Temperatura czarnej kulki umieszczonej w ognisku soczewki i ogrzanej promieniami słonecznymi – zadanie z XXIX Olimpiady fizycznej 1979/1980[1]

Tadeusz Molenda

Stopień III, zadanie teoretyczne

Dana jest soczewka cienka o średnicy d = 5 cm i ogniskowej f = 10 cm. Za pomocą tej soczewki, przez zogniskowanie promieni słonecznych, chcemy maksymalnie ogrzać ciało doskonale czarne w postaci kulki o promieniu r. Wyznacz zależność temperatury, do której możemy ogrzać kulkę, od jej promienia r.

Zakładamy, że soczewka przepuszcza całe padające nań światło i że proces ogniskowania zachodzi w powietrzu w temperaturze T_0 = 300 K. Zakładamy ponadto, że kulka doskonale przewodzi ciepło, dzięki czemu w każdej chwili temperatura w każdym jej punkcie jest taka sama.

Dane:

1) stała słoneczna

$$S = 1360{,}8\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

2) stała Stefana-Boltzmanna

$$\sigma = 5{,}67\cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\cdot \mathrm{K}^4}$$

3) temperatura powierzchni Słońca

$$T_\mathrm{S} = 6000\ \mathrm{K}$$

---

[1] Zadanie zostało udostępnione z bazy zadań Olimpiady Fizycznej w Szczecinie i dla *Fotonu* przygotowane przez przewodniczącego Komitetu Okręgowego OF w Szczecinie dra Tadeusza Molendę.

Zadanie wraz z rozwiązaniem zostało opublikowane w czasopiśmie *Fizyka w Szkole* nr 1, 1981 r. przez ówczesnego sekretarza naukowego – Waldemara Gorzkowskiego i kierownika organizacyjnego – Andrzeja Kotlickiego z Komitetu Głównego Olimpiady Fizycznej, następnie w zbiorze „Olimpiada Fizyczna XXIX–XXXI", WSiP, Warszawa 1986, s. 65–68, przez: Andrzej Nadolny (pełnił funkcję sekretarza naukowego KGOF), Krystyna Pniewska (była kierownikiem organizacyjnym KGOF) też jako zad. nr 95 w zbiorze „Wybrane zadania z 43 olimpiad fizycznych", MAGIPPA, Warszawa 1994, przez: Włodzimierz Ungier (pełnił funkcję sekretarza naukowego dla zad. teoretycznych KGOF) i Mirosław Hamera (był kierownikiem organizacyjnym KGOF).

Zadania z olimpiad fizycznych są na ogół oryginalne. Pomysły pochodzą z różnych źródeł, m.in. składanych przez nauczycieli i samych zawodników olimpiady. Propozycje zadań są zmieniane w wyniku dyskusji w Komitecie Głównym OF i często nie przypominają tekstu „pomysłodawcy" (przyp. – Tadeusz Molenda, Instytut Fizyki, Uniwersytet Szczeciński).

Uwaga: Całkowita energia wypromieniowania w ciągu 1 s przez 1 m^2 powierzchni ciała doskonale czarnego, zgodnie z prawem Stefana-Boltzmanna, wynosi σT^4, gdzie σ oznacza stałą Stefana-Boltzmanna, a T – temperaturę bezwzględną ciała.

Rozwiązanie

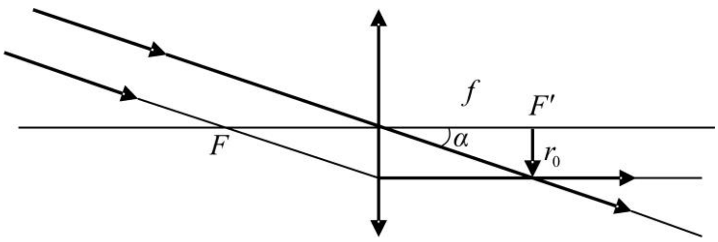
Obrazem Słońca, który powstaje dokładnie w płaszczyźnie ogniskowej soczewki (rys. 1), jest koło o promieniu r_0 takim, że:

$$\frac{r_0}{f} = \mathrm{tg}\alpha\,, \tag{1}$$

gdzie α oznacza promień kątowy Słońca widzianego z Ziemi.

Ponieważ kąt α jest mały, można z dobrym przybliżeniem przyjąć, że $\mathrm{tg}\alpha \approx \alpha$, a zatem:

$$r_0 = \alpha f\,.$$



Rys. 1.

