Fraktale

Studenci: Marcin Figiel, Tomasz Sabała
Pod opieką prof. dr. hab. Macieja A. Nowaka
Instytut Fizyki UJ

1. Abstrakt i motywacja

Fraktale to obiekty matematyczne spotykane nie tylko w książkach, ale także w otaczającym nas świecie. Szczególnie w przyrodzie. Udzielimy odpowiedzi na pytania: *Czym są fraktale? Jakie są najważniejsze ich cechy?* Przedstawimy również fraktale za pomocą liczb zespolonych, tzw. zbiory Julii. Pokażemy, jak praktycznie tworzy się fraktale oraz w jaki sposób dzięki nim można symulować wzrost.

Celem tego artykułu było ukazanie piękna matematyki. Uświadomienie, że otaczająca nas rzeczywistość mimo pozornego nieuporządkowania ma w sobie ukrytą, niedostrzegalną na pierwszy rzut oka, harmonię.

2. Fraktale

2.1. Samopodobieństwo

Wyobraźmy sobie obiekt, którego każda nawet najmniejsza część w odpowiednim powiększeniu przypomina wyjściową całość. To tylko pozornie zadanie bardzo trudne i abstrakcyjne. Dobrym przykładem takiego obiektu jest kalafior, jeden z najbardziej samopodobnych tworów przyrody.

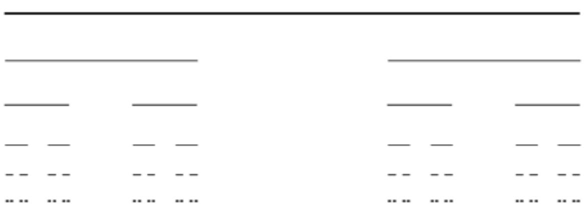
Rys. 1. Kalafior podzielony na coraz mniejsze bardzo podobne do siebie fragmenty

Oderwana gałązka kalafiora po odpowiednim powiększeniu łudząco przypomina nam cały jego kwiat. Jeśli z naszej gałązki oderwiemy kolejną, jeszcze mniejszą, to i ona w powiększeniu będzie nie tylko podobna do całego kalafiora, ale także do wcześniej urwanej gałązki. Niech drobnym wsparciem dla wyobraźni będzie fotografia (rys. 1).

Tak dzieląc kalafior przekonamy się jednak, że w końcu dojdziemy do sytuacji, gdy dalszy podział jest już niemożliwy. Bardzo małe części (np. komórki lub atomy) w żaden sposób nie będą już przypominały całego kalafiora. Dlatego właśnie kalafior nie jest w pełni samopodobny. Świetnie posłużył nam jednak jako pomoc przy zrozumieniu idei samego pojęcia. Istotą samopodobieństwa jest to, że dowolnie mały element danego obiektu (w szczególności nieskończenie mały) jest dokładnie taki sam jak całość.

Zastanówmy się teraz nad drugim, bardziej geometrycznym przykładem. Najpierw jednak wykonajmy kilka prostych kroków:

1. Narysujmy dowolny odcinek.
2. Podzielmy go na trzy równe części.
3. Dwie zewnętrzne części powielmy teraz pod wyjściowym odcinkiem.
4. Kroki 2 oraz 3 powtarzamy teraz dla każdego nowopowstałego odcinka.



Rys. 2. Sześć kolejnych kroków produkcji zbioru Cantora

Obiekt, który otrzymaliśmy, nosi nazwę **zbioru Cantora**. Również w tym przypadku doskonale widać samopodobieństwo. Gdy wybierzemy dowolnie małą cześć zbioru, to w powiększeniu będzie ona dokładnie taka sama jak całość. Warto zauważyć tutaj, że zbiór Cantora nie ma „końca". Kolejne dzielone odcinki są coraz mniejsze i mniejsze, nigdy jednak „nie znikają" i cały czas można je dzielić i powielać.

2.2. Jak rozpoznać fraktale?

Prosta, nieformalna definicja fraktali, która wystarczy nam na nasz użytek brzmi: *Fraktalem nazywamy obiekt samopodobny o wymiarze ułamkowym*. Samopodobieństwo jako pojęcie jest nam już bardzo bliskie. Z ułamkowymi wymiarami zapoznamy się nieco później.

