego trójkąta jako sumę momentów bezwładności małych trójkątów (dla trzech z nich stosujemy dodatkowo twierdzenie Steinera).

$$I = k\cdot\frac{m}{4}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 3\cdot\left[k\cdot\frac{m}{4}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{m}{4}\cdot\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2\right] =$$
$$= \frac{1}{16}kma^2 + 3\cdot\left[\frac{1}{16}kma^2 + \frac{1}{48}md^2\right] = \frac{1}{4}kma^2 + \frac{1}{16}ma^2.$$

Znowu w pierwszym składniku występuje szukany współczynnik k. Przyrównując otrzymane wyrażenie z założonym $I = k\cdot m\cdot l^2$, otrzymujemy równanie

$$kma^2 = \frac{1}{4}kma^2 + \frac{1}{16}ma^2,$$

którego rozwiązaniem jest $k = 1/12$. Zatem moment bezwładności trójkąta równobocznego względem osi obrotu prostopadłej do niego i przechodzącej przez środek jego masy wyraża się wzorem

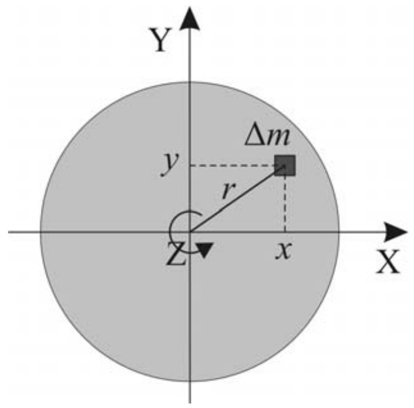
$$I = \frac{1}{12}\cdot m\cdot a^2.$$

6. Krążek

Wiemy już, że moment bezwładności walca oraz płaskiego krążka względem prostopadłej do niego osi przechodzącej przez środek wyraża się wzorem:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 .$$

Obliczymy teraz moment bezwładności tego krążka, ale niech osią obrotu będzie prosta zawierająca średnicę. Przyjmijmy układ współrzędnych jak na rys. 6.



Rys. 6.

Odległość małego elementu masy Δm od osi X jest równa $|y|$, a od osi Y – $|x|$, zatem moment bezwładności tego elementu względem osi Y wynosi $\Delta m{\cdot}y^2$, a względem osi Y – $\Delta m{\cdot}x^2$. Na mocy twierdzenia Pitagorasa suma $x^2+y^2=r^2$ jest kwadratem odległości r tego elementu od punktu (0,0) (czyli od osi OZ), zatem suma $\Delta mx^2 + \Delta m{\cdot}y^2 = \Delta m{\cdot}(x^2+y^2)$ jest momentem bezwładności tego elementu względem osi Z, czyli rozważanej wcześniej osi obrotu. Sumując te elementarne momenty bezwładności po całej powierzchni figury, otrzymujemy całkowite momenty bezwładności figury: I_X względem osi X, I_Y względem osi Y oraz I_Z – względem osi Z. Analiza ta prowadzi do stwierdzenia (ogólnego dla figur płaskich i trzech wzajemnie prostopadłych osi obrotu), że

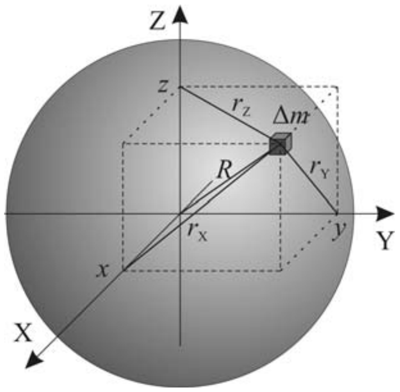
$$I_X + I_Y = I_Z .$$

Po tym „wstępie teoretycznym" wróćmy do obliczenia momentu bezwładności krążka. Z udowodnionego przed chwilą twierdzenia wynika, że w naszym przypadku $I_X + I_Y = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$. Skoro $I_X = I_Y$, to moment bezwładności krążka względem jego średnicy wynosi

$$I_X = I_Y = \frac{1}{4} \cdot m \cdot r^2 .$$

7. Sfera (powłoka kulista)

Obliczmy moment bezwładności cienkiej powłoki kulistej o promieniu R względem prostej przechodzącej przez jej środek. Przyjmijmy układ współrzędnych jak na rys. 7.



Rys. 7.

Kwadrat odległości małego elementu masy Δm od osi X określa równanie ${r_X}^2 = y^2 + z^2$, od osi Y: ${r_Y}^2 = x^2 + z^2$, a od osi Z: ${r_Z}^2 = x^2 + y^2$, zatem moment bezwładności tego elementu względem osi Y wynosi $\Delta m \cdot {r_X}^2 =$ $\Delta m(y^2 + z^2)$, względem osi Y – $\Delta m \cdot {r_Y}^2 = \Delta m(x^2 + z^2)$, a osi Z wynosi $\Delta m \cdot {r_Z}^2 = \Delta m(x^2 + y^2)$. Suma $x^2+y^2+z^2=r^2$ jest kwadratem odległości r elementu Δm od początku układu współrzędnych, czyli od środka sfery, mamy więc:

$$\Delta m(y^2 + z^2) + \Delta m(x^2 + z^2) + \Delta m(x^2 + y^2) = 2\Delta m(x^2 + y^2 + z^2) = 2\Delta m \cdot R^2 .$$