Kiedy na kulkę doskonale czarną nie pada światło słoneczne, wówczas pozostaje ona w równowadze termicznej z otoczeniem, tzn. wypromieniowuje ona w jednostce czasu tyle energii, ile jej pochłania z otoczenia. Szybkość wypromieniowania tej energii (moc) zgodnie z prawem Stefana-Boltzmanna wynosi:

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2 \sigma T_0^4\,, \tag{2}$$

gdzie T_0 jest temperaturą w stanie równowagi termicznej.

Gdy na kulkę skierujemy wiązkę światła słonecznego, wtedy pochłania ona energię tego światła. Jeżeli promień kulki r jest większy niż r_0, wówczas cała ogniskowana energia jest pochłaniana przez kulkę. Energia tego promieniowania dochodząca w ciągu jednej sekundy wynosi $\frac{1}{4}\pi d^2 S$. Oprócz tego kulka absorbuje, tak jak poprzednio, promieniowanie termiczne z otoczenia.

Odpowiadający temu dopływ energii w ciągu jednej sekundy zgodnie z (2) wynosi $4\pi r^2\sigma T_0^4$. Z drugiej strony kulka mając temperaturę T, wypromieniowuje w czasie jednej sekundy energię $4\pi r^2\sigma T^4$. Ponieważ kulka doskonale czarna w stanie ustalonej temperatury emituje tyle energii, ile jej pochłania, bilans energii można więc zapisać w postaci:

$$4\pi r^2\sigma T^4 = 4\pi r^2\sigma T_0^4 + \frac{1}{4}\pi S d^2, \quad r \geq \alpha f. \tag{3}$$

Stąd

$$T = \sqrt[4]{T_0^4 + \frac{S}{\sigma}\left(\frac{d}{4r}\right)^2}. \tag{4}$$

Jeżeli promień kulki jest mniejszy od $r_0 = \alpha f$, to będzie padać na nią tylko część energii skupianej przez soczewkę, która wynosi:

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \frac{1}{4}\pi S d^2,$$

czyli

$$\frac{1}{4}\left(\frac{r}{\alpha f}\right)^2 \pi S d^2.$$

Bilans energii w tym przypadku jest następujący:

$$4\pi r^2\sigma T^2 = 4\pi r^2\sigma T_0^4 + \frac{1}{4}\pi S d^2\left(\frac{r}{\alpha f}\right)^2, \quad r < \alpha f. \tag{5}$$

Stąd

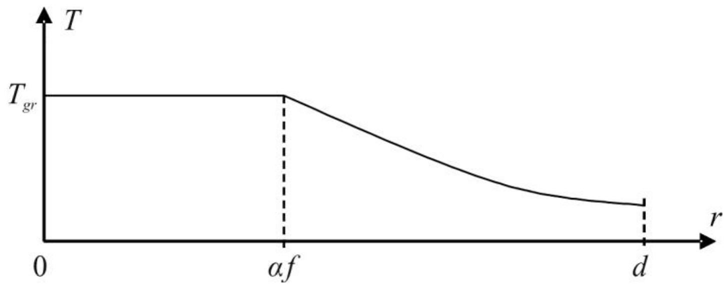
$$T = \sqrt[4]{T_0^4 + \frac{S}{\sigma}\left(\frac{d}{4\alpha f}\right)^2} = T_{gr}. \tag{6}$$

Zauważmy, że temperatura ta jest stała i dalsze zmniejszanie rozmiarów kulki nie zwiększa T. Jest to temperatura graniczna T_{gr}. Wykres zależności $T(r)$ podany jest na rys. 2.

Dyskusję przypadku, gdy średnica kulki przekracza średnicę soczewki pozostawiamy Czytelnikowi.

Oszacujmy temperaturę graniczną T_{gr}. Zauważmy, że Słońce z bardzo dobrym przybliżeniem możemy traktować jako ciało doskonale czarne i wówczas zgodnie z prawem Stefana-Boltzmanna energia wypromieniowana przez powierzchnię Słońca w ciągu jednej sekundy zgodnie z (2) wynosi

$$\frac{dE_S}{dt} = 4\pi R_S^2\sigma T_S^4. \tag{7}$$



Rys. 2

Stała słoneczna to energia, jaką promieniowanie słoneczne przenosi w ciągu jednej sekundy przez powierzchnię 1 m^2 ustawioną prostopadle do kierunku Ziemia–Słońce, w odległości od Słońca równej odległości Ziemia–Słońce, stąd możemy zapisać

$$S = \frac{4\pi R_S^2 \sigma T_S^4}{4\pi R_{ZS}^2}, \tag{8}$$

gdzie T_S – temperatura powierzchni Słońca, R_S – promień Słońca, R_{ZS} – odległość Ziemia–Słońce.