3. Długość, powierzchnia i wymiar fraktali

3.1. Problemy z wyznaczeniem długości fraktali

Na pewno w swoim życiu byliśmy zmuszeni do zmierzenia niejednej rzeczy. Miejsca w kuchni na nową lodówkę czy średnicy otworu, w który chcemy wkręcić śrubę. Co dzień rano w łazience stajemy na wagę, żeby sprawdzić skuteczność swojej diety oraz liczymy pieniądze w portmonetce przed zakupami. Takie pomiary znane z codzienności uznajemy za względnie dokładne i w rzeczywistości takimi są. Ale czy jesteśmy świadomi tego, że w otaczającym nas świecie istnieją rzeczy, których nie sposób dokładnie zmierzyć?

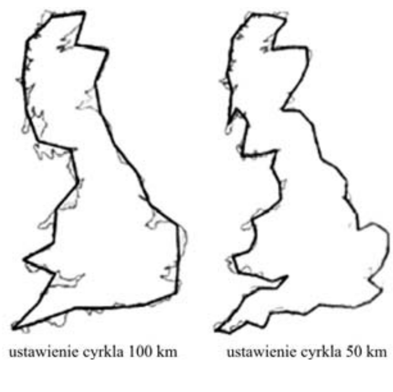
3.1.1. Długość wybrzeża Wielkiej Brytanii

Chcąc poznać długość wybrzeża Wielkiej Brytanii najłatwiej spojrzeć do encyklopedii. *Nowa encyklopedia powszechna PWN* podaje długość przekraczającą 7500 km. Zagraniczne źródła, takie jak *Encyclopedia Americana*, czy *Collier's Encyclopedia* podają kolejno 7440 km oraz blisko 8000 km! Skąd tak duża rozbieżność wśród źródeł? Odpowiedź nie jest taka prosta.

Wybrzeża Wielkiej Brytanii nie da się łatwo opisać żadną, nawet bardzo skomplikowaną matematyczną formułą. Jej kształt obserwowany przez nas dzisiaj to wynik bardzo długich procesów geologicznych; ruchów płyt tektonicznych i erozji. Nawet najdokładniejsza mapa nie jest w stanie ukazać nam skomplikowanej struktury linii brzegowej ze wszystkimi jej zakamarkami i bujną strukturą. Na ten sam problem natkniemy się także spoglądając na mocno poszarpane przez historię granice państw.

Wyobraźmy sobie, że samodzielnie chcemy sprawdzić rzetelność informacji z encyklopedii. Najprościej będzie wziąć mapę Wielkiej Brytanii (np. o skali 1:1 000 000) oraz cyrkiel rozwarty na np. 5 cm, co odpowiada w skali naszej mapy 50 km. Należy teraz dokładnie „przejść" cyrklem wzdłuż wybrzeża zapamiętując liczbę „kroków". Po pomnożeniu tej liczby przez długość rozwartości cyrkla otrzymamy interesujący nas wynik. Co stanie się jednak, gdy zmienimy parametry naszego narzędzia? Przykładowe wyniki zostały zamieszczone w tabelce poniżej.

Rozwartość cyrkla	Zmierzona długość
500 km	2600 km
100 km	3800 km
54 km	5770 km
17 km	8640 km



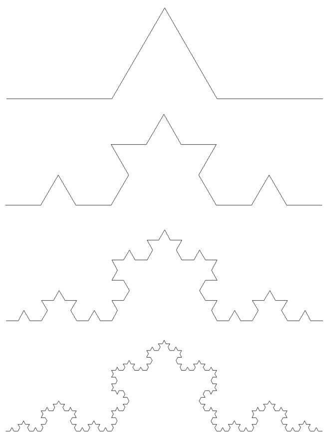
Rys. 3. Kontury Wielkiej Brytanii zmierzone cyrklem o rozwartości 100 km (lewy rys.), oraz o rozwartości 50 km (prawy rys.) w odniesieniu do skali mapy 1:1 000 000

Wynik, jaki otrzymaliśmy, może być zaskakujący. Wybrzeże pełne jest zatok i wystających cypli o różnej wielkości, dużych i małych. Przy dużej rozwartości cyrkla wiele z nich zostaje pominiętych. Jeśli zwiększymy dokładność pomiaru, mierząc tym samym więcej zatok, to nadal znajdą się jeszcze mniejsze, wciąż pomijane.

Taki sam problem napotkamy próbując mierzyć długość fraktali.

3.1.2. Krzywa i wyspa Kocha

Konstrukcja krzywej Kocha jest bardzo zbliżona do zbioru Cantora. Również składa się z kilku prostych kroków powtarzanych w nieskończoność. Wystarczy znowu podzielić dowolny odcinek na trzy równe części, a następnie utworzyć trójkąt równoramienny, którego podstawą jest środkowa część odcinka. W ten sposób otrzymujemy cztery nowe odcinki (ramiona trójkąta oraz dwie pozostałe części pierwotnego odcinka), dla których ponownie przeprowadzamy tą samą operację. Łącząc trzy odpowiednio obrócone kopie krzywej Kocha otrzymamy **wyspę Kocha** często nazywaną też płatkiem śniegu.



