Muzyka kwantów (I)

Piotr Zieliński
Instytut Fizyki Politechniki Krakowskiej
i Instytut Fizyki Jądrowej PAN w Krakowie

Profesorowi Bronisławowi Średniawie

Od przyzwyczajenia do analogii

Mechanika kwantowa należy do tych działów fizyki, które – mimo niezaprzeczalnych sukcesów w wyjaśnianiu zjawisk znanych i przewidywaniu nowych – wciąż budzą dyskusje i wywołują poczucie niedosytu zrozumienia. Dzieje się tak dlatego, że aparat pojęciowy mechaniki kwantowej charakteryzuje się wysokim stopniem abstrakcji. Dochodzenie do wyników sprawdzalnych doświadczalnie, a więc jakoś „namacalnych", wymaga obliczeń przy użyciu obiektów matematycznych niełatwo przemawiających do intuicji, a i sam sposób wykorzystania tych wyników do opisu obserwacji i pomiarów wydaje się – z powodu występujących tam tworów tak dziwnych, jak amplitudy prawdopodobieństwa – mało bezpośredni, wykraczający poza ramy samej teorii, a nawet angażujący odczucia subiektywne, lub wymagający obecności świadomego obserwatora [1]. W swoim podręczniku mechaniki kwantowej prof. Kacper Zalewski pisze „W tych warunkach powstaje pytanie, co to znaczy wytłumaczyć komuś mechanikę kwantową?" i proponuje odpowiedź, że „[…] polega to na próbie pokazania, jak się w praktyce stosuje mechanikę kwantową do konkretnych problemów." [2]. Mój wykładowca tego przedmiotu na Uniwersytecie Jagiellońskim, prof. Bronisław Średniawa mawiał, że do zrozumienia mechaniki kwantowej nie wystarczają jedynie słowa i wzory matematyczne – potrzebne są czasem także i gesty. Znana jest też świetna książka S. Brandta i H.D. Dahmena *Mechanika kwantowa w obrazach* [3].

Z upływem czasu osoba posługująca się w swej pracy mechaniką kwantową przyzwyczaja się do wypracowanych tam reguł – a jak wiadomo, przyzwyczajenie staje się drugą naturą – lub też – gdy jednak nie może się całkiem przyzwyczaić – poszukuje analogii w innych zjawiskach opisywanych za pomocą podobnych pojęć matematycznych [4]. W przypadku mechaniki kwantowej naturalnym źródłem takich analogii są drgania i ruchy falowe. Mechanika kwantowa zwana jest wszak także mechanika falową, gdyż rozwiązania obowiązujących tam równań prawie zawsze mają postać fal biegnących w przestrzeni, lub „stojących" w pewnych obszarach ograniczonych. W tym drugim przypadku funkcje falowe są bliskim analogiem drgań własnych różnych przedmiotów, tj. drgań, które te przedmioty wykonują, gdy wprawione w ruch są pozostawione same sobie: gong uderzony młotkiem, czasza dzwonu zderzona z jego sercem, szarpnięta struna gitary… Powietrze przenosi te drgania do naszych uszu za pośrednictwem fal zagęszczeń i rozrzedzeń, skutkiem czego drgania te wywołują w nas wrażenia dźwiękowe. Można więc spróbować zapytać, jak brzmiałyby obiekty kwantowe, gdyby występujące tam fale i stany własne nie były kontrowersyjnymi „amplitudami prawdopodobieństwa" [5], lecz amplitudami drgań jakichś przedmiotów. Innymi słowy, po mechanice kwantowej we wzorach, obrazach i gestach można spróbować przedstawić mechanikę kwantową w dźwiękach. Kilka przykładów chciałem przedstawić w tym artykule.

Ton prosty i kwantowy stan ustalony, wysokość dźwięku i poziom energetyczny

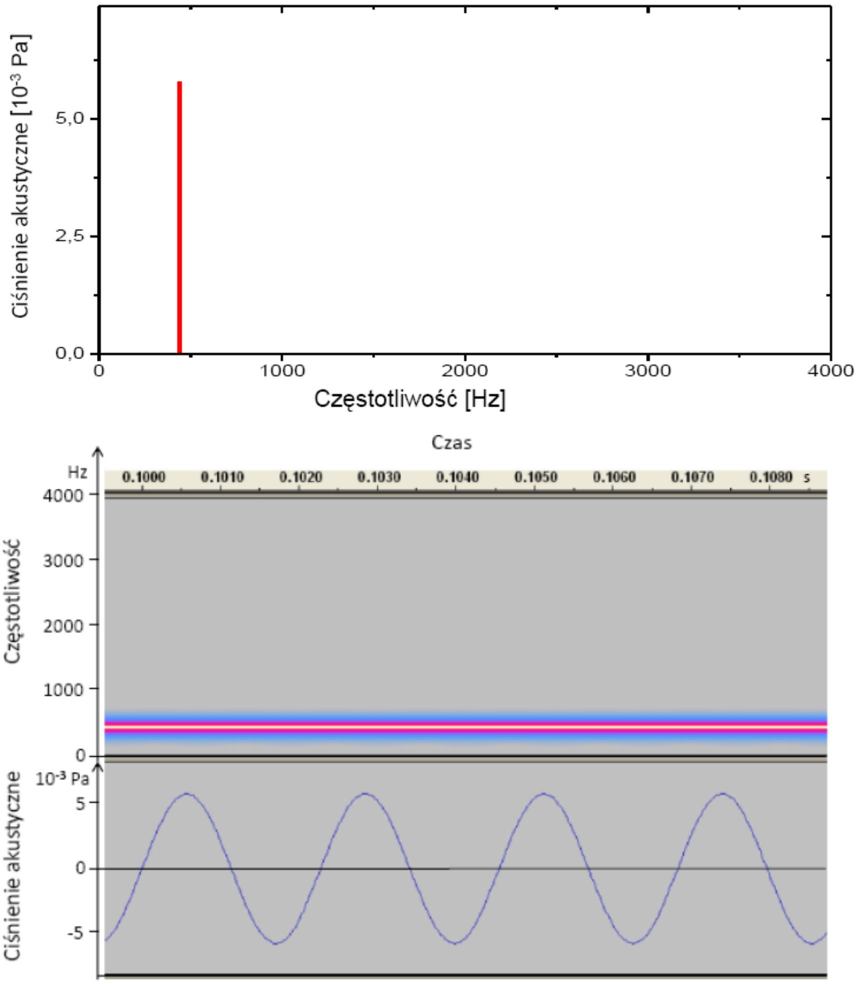
Układ mechaniczny, który wytrącony z położenia równowagi wykonuje ruch opisany pojedynczą sinusoidą jest prototypem – ale też wszechobecnym składnikiem – wszystkich instrumentów muzycznych mogących wytwarzać dźwięki o określonej wysokości. Sinusoidalna fala zagęszczeń i rozrzedzeń powietrza docierająca do narządów słuchu wywołuje bowiem wrażenie dźwięku o dobrze określonej wysokości logarytmicznie zależnej od liczby tych zagęszczeń w jednostce czasu. Liczbę zagęszczeń – grzbietów fal w jednostce czasu nazywa się częstością, lub – dla odróżnienia od średniej liczby wystąpienia jakiegoś zjawiska przypadkowego – częstotliwością drgań. Można więc wahania nadwyżki ciśnienia ponad ciśnienie atmosferyczne, tj. tzw. ciśnienie akustyczne p, w takim sygnale – zwanym tonem prostym – opisać wzorem $p = p_0 \cos(2\pi f t + \varphi)$, gdzie p_0 jest amplitudą ciśnienia akustycznego, f częstotliwością tonu, a φ początkową fazą sygnału. Dla uproszczenia niektórych obliczeń taki oscylujący sygnał podaje się w postaci zespolonej

