KĄCIK ZADAŃ

Zadania dla liceum

Jadwiga Salach

Temat 1. Znaczenie średniej gęstości Ziemi

Ziemia ma największą średnią gęstość ze wszystkich planet Układu Słonecznego. Gdyby średnia gęstość Ziemi, przy zachowaniu takiego samego promienia, była cztery razy mniejsza niż obecnie (byłaby ona wówczas zbliżona do średniej gęstości Słońca!), to jak wpłynęłoby to na

1. wartość przyspieszenia grawitacyjnego na powierzchni Ziemi?
2. wartość pierwszej prędkości kosmicznej?
3. wartość drugiej prędkości kosmicznej?
4. promień orbity stacjonarnych satelitów Ziemi?
5. okres obiegu stacjonarnych satelitów Ziemi?
6. okres obiegu Księżyca wokół Ziemi przy założeniu, że promień jego orbity byłby taki sam, jak obecnie?
7. promień orbity Księżyca przy założeniu, że wartość jego prędkości na orbicie nie ulegałaby zmianie?

Uzasadnij wszystkie odpowiedzi.

Temat 2. Druga prędkość kosmiczna

1. Wyjaśnij, co oznacza termin: „druga prędkość kosmiczna".
2. Wyprowadź wzór na wartość drugiej prędkości kosmicznej (będziemy ją oznaczać v_2) dla ciała wyrzuconego z powierzchni Ziemi; pomiń oddziaływanie innych ciał niebieskich.
3. Jakie będą tory ciała wyrzuconego z powierzchni Ziemi z prędkością o wartości v_2, ale o **dowolnych** kierunkach?
4. Załóżmy, że ciało wyrzucono z Ziemi z prędkością o wartości v_2. Wyprowadź wzór opisujący zależność energii kinetycznej ciała od odległości x od powierzchni Ziemi: $E_k(x)$. We wzorze tym powinny występować jako stałe współczynniki wyłącznie: początkowa energia kinetyczna ciała (E_{k2}) i promień Ziemi R.
5. Narysuj wykres zależności $E_k(x)$ i odpowiedz na pytanie, w jakiej odległości od powierzchni Ziemi energia kinetyczna ciała zmaleje (w stosunku do E_{k2}) 2, 3, 4 razy.
6. Zastanów się, czy wyprowadzona w punkcie 4. zależność jest słuszna w przypadku dowolnego kierunku, w którym ciało zostało wyrzucone z powierzchni Ziemi, czy tylko wówczas, gdy zostało ono wyrzucone pionowo. Uzasadnij odpowiedź.

7. W tym samym układzie współrzędnych (punkt 5.) narysuj dla porównania wykresy zależności energii potencjalnej tego ciała oraz jego energii całkowitej od odległości x od powierzchni Ziemi.

Rozwiązania

1. Odpowiedzi:

1. Wartość przyspieszenia ziemskiego byłaby 4 razy mniejsza.
2. Wartość pierwszej prędkości kosmicznej byłaby 2 razy mniejsza.
3. Wartość drugiej prędkości kosmicznej byłaby 2 razy mniejsza.
4. Promień orbity stacjonarnego satelity Ziemi byłby $\sqrt[3]{4} \cong 1{,}6$ razy mniejszy.
5. Okres obiegu Ziemi przez stacjonarnego satelitę Ziemi nie uległby zmianie.
6. Okres obiegu Księżyca wokół Ziemi byłby 2 razy większy.
7. promień orbity Księżyca byłby 4 razy mniejszy.

Uzasadnienie:

Odpowiedzi na pytania postawione w zadaniu uzyskujemy na podstawie obliczeń. Należy zatem wyprowadzić wzory, z których wynika, w jaki sposób wielkości, o które pytamy, zależą od gęstości Ziemi. Masę Ziemi wyrażamy w każdym przypadku przez jej objętość i gęstość: $M_z = V_z\rho$. W przypadkach 2, 4, 6, 7 korzystamy z faktu, że siłą dośrodkową, potrzebną do utrzymania satelity w ruchu po okręgu jest siła grawitacji (porównujemy więc odpowiednie wzory).

1. Z drugiej zasady dynamiki

$$a_g = \frac{F_g}{m}, \qquad a_g = \frac{GM_z}{R_z^2} = \frac{GV_z\rho}{R_z^2} = \frac{GV_z}{R_z^2}\cdot\frac{\rho_0}{4} = \frac{g}{4}.$$

2. $$\frac{mv_1^2}{R_z} = \frac{GM_z}{R_z^2}, \quad \text{skąd}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_z}{R_z}} = \sqrt{\frac{GV_z\rho}{R_z}} = \sqrt{\frac{GV_z}{R_z}\cdot\frac{\rho_0}{4}} = \frac{1}{2}v_{01}.$$

3. $$v_2 = \sqrt{2}\cdot v_1, \quad \text{zatem} \quad v_2 = \frac{1}{2}\cdot v_{02}.$$

4. Satelita stacjonarny (o masie m_s) obiega Ziemię w płaszczyźnie jej równika z prędkością kątową równą prędkości kątowej obrotu Ziemi (ω_z) wokół własnej osi.

