

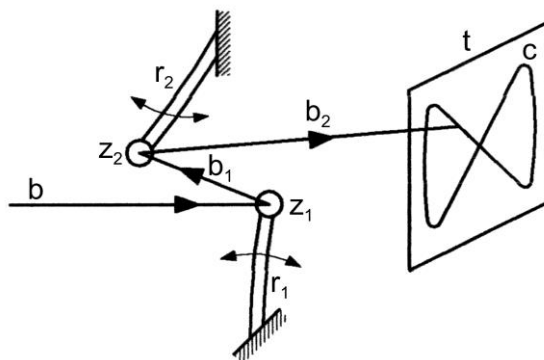


Badanie uogólnionych figur Lissajous

Stanisław Bednarek
Uniwersytet Łódzki

Wstęp

Badanie figur Lissajous umożliwia zapoznanie z bardzo ważną dla fizyki zasadą superpozycji. Znany układ mechaniczny do badania figur Lissajous przedstawiony jest schematycznie na rys. 1. Układ ten składa się z dwóch sprężystych taśm r_1 , r_2 , ustawionych prostopadłe do siebie. Taśmami mogą być np. brzeszczoty piłek do metalu. Jeden koniec każdej taśmy jest nieruchomy. Na niezamocowanych końcach taśm umieszczone są małe zwierciadła z_1 , z_2 . Końce taśm ze zwierciadłami odchyła się od położenia równowagi i puszcza swobodnie. W wyniku tego zwierciadła zostają wprowadzone w drgania. Wejściowa wiązka światła b , odbija się od drgającego zwierciadła z_1 i porusza jako wiązka b_1 . Następnie wiązka b_1 pada na drgające zwierciadło z_2 i po odbiciu od niego biegnie dalej, jako wiązka wyjściowa b_2 , która kreśli figury Lissajous c na ekranie t . Układy zbudowane według (opracowanego przez autora artykułu) i podanego na rys. 1 schematu, można znaleźć w licznych publikacjach, np. [1–3]. Istotnymi wadami tych układów są szybkie zmniejszanie się amplitudy drgań oraz trudna kontrola ich częstotliwości i różnicy faz. Te same wady wykazują też inne znane układy mechaniczne, np. z wahadłami podwójnymi o zmiennej długości na zawieszeniu bifilarnym [4].



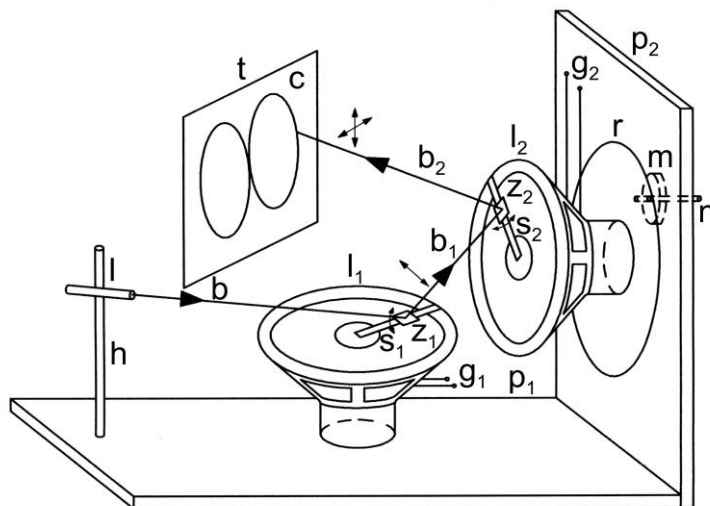
Rys. 1. Budowa znanego układu do badania figur Lissajous; r_1 , r_2 – sprężyste taśmy, z_1 , z_2 – małe zwierciadła, b – początkowa wiązka światła, b_1 – wiązka odbita od zwierciadła z_1 , b_2 – wiązka odbita od zwierciadła z_2 , t – ekran, c – figura Lissajous