$$p = \bar{p}_0 e^{-i2\pi ft}, \text{ gdzie } \bar{p}_0 = p_0 e^{-i\varphi}.$$

Oczywiście ciśnienie nie może być liczbą zespoloną, dlatego w tym zapisie prawdziwym ciśnieniem akustycznym jest część rzeczywista podanego wyrażenia:

$$p = \mathrm{Re}\left(\bar{p}_0 e^{-i2\pi ft}\right) = \mathrm{Re}(\bar{p}_0)\cos(2\pi ft) + \mathrm{Im}(\bar{p}_0)\sin(2\pi ft) = p_0 \cos(2\pi ft + \varphi).$$

Widełki stroikowe – kamerton – są tak skonstruowane, aby wytwarzany przez nie sygnał możliwie wiernie przypominał ton prosty. Częstotliwość widełek strojowych wynosi zazwyczaj 440 cykli na sekundę (herców), ponieważ zgodnie z międzynarodowymi umowami tej właśnie częstotliwości odpowiada wzorcowa wysokość dźwięku „a-razkreślne", nr 69 w systemie MIDI. Rysunek 1 przedstawia widmo – czyli wykres amplitud sinusoid, z których można złożyć dany sygnał dźwiękowy w funkcji częstotliwości – dla tonu prostego. Ponieważ w tonie prostym jest tylko jedna sinusoida, widmo składa się z jednego tylko słupka, czyli linii widmowej. Spektrogram, to wykres częstotliwości w zależności od czasu. Na rys. 1 widać więc jedną linię poziomą, poniżej której przedstawiono przebieg czasowy dobiegającego do ucha ciśnienia akustycznego.



Rys. 1. Widmo, spektrogram (tj. zależność częstotliwości od czasu) oraz przebieg czasowy ciśnienia akustycznego w tonie prostym

Nie jest mi znane pochodzenie i biologiczna funkcja logarytmicznej zależności wysokości dźwięku od częstotliwości. Przypomina ona znane prawo Webera-Fechnera, orzekające, że wrażenie jest proporcjonalne do logarytmu intensywności bodźca. W ten sposób postrzegamy jasność świecącego obiektu, np. dalekiej gwiazdy, w funkcji jego odległości od obserwatora albo zależność głośności dźwięku od jego natężenia. W tych przypadkach mamy do czynienia z realizacją instynktu samozachowawczego: krzywa logarytmiczna staje się coraz bardziej pozioma i płaska, gdy jej argument przyjmuje duże wartości, co zabezpiecza organizm przed zbyt intensywną reakcją na bodźce bardzo silne.

Z drugiej strony, dla bodźców bardzo słabych, stosunkowo duża szybkość narastania krzywej logarytmicznej pozwala rozpoznać i zróżnicować bodźce o natężeniu bliskim progowi wrażliwości. Funkcja logarytmiczna jest tu zwykle pewnym przybliżeniem. Tymczasem różnice wysokości dźwięków, zwane interwałami, które tworzą melodię, odpowiadają bardzo dokładnie stałym stosunkom częstotliwości, co oznacza, że proporcjonalność wysokości dźwięku do logarytmu częstotliwości jest spełniona z wielką dokładnością. Już niewielka zmiana tych stosunków jest zauważalna. Znają to dobrze słuchacze utworów z epok poprzedzających temperację stroju. Te same utwory grane na instrumentach dawnych, strojonych w różnych odmianach stroju naturalnego, brzmią znacząco inaczej, niż gdy je słyszymy na instrumentach współczesnych w stroju zbliżonym do równomiernie temperowanego. Codziennym przykładem tego zjawiska jest też „fałszowanie" znanych piosenek. Transpozycja polegająca na pomnożeniu wszystkich częstotliwości przez wspólny czynnik nie jest odbierana jako fałszowanie (może z wyjątkiem osób obdarzonych słuchem absolutnym, które rozpoznają nie tylko interwały, ale i bezwzględną częstotliwość). Czyżby zatem nasze narządy słuchu znały klasyczną relację proporcjonalności między energią a częstotliwością $E \sim f^2$, albo przeczuwały obowiązującą w mechanice kwantowej odpowiedniość między energią, a częstotliwością

$$E = hf\ ?$$

Oznaczałoby to, że nasz organizm, broni się przed nadmierną energią, zmniejszając swoją wrażliwość, gdy energia ta staje się zbyt duża.

