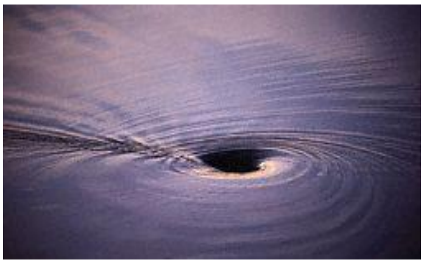
Wiry, jeże
i inne topologiczne stwory

Adriaan M.J. Schakel

Low Temperature Laboratory, Helsinki University of Technology, Finland
National Chiao Tung University, Department of Electrophysics, Hsinchu, Taiwan

Wstęp

Prawdopodobnie każdy widział dziwne zjawisko powstające przy wypuszczaniu wody z wanny. Podczas gdy płyn wypływa, część jego, która pozostaje nadal w wannie, jest wprawiona w ruch wirowy wokół pionowej osi przechodzącej przez otwór w dnie wanny. Jeśliby przyjrzeć się bliżej temu zjawisku można zauważyć, iż prędkość rotującej cieczy wzrasta wraz ze zbliżaniem się do osi. Oczywiście na samej osi nie ma cieczy a jest jedynie powietrze. Takie zjawisko nazywamy wirem.



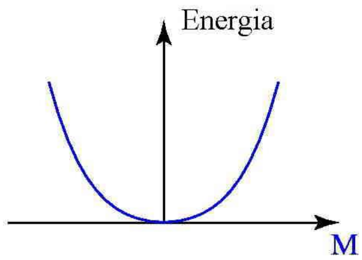
Podobne, lecz często znacznie bardziej niebezpieczne i równocześnie zachwycające zjawisko, obserwujemy nie w cieczy a w atmosferze. Część Ameryki i wschodniej Azji jest regularnie świadkiem niszczących możliwości tornad (*USA)* i tajfunów *(Chiny – od „t'ai-fung").* Również tutaj, przy uważnej obserwacji można zobaczyć, że prędkość wiatru rośnie gdy zbliżamy się do centrum powietrznego wiru. W samym środku, czyli w tak zwanym oku cyklonu, mierzy się rekordowo niskie ciśnienie, co po prostu oznacza, że znajduje się tam stosunkowo mało powietrza.

Widzimy zatem, iż oba opisane zjawiska są rzeczywiście blisko związane. Prędkość ruchu ośrodka zachowuje się w ten sam sposób. W dodatku oba zjawiska są stabilne. Ruszając delikatnie ręką w wannie, czyli dokonując małego zaburzenia, możemy sprawić, że wir zacznie się nieznacznie poruszać, jednakże nadal będzie istniał. W sprzyjających warunkach tornado może przemierzać znaczne odległości i zagrażać ludziom przez wiele dni.

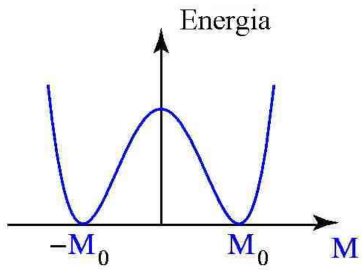
Istnieje jeszcze jeden obiekt posiadający podobne własności. Jest nim wir kwantowy który pojawia się w nadprzewodnikach i w cieczach nadciekłych. Układy kwantowe bardzo mocno różnią się od klasycznych gazów i cieczy, które znamy z otaczającego nas świata. A to dlatego, iż są rządzone przez prawa mechaniki kwantowej. Jedną z możliwości dostania się do kwantowego świata jest przejście do bardzo niskich temperatur. Wtedy termiczne fluktuacje nie przesłaniają subtelnych efektów kwantowych, jak to się dzieje przy wyższych temperaturach.