W celu obliczenia momentu bezwładności „wysumujmy” przyczynki w powyższym równaniu po całej objętości naszej powłoki kulistej. Z lewej strony równania otrzymujemy sumę momentów bezwładności względem trzech kierunków, ale z racji symetrii zagadnienia stanowi to po prostu $3I_{\text{sfery}}$. Z sumowania prawej strony równania otrzymujemy natomiast $2m \cdot R^2$. A zatem mamy: $3I_{sfery} = 2m \cdot R^2$, a zatem:

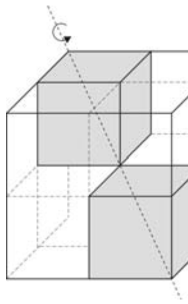
$$I_{sfery} = \frac{2}{3} m \cdot R^2 .$$

8. Sześcian

A teraz prawdziwa „perełka” wśród zadań: obliczyć moment bezwładności sześcianu o krawędzi długości a i masie m, względem osi obrotu zawierającej przekątną sześcianu.

Przy rozwiązaniu tego zadania skorzystamy z trzech twierdzeń przedstawionych na początku artykułu. Zapisujemy więc moment bezwładności sześcianu wzorem $I = k \cdot m \cdot a^2$, w którym k jest znowu szukanym współczynnikiem. Rozkładamy sześcian na 8 mniejszych sześcianów, każdy o krawędzi $a/2$ i masie $m/8$ tak, jak to przedstawiono na rys. 8. Moment bezwładności każdego z tych sześcianów względem jego przekątnej jest równy

$$k \cdot \frac{m}{8} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{32} k \cdot m \cdot a^2 .$$



Rys. 8.

Przekątne dwóch (zaznaczonych na rys. 8) spośród ośmiu sześcianów zawarte są w przekątnej „dużego" sześcianu. Przekątne pozostałych 6 sześcianów równoległe do przekątnej „dużego" sześcianu leżą od tej przekątnej w odległości $a\sqrt{6}/6$ (2/3 wysokości trójkąta równobocznego o boku równym $a\sqrt{2}/2$). Na podstawie twierdzenia Steinera oraz twierdzenia o sumowaniu momentów bezwładności mamy:

$$I = 2 \cdot \frac{1}{32} k \cdot m \cdot a^2 + 6 \cdot \left(\frac{1}{32} k \cdot m \cdot a^2 + \frac{1}{8} m \cdot \left(\frac{a\sqrt{6}}{6} \right)^2 \right)$$

$$I = \frac{8}{32} k \cdot m \cdot a^2 + \frac{6}{8} m \cdot \frac{a^2}{6} = \frac{1}{4} k \cdot m \cdot a^2 + \frac{1}{8} m \cdot a^2$$

Porównując otrzymane wyrażenie z założoną postacią wzoru na moment bezwładności całego sześcianu otrzymujemy równanie

$$k \cdot m \cdot a^2 = \frac{1}{4} k \cdot m \cdot a^2 + \frac{1}{8} m \cdot a^2 .$$

Rozwiązujemy je, otrzymujemy kolejno:

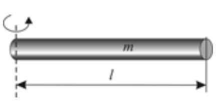
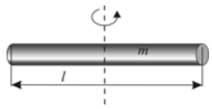
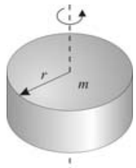
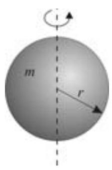
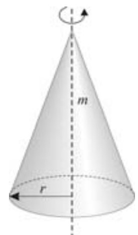
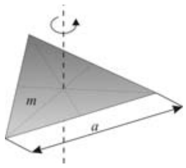
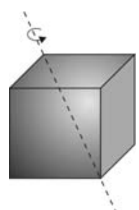
$$\frac{3}{4} k \cdot m \cdot a^2 = \frac{1}{8} m \cdot a^2$$

$$\frac{3}{4}k = \frac{1}{8}$$

$$k = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{6}$$

Zatem moment bezwładności wspomnianego sześcianu wyraża się wzorem $I = \frac{1}{6} \cdot m \cdot a^2$. Przedstawione przykłady dowodzą, że do obliczania momentów bezwładności wielu brył lub figur płaskich nie jest konieczna znajomość rachunku całkowego, przy czym w powyższych rozwiązaniach występują oczywiście pewne jego elementy (np. nieskończenie mały element masy, sumowanie po całej bryle). Wystarczy dobra wyobraźnia przestrzenna oraz znajomość analizy wymiarowej i podstawowych twierdzeń o momencie bezwładności.

Otrzymane wyniki można sprawdzić stosując zwykłe całkowanie. Powyższe zadania można potraktować jako wstęp do rachunku różniczkowego i całkowego.

Pręt  $I = \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2$	Pręt  $I = \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2$
Walec  $I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$	Krążek  $I = \frac{1}{4} \cdot m \cdot r^2$
Powłoka kulista  $I = \frac{2}{3} \cdot m \cdot r^2$	Stożek  $I = \frac{3}{10} \cdot m \cdot r^2$
Trójkąt  $I = \frac{1}{12} \cdot m \cdot a^2$	Sześcian  $I = \frac{1}{6} \cdot m \cdot a^2$