Wydaje się, że w percepcji promieniowania elektromagnetycznego nie ma zjawiska analogicznego do wysokości dźwięku. Nie ma żadnych „interwałów świetlnych", a związek między energią a kolorem światła jest jednoznaczny tylko w przypadku fal monochromatycznych [6].

Sygnał sinusoidalny ma pewną charakterystyczną właściwość, którą najłatwiej zauważyć używając liczb zespolonych. Mianowicie gdybyśmy zmienili początkową chwilę liczenia czasu, czyli zamienili t na $t + t_0$, to ani amplituda, ani częstotliwość, ani też kształt sygnału nie ulegną zmianie. Matematycznie takie przesuniecie czasu spowoduje tylko pomnożenie całej liczby o module równym 1, albo – równoważnie – przesunięcie fazy sinusoidy

$$p(t + t_0) = p(t)e^{-i2\pi f t_0}.$$

Funkcje, które przy przesunięciu czasu zostają tylko pomnożone przez stały czynnik, niezmieniający ich amplitudy, opisują drgania własne w świecie, w którym czas płynie równomiernie i to zarówno w przód jak i w tył. Ostatnie wymaganie jest trochę dziwne, właściwie niedorzeczne. Rzeczywiście odwracalność biegu czasu oznacza m.in., że nie ma strat energii. Straty energii jednak w naszym świecie zawsze istnieją, co powoduje, że sinusoidalne drgania nawet najlepszych widełek strojowych zawsze są trochę tłumione, aż wreszcie całkiem zanikają. Natomiast stała częstotliwość i tym samym stała wysokość dźwięku przedmiotów drgających jest zjawiskiem łatwym do zauważenia. Stąd wszechobecność ruchów sinusoidalnych – zawsze nieco jednak tłumionych przez opór powietrza, tarcie wewnętrzne i wreszcie promieniowanie fali dźwiękowej – w otaczającej nas rzeczywistości. Czas przecież płynie równomiernie…

Plik 1. Tony_Proste.mp3* przedstawia tony proste o różnych częstotliwościach, tak dobranych, aby tworzyły temat bachowskiej *Sztuki Fugi* [7]. Ilustracja tym bardziej zbliża się do prawdziwych tonów prostych im ciszej jest odtwarzana, ponieważ wszystkie urządzenia odtwarzające, a nawet nasz narząd słuchu wprowadzają zawsze pewne zniekształcenia rosnące z amplitudą sygnału. Dźwięki związane z okresowymi zmianami ciśnienia akustycznego charakteryzują się swoją wysokością dźwięku i przez to wyróżniają się spośród innych wrażeń dźwiękowych. Do tego stopnia, że ich wydobywanie stało się najistotniejszym elementem sztuki, jaką jest muzyka.

Równania mechaniki kwantowej są inne od tych, które rządzą ruchem widełek strojowych. Inna jest też poszukiwana funkcja. Nie jest nią żadna wielkość fizyczna, taka jak ciśnienie akustyczne, lecz tzw. funkcja falowa: dziwny twór oznaczany literą Ψ, niosący jednak całą dostępną – niestety, nie tak kompletną jak w przypadku obiektów klasycznych – informację o układzie. Ale i tam obowiązuje równomierność upływu czasu i dlatego funkcja falowa kwantowego stanu ustalonego ma taką samą postać matematyczną, jak ciśnienie akustyczne w tonie prostym.

$$\Psi(t) = A_0 e^{-i2\pi ft},$$

tj. oscyluje ze stałą częstotliwością f, której odpowiada energia $E = hf$, częściej niż częstotliwość używana w rozważaniach kwantowomechanicznych. Przelicznik częstotliwości na energię – stała Plancka – jest bardzo dobrze znany, choć nikt chyba nie wie, dlaczego jego wartość wynosi akurat

$$h = 6{,}626\,069\,57(29)\cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}.$$

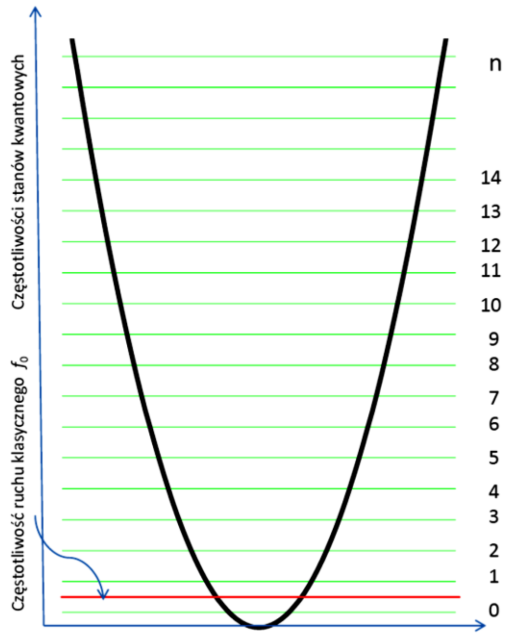
Ta wartość jest tak mała, że kwanty drgań akustycznych, zwane fononami, mające energie $E = hf$ dostępne są dla pomiarów, np. przy zderzeniach z neutronami (jakże użytecznymi w badaniach ruchów atomów w ciałach stałych!), dopiero przy częstotliwościach rzędu teraherców. W zakresie słyszalnym, tj. $16\ \mathrm{Hz} < f < 20\ \mathrm{kHz}$ pojedynczych fononów nie da się ani zarejestrować żadnym urządzeniem ani, tym bardziej, usłyszeć. Ich energie są za słabe, a ich liczba potrzebna do wywołania wrażenia słuchowego tak duża, że odbieramy tylko efekt zbiorowy, podobnie jak w zakresie widzialnym nie dostrzegamy pojedynczych fotonów (cz. II, rozdz. „Granica klasyczna”). W istocie jednak, w oby-

* Na szaro zaznaczono przykłady plików muzycznych, dostępnych w wersji internetowej *Fotonu*.

dwu przypadkach: ciśnienia akustycznego i pola elektromagnetycznego mamy do czynienia z amplitudą prawdopodobieństwa pewnych kwazicząstek [5].