Złamanie symetrii i parametr porządku

Rozważmy łańcuch złożony z wielu malutkich igiełek magnetycznych skierowanych w górę albo w dół. Zamiast śledzić ruch wszystkich magnesów lepiej i łatwiej jest rozważać pewną wielkość uśrednioną M. Mówi nam ona o tym, jak przeciętnie są zorientowane magnesy w łańcuchu. Jeśli elementarne magnesy są ustawione w chaotyczny sposób wtedy oczywiście M=0. Ma to miejsce przy wysokich temperaturach, kiedy termiczne fluktuacje prowadzą do zupełnie chaotycznego zorientowania magnesów. Zerowa wartość M odpowiada wtedy stanowi o najniższej energii. Gdy układ jest w najniższym stanie energetycznym mówimy, że jest w stanie podstawowym.



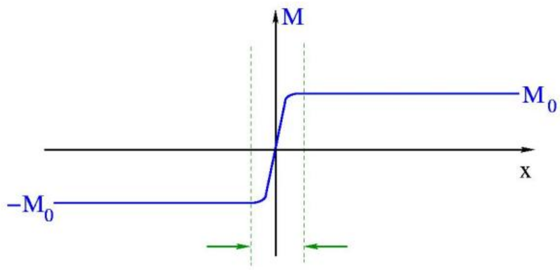
Jednakże, przy chłodzeniu układu może się w gładki sposób zmienić kształt funkcyjnej zależności energii systemu od M, przyjmując postać pokazaną na rysunku poniżej.



Tym razem minimum energii nie jest osiągane dla M=0 lecz dla pewnych konkretnych, niezerowych wartości $+M_0$ oraz $-M_0$. Zatem stanem podstawowym jest teraz stan o nieznikającej wartości M, dodatniej bądź ujemnej. Taka sytuacja odpowiada **spontanicznemu złamaniu symetrii.**[1]. Zamiast sytuacji, w której magnesy są przypadkowo ustawione, dając M=0 czyli nie wyznaczając żadnego preferowanego zwrotu, mamy sytuację, w której magnesy spontanicznie wskazują kierunek albo w górę albo w dół. Temperaturę, dla której po raz pierwszy M staje się niezerowe, zmieniając w tak drastyczny sposób własności układu, nazywamy temperaturą krytyczną. Oddziela ona stan (fazę) wysokotemperaturowy, charakteryzujący się nieobecnością preferowanego ustawienia magnesów, od uporządkowanego stanu niskotemperaturowego, w którym jeden z kierunków jest uprzywilejowany. Można powiedzieć, że wartość M wskazuje jak bardzo uporządkowany jest układ. Dlatego też M nazywamy parametrem porządku.

Ściany domenowe

Wyobraźmy sobie, że chłodzenie wykonujemy wystarczająco szybko, tak że na lewym końcu łańcucha magnesy spontanicznie ustawiają się w dół. Niezależnie magnesy na prawym końcu wybierają ustawienie do góry. Mamy zatem sytuację kiedy na końcach łańcucha magnesy mają przeciwną orientację. Oczywiste jest, że musi istnieć punkt na łańcuchu w którym parametr M ma wartość zero.



Obszar gdzie M w znaczący sposób odbiega od wartości w stanie podstawowym nazywamy defektem, a punkt w którym M = 0 – rdzeniem defektu. Rdzeń de-

[1] Patrz artykuł prof. Andrzeja Białasa „Natura boi się próżni” w *Fotonie 72.*

fektu jest dość niezwykłym obiektem, zbudowanym z symetrycznej fazy ośrodka, podczas gdy cała reszta układu znajduje się w stanie uporządkowanym. Opisany tutaj specyficzny rodzaj defektu nazywamy ścianą domenową. Żeby zrozumieć pochodzenie nazwy wyobraźmy sobie, że zamiast łańcucha mamy rzeczywisty trójwymiarowy układ. Jeśli teraz rozszerzymy punkt reprezentujący rdzeń ściany domenowej o dwa brakujące wymiary, stanie się on powierzchnią, a obszar gdzie M w znaczący sposób się zmienia przyjmie kształt ściany. Najistotniejszą cechą takich konfiguracji jest fakt, iż są one stabilne ze względów topologicznych.

