Odgłosy z jaskini (14)
Grubas i chudzielec

Adam Smólski

Oto zadanie, które miało trafić do zestawów „Lwiątka 2007”:

Grubas (GR) i chudzielec (CH) na jeziorze zamierzają skoczyć z łódki do wody tak, by odepchnąć ją z możliwie największą prędkością. Siły oporu pomijamy. W jakiej kolejności powinni skoczyć?

A. Koniecznie GR, CH.
B. Koniecznie CH, GR.
C. Koniecznie obaj jednocześnie.
D. Kolejność nie ma znaczenia, a skok jednoczesny daje gorszy efekt.
E. Kolejność nie ma znaczenia i taki sam efekt da skok jednoczesny.

Kombinujemy następująco: jeśli pasażerowie łódki skaczą jeden po drugim, to pierwszy z nich przekazuje pęd nie samej łódce, ale łódce obciążonej jeszcze ciałem drugiego. Dopiero drugi „odrzuca” pustą łódkę. Aby więc skaczący przekazali samej łódce łącznie jak największy pęd, muszą obaj „skoczyć jako pierwsi”, to znaczy jednocześnie. Odpowiedź C.

Zadanie wymyślił grubas i jak zwykle bardzo był z siebie zadowolony. Ale chudzielec miał wątpliwości i zadanie zdyskwalifikowaliśmy. Wątpliwości dotyczyły tego, czy wynik nie zależy przypadkiem od przyjętego modelu. Spróbuję to tutaj częściowo zbadać.

Oznaczmy masy grubasa, chudzielca i łódki odpowiednio przez m_g, m_c i M. Załóżmy na początku, że skoczek odbija się od łódki z tą samą względem niej prędkością, niezależnie od tego, czy na łódce jeszcze ktoś siedzi. Niech dla grubasa ta prędkość będzie oznaczona jako v_g, a dla chudzielca v_c.

Jeśli pierwszy skoczy grubas, przekaże łódce – i chudzielcowi – pęd o wartości $m_g v_g$, z czego łódka „dostaje” $m_g v_g \cdot \dfrac{M}{M+m_c}$. Skaczący jako drugi chudzielec przed skokiem ma skierowany „do tyłu” pęd o wartości $m_c V$, gdzie V to prędkość, z jaką już płynie łódka, a po skoku pęd $m_c(v_c - V)$, bo prędkość chudzielca względem wody to po skoku $v_c - V$. Zmiana pędu chudzielca ma wartość $m_c v_c$ i taki pęd zostanie przekazany łódce. Łącznie łódka uzyska pęd $m_g v_g \cdot \dfrac{M}{M+m_c} + m_c v_c$, czyli prędkość $\dfrac{m_g v_g}{M+m_c} + \dfrac{m_c v_c}{M}$. Gdyby pierwszy skakał chudzielec, byłoby to $\frac{m_c v_c}{M+m_g}+\frac{m_g v_g}{M}$. Za to gdy skaczą razem, przekazują łódce pęd $m_g v_g + m_c v_c$, co daje prędkość $\frac{m_g v_g}{M}+\frac{m_c v_c}{M}$, większą jak widać od obydwu poprzednich. Na razie nasz model potwierdza intuicję grubasa, odpowiedź C.

Tyle, że nasze początkowe założenie jest mocno podejrzane. Grubas nie odepchnie się od ciężkiej łódki z tak dużą prędkością, z jaką jest w stanie odepchnąć od siebie lekką łódkę. Dociążenie łódki chudzielcem może tu wiele zmienić.

Aby nasz model był bliższy rzeczywistości, przyjmijmy, że każdy ze skoczków, niezależnie od warunków w jakich skacze, wkłada w odbicie zawsze tę samą energię, E_g w przypadku grubasa i E_c w przypadku chudzielca. Prędkość łódki (względem wody) po skoku pierwszego skoczka oznaczmy V_1, końcową zaś V_2. Prędkości skoczków względem łódki to jak poprzednio v_g i v_c. Niech M – masa pustej łódki. Przypuśćmy, że pierwszy skacze grubas.

Zasada zachowania pędu daje nam dwa równania na cztery niewiadome V_1, V_2, v_g i v_c:

$$\begin{cases} (M+m_c)V_1 = m_g v_g \\ M(V_2 - V_1) = m_c v_c \end{cases}$$

a zasada zachowania energii następne dwa:

$$\begin{cases} E_g = \frac{1}{2}(M+m_c)V_1^2 + \frac{1}{2}m_g v_g^2 \\ E_c = \frac{1}{2}M(V_2 - V_1)^2 + \frac{1}{2}m_c v_c^2 \end{cases}$$