Wielotony i superpozycja stanów

Ton prosty jest ilustracją stanu kwantowego o zadanej energii, czyli stanu stacjonarnego, ustalonego, w którym układ znajduje się ciągle na jednym poziomie energetycznym. Można by zapytać czy istnieją układy kwantowe, które tak jak widełki stroikowe, miałyby tylko jedną częstotliwość własną. Nie znam takiego przykładu. Zresztą i w świecie instrumentów muzycznych jest to sytuacja też wyjątkowa i przybliżona. Widełki strojowe mają także inne częstotliwości własne, tylko są one tak oddalone od tej jednej wzorcowej, że nie zaburzają istotnie sinusoidalnego charakteru ruchu. Dokładnie jedną częstotliwość własną miałaby punktowa – więc wyidealizowana – masa na nieważkiej – a więc jeszcze bardziej wyidealizowanej – sprężynie. Spróbujmy zatem zobaczyć jak zachowywałyby się widełki strojowe, lub ich wyidealizowany model zwany oscylatorem harmonicznym, gdyby były układem kwantowym. W tym celu narysujemy energię potencjalną w zależności od rozchylenia widełek. Ma ona postać otwartej ku górze paraboli. Rozwiązanie kwantowego problemu pojedynczej cząstki w takim potencjale przewiduje cały szereg częstotliwości własnych. Widać je na rys. 2 w postaci (zielonych) linii poziomych. Tworzą one „drabinkę" o szczeblach równoodległych z wyjątkiem najniższego, którego odległość od dna paraboli jest o połowę mniejsza. Mechanika kwantowa stwierdza, że taki oscylator harmoniczny może przyjmować energie zadane przez szczeble tej drabinki. Odizolowany od wszelkich oddziaływań, a także od fluktuacji próżni (wszędzie jednak w istocie obecnych, trochę podobnie do wszechobecnego tłumienia dźwięku) kwantowy oscylator harmoniczny pozostaje stale na jednym ze swych poziomów energetycznych – na jednym szczeblu drabinki poziomów. Szczebli tych jest nieskończenie wiele. Zatem repertuar tonów prostych oscylatora kwantowego jest nieporównanie bogatszy od jego klasycznego pierwowzoru. Przykład 2. Tony_Oscylatora_Kwantowego.mp3 przedstawia je po kolei. Jest to taka sama sekwencja tonów, $f_n = f_0(n-1/2)$ n = 1,2,3… jaką można wydobyć z piszczałki, np. organowej, zamkniętej na jednym i otwartej na drugim końcu. Wielkość f_0 jest tutaj częstotliwością najniższego tonu, jaki wydawałaby ta sama piszczałka, gdyby była dwa razy dłuższa i zamknięta z obu końców. Jest to też częstotliwość drgań klasycznego oscylatora harmonicznego o tej samej masie i tym samym potencjale, co na rys. 2. Dlaczego pojedynczy obiekt kwantowy: punktowa masa na nieważkiej sprężynie ma tak skomplikowany układ poziomów energetycznych, jak blaszany, czy też drewniany cylinder, do tego wypełniony gazem? Dzieje się tak dlatego, że opis kwantowy nawet pojedynczej cząstki punktowej zakłada jej obecność, albo przynajmniej prawdopodobieństwo obecności, w całej przestrzeni. Poszukiwana funkcja falowa – amplituda prawdopodobieństwa, tj. wielkość, której kwadrat modułu określa prawdopodobieństwo przebywania cząstki w jednostce objętości – jest zatem obiektem rozciągłym w nie mniejszym stopniu niż gęstość gazu w obszarze piszczałki. Drgania własne obiektów rozciągłych bywają liczne, ale gdy obiekty te są ograniczone w przestrzeni (piszczałka jest ograniczona swą długością i promieniem), to częstotliwości drgań własnych tworzą zbiór dyskretny: drabinkę częstotliwości odpowiadającą możliwym falom stojącym. Podobnie jest z układami kwantowymi, punktowa cząstka w parabolicznym potencjale nie może uciec do nieskończoności i dlatego jej poziomy energetyczne tworzą dyskretną drabinkę. Problem znalezienia układu mechanicznego o zadanym zbiorze częstotliwości własnych jest znany i trudny. Nazywa się zagadnieniem odwrotnym. Nie będziemy go tu rozpatrywać. Zadowólmy się tym, że kwantowy oscylator i piszczałka zamknięta z jednego końca mają identyczne, z dokładnością do czynnika, częstotliwości własne.