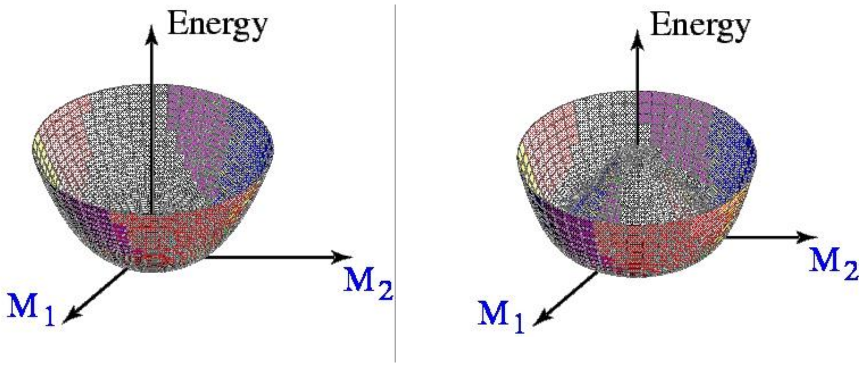
Topologia

Szczególnie ważną rolę w rozważaniach defektów topologicznych pełnią sfery. Zwyczajna sfera jest obiektem dwuwymiarowym: mrówka na wielkiej sferze może się poruszać jedynie w kierunkach przód-tył bądź prawo-lewo. Aby zaakcentować dwuwymiarowość zwykłej sfery oznaczymy ją S^2, gdzie górny indeks podaje wymiar obiektu. Idea sfery jest na tyle ogólna, że można rozważać sfery dowolniewymiarowe. Na przykład, jeśli przetniemy dwu-sferę płaszczyzną, otrzymamy okrąg czyli sferę S^1; obiekt jednowymiarowy. Jeśli będziemy kontynuować naszą procedurę i przetniemy sferę jednowymiarową linią, uzyskamy oczywiście dwa punkty, które tworzą zerowymiarową sferę S^0.

Istotne jest to, iż można spojrzeć na ścianę domenową jako na odwzorowanie z rzeczywistej przestrzeni w przestrzeń parametru porządku. Prześledźmy to na przykładzie naszego łańcucha. Przestrzeń rzeczywistą $S^0{}_x$ stanowią dwa końce łańcucha, a przestrzeń parametru porządku $S^0{}_M$ jest reprezentowana przez dwa stany podstawowe M. Jeśli oba punkty z $S^0{}_x$ odwzorowane są na ten sam punkt w $S^0{}_M$, w ośrodku nie tworzą się żadne ściany domenowe. Jednakże jeśli punkty z $S^0{}_x$ zostaną odwzorowane w dwa różne punkty $S^0{}_M$, pojawi się ścianka domenowa. I żadna ciągła deformacja nie będzie w stanie zlikwidować tego defektu. Zatem nasza ścianka domenowa jest topologicznie stabilna.

Wiry kwantowe

Skomplikujmy odrobinę nasz model i zamiast skalarnej wielkości M rozważmy parametr porządku posiadający dwie składowe M_1 i M_2. Wykresy energii dają się, w prosty sposób, uogólnić na przypadek z dwuwymiarową wielkością M. Wystarczy jedynie obrócić je wokół osi pionowej (zob. rysunki poniżej). Zbiór punktów na płaszczyźnie, w których parametr porządku przyjmuje wartość próżniową dla stanu uporządkowanego, nie jest sferą S^0 jak dla ścian domenowych, lecz sferą S^1 – okręgiem. Zatem odwzorowanie, które będzie tutaj odpowiednie, jest odwzorowaniem sfery S^1 w S^1, czyli okręgu w okrąg. Takie przekształcenie jest charakteryzowane przez *liczbę nawinięć* mówiącą ile razy nawiniemy okrąg w przestrzeni parametru porządku odwzorowując dokładnie jeden okrąg z przestrzeni rzeczywistej. Przekształcenia te nadają się do opisu wirów kwantowych pojawiających się w nadprzewodnikach i cieczach nadciekłych.