Ponieważ promień kątowy Słońca α wynosi

$$\alpha = \frac{R_S}{R_{ZS}},$$

stąd otrzymany związek:

$$\frac{S}{\alpha^2 \sigma} = T_S^4. \tag{9}$$

Po podstawieniu (9) do (6), otrzymujemy wzór na temperaturę graniczną kulki w postaci:

$$T_{gr} = \sqrt[4]{T_0^4 + \left(\frac{d}{4f}\right)^2 T_S^4} \approx T_S \sqrt{\frac{d}{4f}}. \tag{10}$$

Do tego samego rozwiązania, gdy promień kulki jest mniejszy od $r_0 = \alpha f$, można dojść stosując odmienną metodę. Zauważmy, że powierzchnię Słońca z kulki widać wewnątrz stożka o kącie rozwarcia 2β, gdzie:

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{d}{2f}$$

tzn. w kącie bryłowym $\gamma_1 = 2\pi(1 - \cos\beta)$, zaś otoczenie o temperaturze T_0 widać w kącie bryłowym $\gamma_2 = 2\pi(1 + \cos\beta)$.

W jednostce czasu na kulkę, z kąta bryłowego γ_1 pada promieniowanie słoneczne o energii $\gamma_1 r^2 \sigma T_S^4$ (T_S – temperatura powierzchni Słońca), a z kąta bryłowego γ_2 – promieniowanie otoczenia o energii $\gamma_2 r^2 \sigma T_0^4$ (T_0 – temperatura otoczenia). Kulka po ogrzaniu się do temperatury T emituje w jednostce czasu promieniowanie o energii $4\pi r^2 \sigma T^2$. W stanie równowagi termicznej bilans energetyczny ma postać

$$4\pi r^2 \sigma T^2 = \gamma_1 r^2 \sigma T_S^4 + \gamma_2 r^2 \sigma T_0^4$$

Podstawiając wielkości γ_1 oraz γ_2 otrzymamy

$$4\pi r^2 \sigma T^2 = 2\pi(1-\cos\beta) r^2 \sigma T_S^4 + 2\pi(1+\cos\beta) r^2 \sigma T_0^4 .$$

Drugie wyrażenie można pominąć w porównaniu z pierwszym, gdyż T_S^4 jest znacznie większe od T_0^4.

Stąd można wyznaczyć temperaturę kulki

$$T = T_S \sqrt[4]{\frac{1-\cos\beta}{2}} = T_S \sqrt{\sin\frac{\beta}{2}} . \tag{11}$$

Jest to wielkość stała, niezależna od promienia kulki.

Dla małych kątów β można przyjąć

$$\sin\frac{\beta}{2} \approx \frac{\beta}{2} \approx \frac{d}{4f} \tag{12}$$

Stąd otrzymujemy

$$T_{gr} = T_S \sqrt{\sin\frac{\beta}{2}} = T_S \sqrt{\frac{d}{4f}} . \tag{13}$$

Uzyskany wzór jest identyczny z poprzednio wyprowadzonym wzorem (10). Jak z niego widać, temperatura graniczna uzyskiwana przez kulkę zależy od parametrów soczewki, nie może jednak przekroczyć temperatury Słońca T_S. Dla cienkiej soczewki $\frac{d}{f} \leq 1$, zatem nie można uzyskać temperatury bliskiej temperaturze Słońca.

W naszym przypadku $\frac{d}{4f} = \frac{1}{8}$, stąd temperatura graniczna

$$T_{gr} = 2100 \text{ K}.$$

Zauważmy, że promień kątowy Słońca $\alpha \approx 0{,}0043$ rad. Wynika stąd, że temperaturę taką można teoretycznie uzyskać dla $r \leq 0{,}04$ mm (bo $r_0 \approx \alpha f$). Praktycznie wady soczewek powodują „rozmyte” ogniskowanie i nie obserwujemy aż tak wysokiej temperatury. Niemniej wiadomo, że w ognisku soczewki na skutek skupiania się tam promieni słonecznych można zapalić zapałkę.