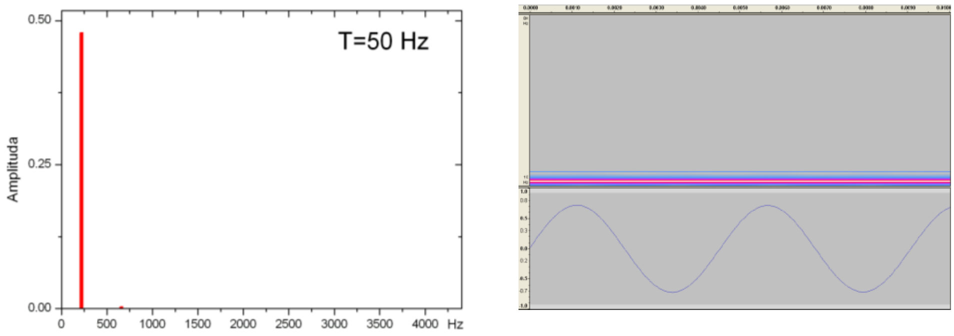


Rys. 2. Energia potencjalna (linia czarna), częstotliwości kwantowych stanów własnych energii (linie zielone) oraz częstotliwość klasyczna (linia czerwona) oscylatora harmonicznego

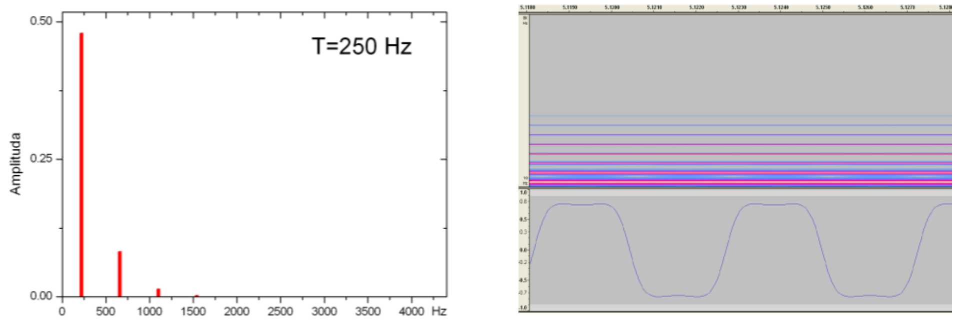
Znawców instrumentów muzycznych nie dziwi fakt, że drgający obiekt wytwarzający dźwięk wykonuje na raz kilka swych drgań własnych. Wytwarza się w ten sposób wieloton. W przypadku piszczałki amplituda poszczególnych tonów prostych, zależy to od sposobu zadęcia oraz od liczby i kształtu dodatkowych otworów. W przypadku struny – od miejsca, w którym się ją potrąci i od kształtu elementu wywołującego ruch: może to być palec gitarzysty, albo jego plastikowe piórko, krucze pióro w klawesynie, albo filcowy młoteczek w fortepianie. Za każdym razem drgania własne występują z różnymi amplitudami zależnie od sposobu wydobycia dźwięku. Zbiór tych amplitud – widmo dźwięku – określa jego barwę. Gdy wzbudzonych jest wiele drgań własnych, układ znajduje się w superpozycji swych stanów wibracyjnych. Oczywiście również układy kwantowe mogą się znajdować w superpozycji swych stanów. Które z tych stanów i z jakim prawdopodobieństwem znajdą się w danej superpozycji zależy od tzw. przygotowania stanu, tj. od tego, jakie były chwilowe prawdopodobieństwa obsadzenia stanów własnych w momencie, gdy układ został pozostawiony samemu sobie: zupełnie analogicznie do tego, w jaki sposób szarpnięcia struny przygotowuje superpozycję jej drgań własnych. O ile dla muzyka zjawisko superpozycji drgań jest zupełnie normalne, a składowe tony proste mają specjalną nazwę – „alikwoty”, o tyle możliwość występowania obiektów kwantowych w superpozycji stanów niepokoiła twórców mechaniki kwantowej i wywołuje dyskusje do dziś. Któż nie słyszał o słynnym „kocie Schrödingera”, zamkniętym w pudle wraz z układem kwantowym w superpozycji dwóch stanów, z których jeden uśmierca zwierzę? Kot miałby być na raz żywy i martwy…

Posłuchajmy kilku superpozycji stanów kwantowego oscylatora harmonicznego czyli tonów prostych z poprzedniego przykładu, teraz jednak brzmiących naraz. Amplitudy poszczególnych tonów prostych zostały tu zadane poprzez funkcję $p_{0n} = e^{-f_n/T}$. Jeżeli parametr T oznaczałby temperaturę pomnożoną przez stałą Boltzmanna k i podzieloną przez stałą Diraca $\hbar = h/2\pi$, to taki rozkład amplitud odpowiadałby zespołowi – chórowi nieoddziałujących oscylatorów w tej właśnie temperaturze. Przykłady 3a,3b. OscylatorKwantowyRosnacaTemperatura.mp3, OscylatorKwantowyRosnacaTemperaturaCiagly.mp3 ilustruje brzmienie tego chóru przy rosnącej temperaturze. Rysunek 3 przedstawia widma, spektrogramy i przebiegi ciśnienia akustycznego z przykładu OscylatorKwantowyRosnacaTemperaturaCiagly.mp3. Słuchacz zauważy, że gdyby zaśpiewać kolejne dźwięki tego przykładu, to wysokość ich będzie zawsze taka sama. Dźwięk jest jednak coraz bardziej jasny, jaskrawy. Obrazuje to następującą prawidłowość: wysokość dźwięku jest określona przez okresowość sygnału (rys. 3 przekonuje, że dodawanie poszczególnych tonów prostych nie zmienia w tym wypadku okresu drgań), zaś barwę dźwięku określa jego widmo, tj. zbiór amplitud poszczególnych tonów składowych. Dodawanie tonów składowych nie zmienia okresowości sygnału, o ile wszystkie częstotliwości tonów składowych są całkowitymi wielokrotnościami częstotliwości najniższej, tj. częstotliwości tonu podstawowego. Tak powstały wieloton nazywamy wielotonem harmonicznym. Rzeczywiście w naszym przykładzie mamy: $f_n = f_1(2n-1)$, n = 1, 2, 3… Wielotony harmoniczne charakteryzują się swoją wysokością dźwięku, podobnie jak tony proste i dlatego można z nich tworzyć melodie. Przykład 4.