Rys. 4. Pierwsze cztery kroki przy tworzeniu krzywej Kocha

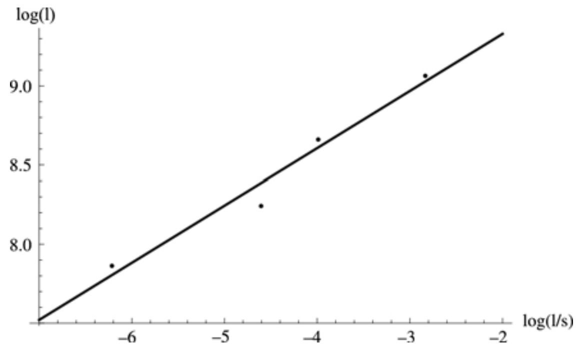
Spróbujmy teraz zmierzyć długość krzywej Kocha. Napotkamy podobny problem jak z zatokami na wybrzeżu Wielkiej Brytanii. Pamiętamy, że przybliżając obraz krzywej Kocha cały czas widzimy równie skomplikowaną strukturę. Nie sposób dobrać skalę tak, aby nie pominąć żadnego „zakamarka" tej krzywej.

3.2. Wymiar fraktali

Jak już zdążyliśmy zauważyć, fraktale to bardzo skomplikowane obiekty, mimo prostoty swojej konstrukcji. Mimo tego, że np. krzywą Kocha z łatwością możemy umieścić na kartce papieru, to nie jest to zwykły obiekt jednowymiarowy. Nasuwa się więc ciekawe pytanie: „Jakiego wymiaru są fraktale?”.

3.2.1. Wymiar cyrklowy

Mając w pamięci nasze trudy w wyznaczeniu długości linii brzegowej Wielkiej Brytanii naniesiemy zmierzone przez nas wielkości na wykres. Oś X w naszym przypadku będzie przedstawiać logarytm z precyzji naszego pomiaru (czyli z odwrotności rozwartości cyrkla *s*), a oś Y logarytm zmierzonej linii brzegowej *l*. Dane prezentują się następująco:



Rys. 5. Wykres przedstawiający liniową zależność logarytmu mierzonej długości od logarytmu precyzji, czyli odwrotności rozwartości cyrkla

Do wyników została dopasowana prosta metodą regresji liniowej. Jej równanie to: $y = 0{,}3619x + 10{,}0538$. Interesuje nas współczynnik kierunkowy tej prostej: $d = 0{,}3619$. Wymiar cyrklowy wyraża się wzorem $D = 1 + d$, czyli dla przypadku wybrzeża Wielkiej Brytanii jej wymiar cyrklowy jest równy: $D \cong 1{,}36$.

4. Zbiory Julii

Gaston Maurice Julia (1893–1978) to francuski matematyk, profesor École Polytechnique. W swojej najbardziej znanej pracy *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles* (traktat o iteracji funkcji wymiernych) opisał własności grupy fraktali nazwanych później od jego nazwiska zbiorami Julii.

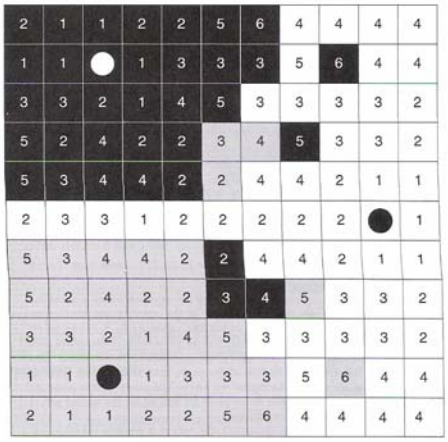
4.1. Baseny atrakcji

Zagrajmy w pewną grę. Reguły są bardzo proste. Stawiamy nasz pionek na dowolnym miejscu na planszy. Na każdym kwadracie napisany jest adres pola, na które należy się udać po jego odwiedzeniu. Np. gdy staniemy na polu G8 to następne pole, na które się udamy, to C10. Droga naszego pionka może wyglądać następująco:

- Droga pionka wreszcie się kończy na polu, na którym widniejący adres wskazuje to samo pole, mówimy wtedy o punkcie stałym.
- Droga pionka nigdy się nie skończy, np. wtedy, gdy po długiej wędrówce trafi on na pole, które zostało już przez niego odwiedzone.