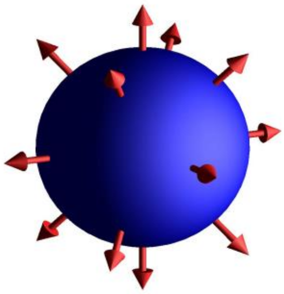


Opisane wiry kwantowe „żyły” w przestrzeni dwuwymiarowej. Aby uogólnić to na trójwymiarową przestrzeń wystarczy rozważyć liniowy defekt, którego przecięcia z płaszczyznami prostopadłymi do niego dają wiry. Obszar otaczający wir na płaszczyźnie może być ściągnięty do okręgu S^1. Poruszając się wzdłuż tego okręgu parametr porządku będzie zataczać okręgi „na dnie butelki wina” (prawy rysunek powyżej). Liczba tych okręgów jest właśnie liczbą nawinięć. Wir z określoną liczbą nawinięć nie może być w sposób ciągły zdeformowany w wir z inną liczbą nawinięć. A zatem jest topologicznie stabilny. Rdzeń wiru planarnego składa się z pojedynczego punktu. Podobnie jak dla ściany domenowej, parametr porządku znika w rdzeniu. Jeśli rozszerzymy przestrzeń do trzech wymiarów, rdzeń wirów kwantowych stanie się linią, jak ma to miejsce dla wirów w wodzie i trąb powietrznych.

W tym miejscu trzeba zaznaczyć, iż wiry wodne i trąby powietrzne są stabilne nie z powodów topologicznych. Wiadomo od dawna, że ich stabilność jest gwarantowana przez prawa rządzące ruchem klasycznych gazów i płynów. Jeśli jednak policzyć liczbę nawinięć dla tych defektów, to okaże się, iż jest ona bardzo duża. Potrzeba subtelności świata kwantowego aby stworzyć defekty o małych liczbach nawinięć.

Jeże topologiczne

Rozważmy jeszcze bardziej skomplikowaną sytuację, gdy parametr porządku ma aż trzy składowe M_1, M_2 i M_3. Niestety brakuje nam wymiarów by narysować kształt funkcyjny energii lecz rysunek poniżej pozwala nam wyobrazić sobie co się dzieje. Trójwymiarowy parametr porządku określa odwzorowanie z S^2 w S^2. Takie odwzorowania także można charakteryzować liczbą nawinięć. Tym razem liczba ta określa ile razy zakreślimy sfery w przestrzeni parametru porządku przy odwzorowaniu sfery z rzeczywistej przestrzeni. Liczba taka nadaje się do klasyfikacji defektów punktowych zwanych jeżami. Jeże pojawiają się na przykład w ferromagnetykach.

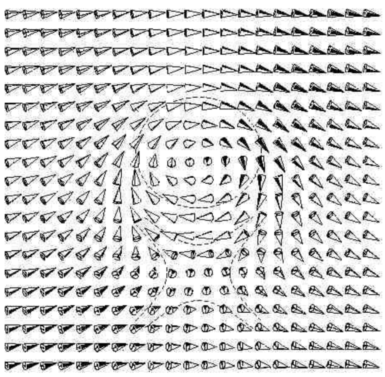


Przestrzeń rzeczywista otaczająca defekt punktowy może być ściągnięta do sfery S^2_x jak jest to pokazane na powyższym rysunku. Strzałki wskazują kierunek wektora M. W tym przypadku końce wektorów M również zataczają sferę. Liczba nawinięć takiego defektu jest zatem równa jeden. Z rysunku widać także, iż istnieje dokładnie jeden punkt gdzie wektor M nie jest określony. Tym punktem, rdzeniem jeża, jest oczywiście środek sfery.