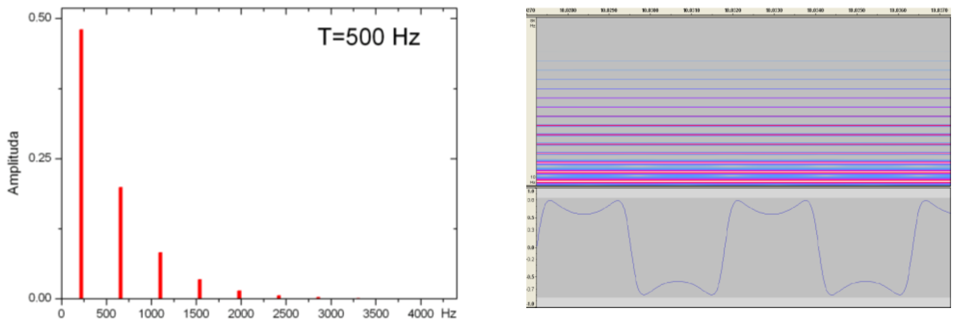
Oscyl_Kwant_Rozne_Dzw_Stala_Temp.mp3 przedstawia kilka wielotonów harmonicznych o różnych częstotliwościach podstawowych f_1. Amplitudy poszczególnych alikwotów zostały zadane wzorem $p_{0n} = e^{-f_n/T}$ podobnie jak na rys. 3, przy czym parametr T jest jednakowy dla wszystkich wielotonów. Czytelnik zwróci zapewne uwagę, że barwa dźwięku jest tu w pewien sposób „butelkowa". Nic w tym dziwnego; butelka to przecież piszczałka otwarta z jednego końca.



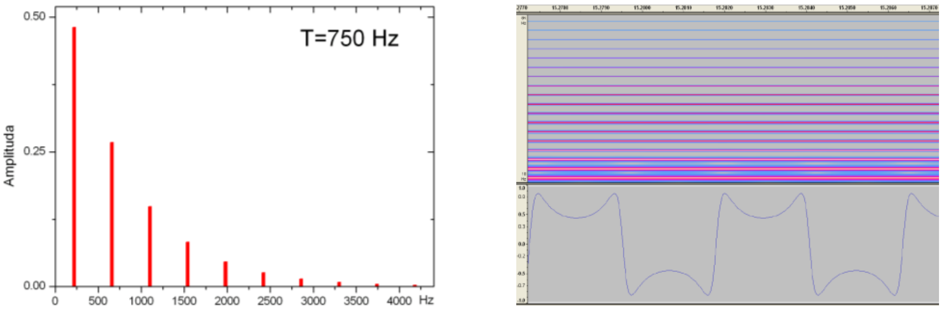
a)



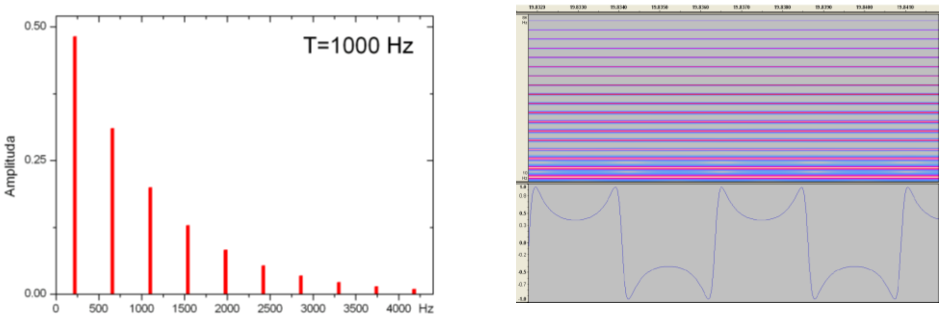
b)



c)



d)

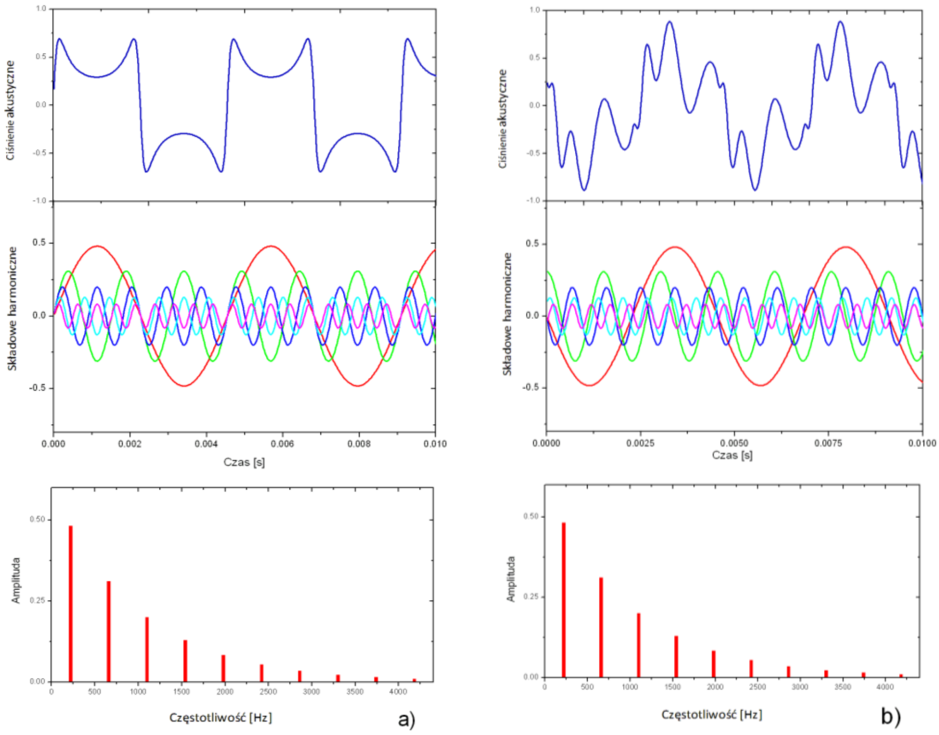


e)