L	K 2	K 3	K 3	K 4	K 4	I 5	I 6	I 7	I 8	I 8	I 9
K	K 3	K 3		K 3	I 3	H 4	H 5	G 7	H 8	H 9	H 9
I	I 3	I 3	K 4	K 3	I 2	G 3	F 5	F 7	F 8	G 9	G 10
H	H 3	I 4	K 5	L 3	K 1	D 2	B 5	D 7	F 9	F 9	G 10
G	G 4	H 5	K 7	K 6	L 2	A 2	C 7	C 10	E 10	F 10	F 10
F	F 4	F 6	F 9	F 10	F 11	F 11	F 11	F 11	F 11		F 10
E	E 4	D 5	B 7	B 6	A 2	L 2	I 7	I 10	G 10	F 10	F 10
D	D 3	C 4	B 5	A 3	B 1	H 2	K 5	H 7	F 9	F 9	E 10
C	C 3	C 3	B 4	B 3	C 2	E 3	F 5	F 7	F 8	E 9	E 10
B	B 3	B 3		B 3	C 3	D 4	D 5	E 7	D 8	D 9	D 9
A	B 2	B 3	B 3	B 4	B 4	C 5	C 6	C 7	C 8	C 8	C 9
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Rys. 7. Plansza z grą



Rys. 8. Plansza z zaznaczonymi punktami stałymi (duże kropki) oraz basenami atrakcji w odcieniach szarości. Liczby widniejące na poszczególnych kwadracikach to liczby ruchów niezbędnych do dotarcia do punktu stałego

Po chwili zauważymy, że nasza gra posiada trzy punkty stałe (na rysunku zaznaczone kropkami). Obszary łączące punkty, których ścieżka zmierza do tego samego punktu stałego, nazywamy basenami atrakcji. Są one zaznaczone kolorami: białym, szarym i czarnym.

4.2. Iteracja $z \to z^2 + c$

Teraz, gdy jesteśmy już przygotowani, aby zająć się właściwym tematem tego paragrafu przyjrzyjmy iteracji $z \to z^2 + c$. Przyjmując $c = 0$ otrzymamy:

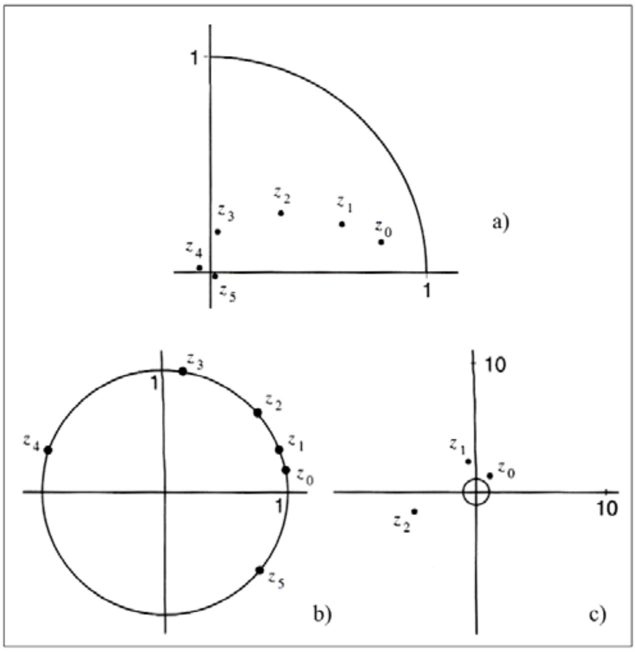
$$z \to z^2$$

Przypominając sobie wzory de Moivre'a zauważymy, że podniesienie liczby zespolonej do kwadratu to nic innego, jak podniesienie jej modułu do kwadratu oraz podwojenie argumentu:

$$z^2 = (re^{\varphi i})^2 = r^2 e^{2\varphi i}$$

Zachowanie niektórych punktów na płaszczyźnie zespolonej przedstawia tabela oraz rysunek.

	moduł	argument	moduł	argument	moduł	argument
z	0,8	10°	1,0	10°	1,5	50°
z^2	0,64	20°	1,0	20°	2,25	100°
z^4	0,4096	40°	1,0	40°	5,06	200°
z^8	0,1678	80°	1,0	80°	25,63	40°
z^{16}	0,0281	160°	1,0	160°	656,90	80°
z^{32}	0,0008	320°	1,0	320°	431439,89	160°



Rys. 9. Kolejne iteracje (z_0, z_1, ...) dla liczby zespolonej o module: a) < 1, b) = 1, c) > 1

Widać, że liczby zespolone o module mniejszym od 1 zmierzają do punktu stałego, którym jest zero. Liczby o module równym 1 niezależnie od kroku iteracji cały czas znajdują się na okręgu o promieniu 1, a liczby o module większym od 1 wraz ze wzrostem kroku iteracji zmierzają do nieskończoności.