$$m_s\omega_z^2 r = \frac{GM_z m_s}{r^2},$$

skąd

$$r^3 = \frac{GM_z}{\omega_z^2} = \frac{GV_z\rho}{\omega_z^2}; \quad r = \sqrt[3]{\frac{GV_z\rho}{\omega_z^2}}; \quad r = \sqrt[3]{\frac{GV_z}{\omega_z^2}\cdot\frac{\rho_0}{4}}; \quad r = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\cdot r_0.$$

5. Gęstość planety nie ma żadnego związku z okresem jej obrotu wokół własnej osi.
6. $m_k\omega_k^2 r = \dfrac{GM_z m_k}{r^2}, \quad \dfrac{4\pi^2}{T_k^2} = \dfrac{GM_z}{r^3},$ skąd $T_k^2 = \dfrac{4\pi^2 r^3}{GM_z} = \dfrac{4\pi^2 r^3}{GV_z\rho};$

$$T_k^2 = \frac{4\pi^2 r^3\cdot 4}{GV_z\rho_0} = 4T_{k0}^2; \qquad T_k = 2T_{k0}.$$

7. $\dfrac{m_k v^2}{r} = \dfrac{GM_z m_k}{r^2},$ skąd

$$r = \frac{GM_z}{v^2} = \frac{GV_z\rho}{v^2}; \qquad r = \frac{GV_z}{v^2}\cdot\frac{\rho_0}{4}, \qquad r = \frac{r_0}{4}.$$

2. Odpowiedzi:

1. Druga prędkość kosmiczna to najmniejsza prędkość, z którą należy wyrzucić ciało z Ziemi, aby oddaliło się do nieskończoności. (Uwaga: Słowo najmniejsza oznacza, że nieskończenie daleko od Ziemi energia kinetyczna tego ciała będzie równa zeru). Rachunek nie uwzględnia pokonywania oporów atmosfery.
2. Korzystamy z zasady zachowania energii mechanicznej w polu grawitacyjnym Ziemi. W chwili wyrzucenia z Ziemi całkowita energia mechaniczna ciała (o masie m) wynosi

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GM_z m}{R_z^2}.$$

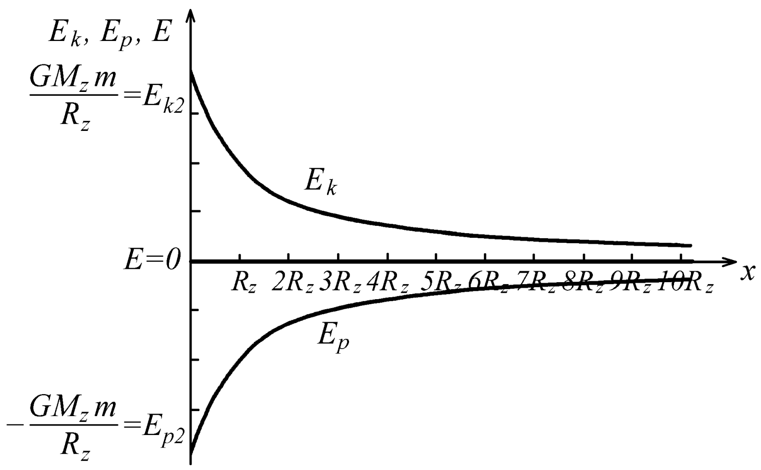
Nieskończenie daleko od Ziemi całkowita energia mechaniczna tego ciała jest równa zeru, zatem

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GM_z m}{R_z^2} = 0, \quad \text{skąd} \quad v_2 = \sqrt{\frac{2GM_z}{R_z}}.$$

3. Ciała wyrzucone z prędkościami o wartości v_2, ale o różnych kierunkach będą się poruszały po różnych torach. Ciało wyrzucone pionowo będzie się oddalało od Ziemi po linii prostej; jeśli kierunek $\vec{v}_2$ będzie inny – ciało będzie się oddalało po łuku paraboli.
4. Jak już stwierdzono w punkcie 2., całkowita energia mechaniczna ciała wyrzuconego z Ziemi z drugą prędkością kosmiczną jest stała i równa zeru podczas całego ruchu, zatem

$$E_{k2} - \frac{GM_z m}{R_z} = E_k(x) - \frac{GM_z m}{R_z + x} = 0, \quad \text{skąd} \quad E_k(x) = E_{k2} \cdot \frac{R_z}{R_z + x}.$$

5. Gdy $x = R_z,\ E_k = \frac{E_{k2}}{2}$, gdy $x = 2R_z,\ E_k = \frac{E_{k2}}{3}$, gdy $x = 3R_z,\ E_k = \frac{E_{k2}}{4}$... itd.



6. Wyprowadzone wzory są słuszne przy dowolnym kierunku $\vec{v}_2$ – wynika to z zasady zachowania energii mechanicznej (energia kinetyczna nie zależy od kierunku prędkości, tylko od jej wartości).

7. $E_{p2}(x) = -\frac{GM_z m}{R_z + x}$, zatem $E_{p2} = -E_k(x)$, $E_{c2} = 0$.