Rys. 3a–e. Widma dźwięku, spektrogramy i przebiegi czasowe $p(t)=\sum_{n=1}^{25}\sin\left(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot(n-\tfrac{1}{2})\cdot t\right)\cdot A_n$, gdzie $A_n=\exp\left(-f_0\cdot(n-\tfrac{1}{2})/T\right)$ i $f_0 = 440$ Hz, sygnału w superpozycjach tonów prostych odpowiadających stanom własnym energii kwantowego oscylatora harmonicznego dla różnych wartości parametru T

Niezależność barwy od fazy i spektroskopia

Rysunek 4a przedstawia przebieg ciśnienia akustycznego w jednym z przykładów ilustracji kwantowego oscylatora harmonicznego z rys. 3. Pod przebiegiem sumarycznego ciśnienia akustycznego widzimy sinusoidy, odpowiadające kilku pierwszym składowym tonom prostym tego wielotonu harmonicznego. Łatwo się przekonać, skąd pochodzi kształt sumarycznego przebiegu: sinusoidy są ułożone tak, że fazy ich najszybszego wzrostu i najszybszego spadku przypadają w tych samych chwilach, stąd i superpozycja wykazuje tam obszary bardzo szybkiego wzrostu i bardzo szybkiego spadku. Spróbujmy zbadać, co się stanie, gdy składowe sinusoidy porozsuwamy, np. tak jak na rys. 4b. Superpozycja takich sinusoid daje przebieg zupełnie nieprzypominający poprzedniego. Przykład 5. OscylatorKwantowy_BARWA_FAZA.mp3 zawiera oba dźwięki podawane na przemian. Czy można je rozróżnić? Jeżeli nawet, to różnica jest niewielka, przy tak drastycznie różnym przebiegu ciśnienia akustycznego docierającego do naszych uszu.



Rys. 4. a): Przebieg czasowy ciśnienia akustycznego w wielotonie harmonicznym $p(t)=\sum_{n=1}^{25}\sin\left(2\cdot\pi\cdot 440\cdot(n-½)\cdot t\right)\cdot A_n$, gdzie $A_n=\exp\left(-440\cdot(n-½)/1000\right)$, wraz z kilkoma jego najniższymi tonami składowymi oraz widmo tego wielotonu, b): Przebieg czasowy ciśnienia akustycznego w wielotonie harmonicznym $p(t)=\sum_{n=1}^{25}\sin\left(2\cdot\pi\cdot 440\cdot(n-½)\cdot t+9\cdot\pi/n\right)\cdot A_n$, wraz z kilkoma jego najniższymi tonami składowymi oraz widmo tego wielotonu. Sinusoidy na rysunku b) są poprzesuwane w fazie względem sinusoid z rysunku a), co jest przyczyną różnic w sumarycznym przebiegu ciśnienia akustycznego. Barwy dźwięku obydwu wielotonów można porównać w przykładzie 5: OscylatorKwantowy_BARWA_FAZA.mp3

Jest to bardzo dziwne zjawisko, wziąwszy pod uwagę, że tony proste nie są fizycznie obecne w sygnale, lecz są one wynikiem abstrakcyjnego rozłożenia sygnału na sinusoidy. Sinusoidy składają się na wieloton zupełnie tak samo, jak amplitudy prawdopodobieństwa [5] w wypadkowej funkcji falowej układu kwantowego, wzmacniając się lub wygaszając. Po zmianie faz momenty wzmocnienia i wygaszenia są inne, dlatego sygnał wygląda zupełnie inaczej. Tymczasem brzmienie pozostaje praktycznie takie samo. Oznacza to, że nasz narząd słuchu działa jak spektrometr: rejestruje amplitudy tonów składowych, ale jest nieczuły na fazy tych składowych. Na przykład w spektroskopii promieniowania elektromagnetycznego atomów badamy amplitudy – natężenia poszczególnych linii widmowych, mimo, że fale wysyłane są przez badane atomy lub cząsteczki w sposób zupełnie niekontrolowany. Spójność faz występuje tylko w laserach, ale tam dotyczy to zwykle jednej częstotliwości. Również nasze postrzeganie kolorów światła za pośrednictwem narządu wzroku nie zależy od faz poszczególnych składowych widma. Różnica jest tylko taka, że postrzegana barwa światła niemonochromatycznego nie odpowiada jego widmu, lecz jest wynikiem systemu barw dopełniających, np. gdy do oka trafia jednocześnie monochromatyczne promieniowanie o barwie żółtej i niebieskiej, uzyskujemy wrażenie koloru zielonego. No cóż, oko jest po to by łudzić… Można też powiedzieć, że wzrok jest narządem syntezy, a słuch analizy.