Rozwiązanie ze względu na V_2 daje

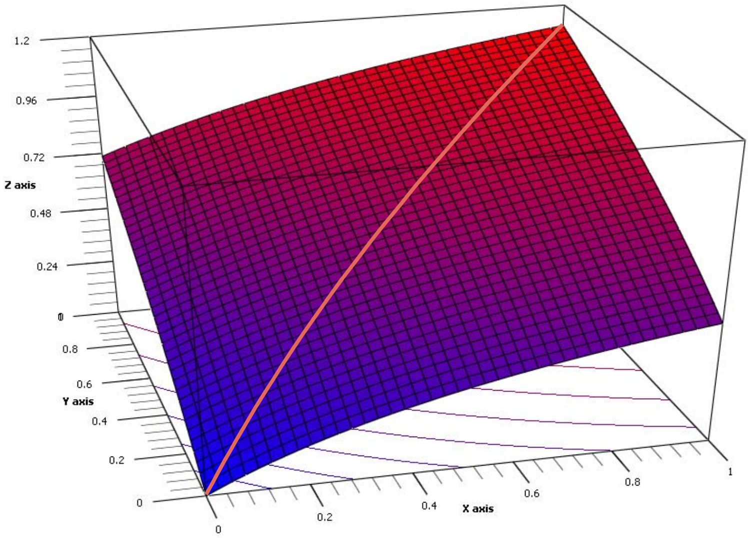
$$V_2 = \sqrt{\frac{2m_g E_g}{(M+m_g)(M+m_g+m_c)}} + \sqrt{\frac{2m_c E_c}{M(M+m_c)}}\,.$$

Niewiele widać po tak skomplikowanym wyniku. Przyjmijmy dodatkowe upraszczające (i chyba sensowne) założenie, mianowicie że energie E_g i E_c są proporcjonalne do mas skoczków. Konkretnie, wprowadźmy zmienne $x = \frac{m_g}{M}$, $y = \frac{m_c}{M}$ i niech $E_g = E \cdot x$, $E_c = E \cdot y$.

Otrzymujemy

$$V_2 = \sqrt{\frac{2E}{M}} \left(\frac{x}{\sqrt{(1+x)(1+x+y)}} + \frac{y}{\sqrt{1+y}} \right).$$

Oto wykres czynnika w nawiasie (pokazana jest także linia odpowiadająca $x = y$ oraz rzuty poziomic na płaszczyznę xy):



Interesujmy się obszarem $x, y \leq 1$, czyli sytuacją, gdy żaden z pasażerów nie jest cięższy od pustej łódki.

Powierzchnia wykresu nieznacznie „przechyla się" na stronę $x > y$. Oznacza to, że jeśli grubas jest faktycznie cięższy od chudzielca i skacze jako pierwszy, końcowa prędkość łódki jest mniejsza, niż przy odwrotnej kolejności. Przemawiałoby to za odpowiedzią B. Ale wyższość B nad A jest minimalna!

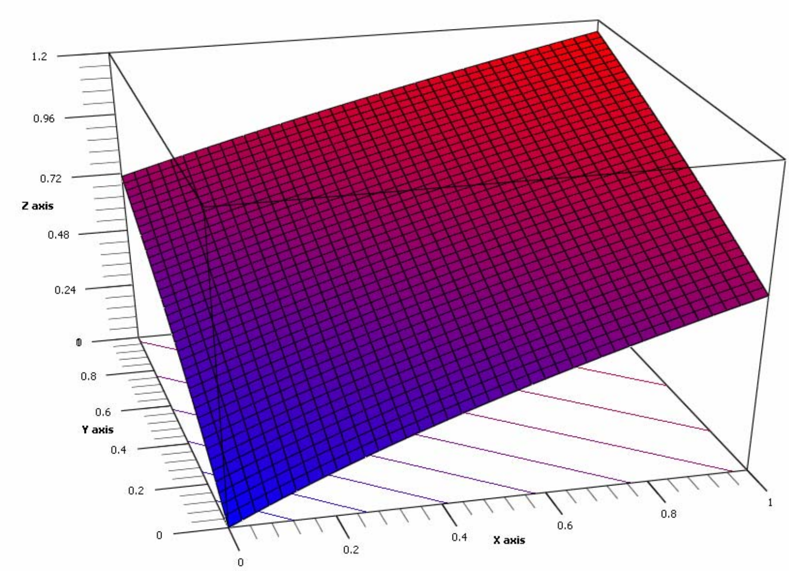
Musimy jeszcze sprawdzić, co się dzieje przy skoku jednoczesnym. Mamy wtedy równania $MV = m_g v_g + m_c v_c$ oraz $E_g + E_c = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m_g v_g^2 + \frac{1}{2}m_c v_c^2$ (V to prędkość końcowa łódki). Trochę za mało jak na trzy niewiadome. Dołóżmy $v_g = v_c$, bo tak chyba należy rozumieć równoczesność skoku (skoczkowie tworzą jeden czworonożny obiekt). Wówczas

$$V = \sqrt{\frac{2(m_g + m_c)(E_g + E_c)}{M(M + m_g + m_c)}} .$$

Przy *x*, *y* zdefiniowanych jak poprzednio

$$V = \sqrt{\frac{2E}{M}} \cdot \frac{x+y}{\sqrt{1+x+y}}\,.$$

Więcej to czy mniej niż przy wariancie B? Popatrzmy na wykres drugiego czynnika:



To jest praktycznie tyle samo, co przy chudzielcu skaczącym jako pierwszy, oraz wyraźnie więcej niż przy pierwszym – grubasie. Formalnie rzecz biorąc, jest to minimalnie więcej także niż w wariancie B. Zatem i tym razem początkowa intuicja grubasa – odpowiedź C – potwierdza się, przynajmniej przy wszystkich poczynionych przez nas dalej założeniach. Jak byłoby w innych, bardziej skomplikowanych modelach (na przykład gdy każdy skoczek jest ściśniętą i masywną sprężyną), nie wiem. Dlatego na zadanie do Lwiątka problem na pewno się nie nadawał!