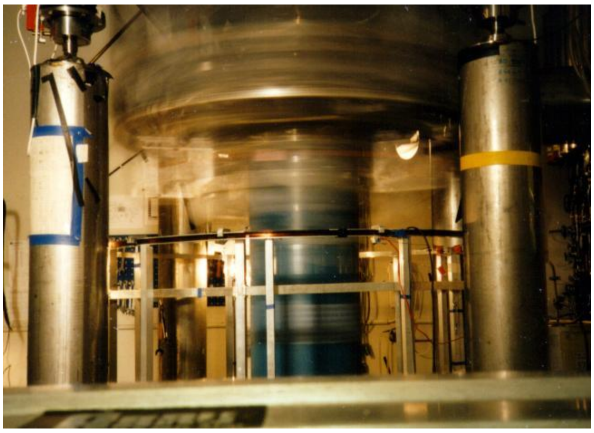
Uważny czytelnik mógł zauważyć że zaczęliśmy nasze rozważania od ścian domenowych będącymi obiektami dwuwymiarowymi. Następnie przeszliśmy do wirów kwantowych – tworów jednowymiarowych, i na końcu omówiliśmy jeże czyli obiekty punktowe tzn. zerowymiarowe. Wszystkie te defekty były rozpatrywane w trójwymiarowej przestrzeni. Można zauważyć prawidłowość, że do klasyfikowania defektu d wymiarowego w n wymiarowej przestrzeni potrzebujemy sfery n-d-1 wymiarowej.

Tekstury

W przyrodzie istnieją oczywiście defekty topologiczne dużo bardziej skomplikowane niż te, które powyżej opisaliśmy. Przykład widzimy na rysunku poniżej.



Defekt ten został ostatnio zaobserwowany w nadciekłym ^{3}HeA przez grupę ROTA w Low Temperature Laboratory w Helsinkach, przy użyciu rotującego kriostatu (na zdjęciu poniżej). Godne uwagi jest to, że w tym defekcie nie istnieje obszar gdzie parametr porządku znika, czyli nie ma rdzenia defektu. Obiekt o takich własnościach nazywamy teksturą.



Wnioski

Defekty topologiczne ciągle są dziedziną intensywnych i ekscytujących badań. Pojawiają się one niemal we wszystkich działach fizyki współczesnej, od fizyki ciała stałego do fizyki wysokich energii i kosmologii. Jest to fascynujące, że stosunkowo proste, lecz głębokie pojęcia topologiczne, znajdują zastosowanie w fizyce.

(tłumaczył J. Wereszczyński, IF UJ)

Podziękowanie

Ten krótki esej jest dedykowany Z. Gołąb-Meyer za jej zapał w ukazywaniu zdolnym uczniom piękna fizyki. Dziękuję profesorowi J. Spałkowi i organizatorom XL Zakopiańskiej Szkoły Fizyki za zaproszenie mnie do udziału i za stworzenie miłej i inspirującej atmosfery.

Jestem też wdzięczny M. Krusiusowi z Helsinek za gościnność. To w Helsinkach, w Laboratorium Niskich Temperatur Uniwersytetu Technicznego opracowywałem ten esej. Podziękowanie należy się B. Rosensteinowi z Taiwanu z Wydziału Elektrofizyki Narodowego Uniwersytetu Chiao Tung, gdzie powstawała ostateczna wersja wykładu. Pan R. Blaauwgeers pomógł mi w opracowaniu ilustracji, za co pragnę mu podziękować. Praca była częściowo sponsorowana przez program EU Transfer and Mobility of Researchers (umowa nr ERBFMGECT980122), a także przez National Sciense Council (NSC) z Taiwanu. Praca została wykonana w ramach programu badań defektów topologicznych finansowanego przez European Science Foundation (zobacz witrynę programu http://www.physik.fu-berlin.de/~defect).

Redakcja *Fotonu* dziękuje profesorowi H. Arodziowi za pomoc w redakcji artykułu.