Twierdzenie o tym, że narząd słuchu rozkłada sygnał dźwiękowy na składowe tony proste nazywa się akustycznym prawem Ohma, gdyż sformułował je Simon Ohm, bardziej znany z badań oporu elektrycznego. Natomiast twierdzenie o niezależności barwy dźwięku od fazy poszczególnych składowych przypisuje się Hermannowi Helmholtzowi, autorowi epokowego dzieła o wrażeniach dźwiękowych, jako podstawie teorii muzyki [8]. Zmarły w 1894 Helmholtz nie miał do dyspozycji elektronicznych urządzeń do nagrywania, syntezy i obróbki dźwięku. Dziś możemy sprawdzić jego twierdzenie na przykładach prawdziwych instrumentów. Jednym ze sposobów zmiany faz alikwotów jest skierowanie strzałki czasu w tył, czyli odtworzenie fragmentów utworów wstecz. Tam, gdzie ciśnienie akustyczne szybko wzrastało, teraz będzie szybko maleć itd. Przykłady 6. Instr1_wstecz.mp3 i Instr1_w_przod.mp3 oraz analogiczne Instr2_wstecz.mp3 itd. aż do Instr4_wstecz.mp3 i Instr4_w_przod.mp3 zostały w ten sposób wykonane. Proponuję, by Czytelnik najpierw wysłuchał instrumentu grającego wstecz i spróbował zgadnąć, jaki to instrument, zanim wysłucha nagrania, tak jak zostało oryginalnie zarejestrowane. Ocenę podobieństwa lub niepodobieństwa pozostawiam Czytelnikowi.

Podane przykłady ilustrują twierdzenie Helmholtza o niezależności barwy dźwięku od faz jego składowych harmonicznych. Nasz narząd słuchu funkcjonuje więc jako rejestrator widma mocy, tj. jedynie kwadratów wartości bezwzględnych amplitud poszczególnych alikwotów podobnie jak większość przyrządów używanych w spektroskopii atomowej i molekularnej. W drugiej części artykułu, który ukaże się w następnym numerze *Fotonu*, przekonamy się jednak, że twierdzenie to ma swoje granice stosowalności, i że wynikają one ze zjawiska, które jest podstawą jednej z najbardziej charakterystycznych zasad mechaniki kwantowej.

Przykłady dźwiękowe

1. TonyProste.mp3; kilka tonów prostych o częstotliwościach i czasach trwania odpowiadających tematowi *Sztuki Fugi* J.S. Bacha w stroju naturalnym.
2. Tony_Oscylatora_Kwantowego.mp3; 20 pierwszych tonów prostych odpowiadających kwantowemu oscylatorowi harmonicznemu o częstotliwości podstawowej 110 Hz (klasycznie 220 Hz).
3. 3a: OscylatorKwantowyRosnacaTemperatura.mp3; 3b: OscylatorKwantowyRosnacaTemperaturaCiagly.mp3 wielotony o widmach z rys. 3.
4. Oscyl_Kwant_Rozne_Dzw_Stala_Temp.mp3; kilka dźwięków o barwie odpowiadającej kwantowym oscylatorom harmonicznym o różnej częstotliwości w jednej temperaturze.
5. OscylatorKwantowy_BARWA_FAZA.mp3; odcinki dźwięków z rys 4a i 4b. Czytelnik jest proszony o rozróżnienie tych odcinków. Sekwencja odcinków jest dana w rozwiązaniach zagadek.
6. Instr1_wstecz.mp3, Instr1_w_przod.mp3, Instr2_wstecz.mp3… Instr4_w_przod.mp3…; nagrania fragmentów muzyki wykonywanej na różnych instrumentach. Czytelnik jest proszony o wysłuchanie najpierw wersji wstecz i o odgadnięcie instrumentu.

Rozwiązania zagadek

5. b) a) a) b) a) b) b) a).
6. trąbka, skrzypce, klarnet, organy.

Literatura i przypisy

[1] J.A. Janik, *Ontologiczne aspekty fizyki*, Polska Akademia Umiejętności, Kraków, 2011.

[2] K. Zalewski, *Wykłady z nierelatywistycznej mechaniki kwantowej*, PWN, Warszawa 1997.

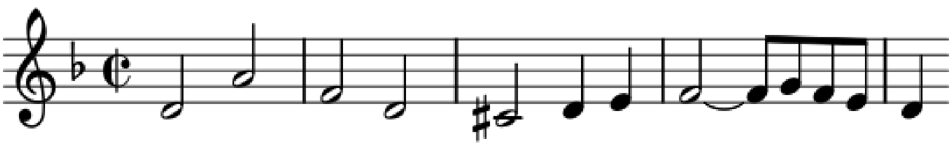
[3] S. Brandt, H.D. Dahmen, *Mechanika kwantowa w obrazach*, PWN, Warszawa, 1989.

[4] P. Błasiak, *Combinatorial Model of the Heisenberg-Weyl Algebra*, rozprawa habilitacyjna, raport IFJ PAN 2010, i w pracach tam cytowanych podaje ciekawe przykłady obiektów makroskopowych: grafów, procesów losowania i dokładania kul do urn, ścieżek na szachownicy, podlegających regułom komutacji używanym w mechanice kwantowej.

[5] R.P. Feynman, *QED Osobliwa teoria światła i materii*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1998, s. 31–41;
Sześć łatwych kawałków, Prószyński i S-ka, Warszawa 1998, s. 178 (uwaga na błędy w tłumaczeniu z angielskiego).

[6] R.P. Feynman, *QED Osobliwa teoria światła i materii*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1998, s. 21. R. Feynman, mówi tu kolorze czystym, tj. takim, którego nie da się rozszczepić na kolory składowe. Taki kolor czysty odpowiadałby wysokości dźwięku, w odróżnieniu od koloru rzeczywistego zależnego od udziału poszczególnych częstotliwości w sygnale optycznym i przez to pojęciowo bliższego pojęciu barwy dźwięku.
[7] J.S. Bach, *Kunst der Fuge*, BWV 1080.
[8] H. von Helmholtz, *Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik*, Vieweg, Braunschweig 1863, Nachdruck: Minerva-Verlag, Frankfurt/Main 1981, ISBN 3-8102-0715-2.

Początek dzieła *Sztuka fugi* (*Die Kunst der Fuge*) Jana Sebastiana Bacha. Pierwsze dźwięki tego utworu zostały użyte w kilku ilustracjach dźwiękowych w tym artykule



Temat wszystkich fug Bacha (z wyjątkiem ostatniej niedokończonej) z dzieła *Die Kunst der Fuge*