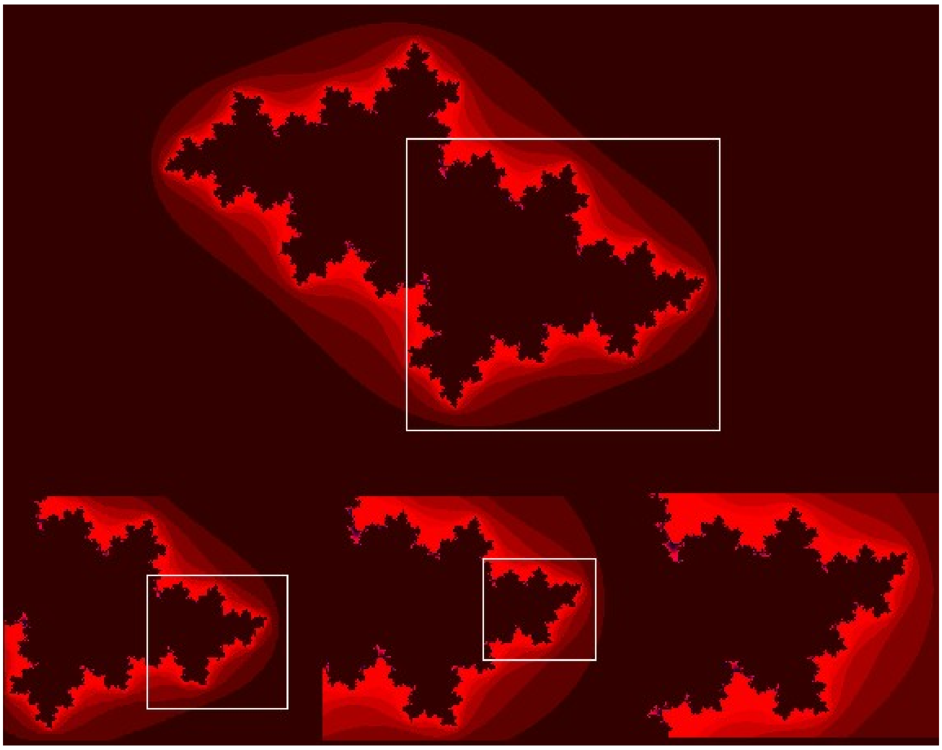
4.3. Zbiory więźniów i uciekinierów

Przestrzeń ograniczona jest więc na dwa obszary. Pierwszy zawiera punkty, które w wyniku iteracji „uciekają". Nazywa się on **zbiorem uciekinierów**. Iteracja pozostałych punktów prowadzi do zamknięcia ich w pewnej ograniczonej przestrzeni. Zbiór zawierający takie punkty nazywamy **zbiorem więźniów**.

Zbiór Julii to właśnie zbiór więźniów iteracji $z \to z^2 + c$. Ponieważ c może być w tym wypadku dowolną liczbą zespoloną, dlatego zbiory Julii to rodzina zbiorów.

4.4. Samopodobieństwo zbiorów Julii

Teraz, gdy już wiemy, czym są zbiory Julii przypatrzmy się widowiskowemu ich przykładowi. Jeżeli w iteracji $z \rightarrow z^2 + c$ przyjmiemy $c = -0,5 + 0,5i$ otrzymamy fraktal taki, jak na rysunku poniżej. Bardzo dobrze widać, że jest to obiekt samopodobny.



Rys. 9. Zbiór Julii dla $c = -0,5 + 0,5i$. Obserwując kilka powiększonych fragmentów doskonale widać jego samopodobieństwo

Literatura

1. Peitgen Heinz-Otto, Jürgens Hartmut, Saupe Dietmar, *Granice chaosu. Fraktale*, cz. I, PWN, Warszawa 2002.
2. Kudrewicz Jacek, *Fraktale i chaos*, WNT, Warszawa 2007.
3. Pierański Piotr, *Fraktale: od geometrii do sztuki*, Ośrodek Wydawnictw Naukowych, Poznań 1992.