Celem tego artykułu jest przedstawienie własnej konstrukcji przyrządu, który pozwala na utrzymanie stałej amplitudy oraz precyzyjną regulację częstotliwości i różnicy faz drgań składowych. Przyrząd ten umożliwia również osiąga-

nie wysokich częstotliwości drgań składowych, sięgających 320 Hz. Pozwala to otrzymać stabilne obrazy skomplikowanych figur Lissajous o małych różnicach częstotliwości i ustalonej różnicy faz. Przyrząd pozwala też na składanie drgań, zachodzących w dowolnych kierunkach. Dla ukośnych kierunków drgań otrzymuje się bardziej złożone przypadki figur Lissajous, które można nazwać uogólnionymi figurami Lissajous. Opisane możliwości zostały osiągnięte dzięki zastosowaniu dwóch specjalnie zaadaptowanych, niskotonowych głośników elektrodynamicznych, które wprawiają w drgania zwierciadła, połączone z ich membranami. Ruch tych zwierciadeł jest precyzyjnie kontrolowany za pomocą sygnałów elektrycznych, wytwarzanych przez generatory zasilające głośniki. Wprowadzone też zostaną wzory opisujące uogólnione figury Lissajous.

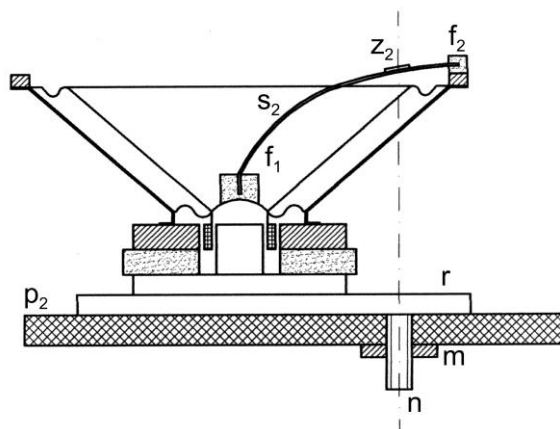
Budowa przyrządu

Widok ogólny przyrządu został przedstawiony na rys. 2. Rama przyrządu składa się z dwóch sztywnych, prostokątnych płyt – poziomej p_1 i pionowej p_2 o szerokości ok. 25 cm każda. Płyta pozioma ma długość ok. 40 cm, a pionowa ok. 30 cm. W zbudowanym modelu zastosowano płytę meblową o grubości 18 mm. Płyty można też wyciąć ze sklejki lub deski. Obie płyty zostały ustawione prostopadłe względem siebie i połączone wzdłuż boku o długości 25 cm za pomocą wkrętów i dwuskładnikowego kleju epoksydowego. (Klej epoksydowy używany był też do wszystkich innych połączeń podczas budowy tego przyrządu.)



Rys. 2. Budowa przyrządu; p_1 , p_2 – płyty: pozioma i pionowa, l_1 , l_2 – głośniki elektrodynamiczne: poziomy i pionowy, s_1 , s_2 – sprężyste paski folii na głośnikach poziomym i pionowym, z_1 , z_2 – lekkie zwierciadła, r – tarcza, m – śruba, n – nakrętka skrzydełkowa, l – wskaźnik laserowy, h – wspornik wskaźnika, g_1 , g_2 – gniazda głośników poziomego i pionowego do przyłączenia generatorów, pozostałe litery mają takie same znaczenie, jak w opisie rys. 1

Do poruszania zwierciadeł zastosowano dwa głośniki elektrodynamiczne, niskotonowe l_1 , l_2 o mocy 50 W i średnicy zewnętrznej 20 cm oraz impedancji 8Ω . Można też wykorzystać inne głośniki niskotonowe o podobnych parametrach. Do brzegu kosza każdego głośnika i środka membrany (tzw. kopułki) przyklejono kostki f_1 , f_2 o boku 1 cm, wycięte z korka, rys. 3. Przed przyklejeniem powierzchnie kostek, stykające się elementami głośnika, obrobiono pilnikiem w celu dopasowania ich kształtu do stykających się elementów. W każdej z kostek od strony membrany głośnika wykonano nożem nacięcia przeznaczone do wsunięcia i przyklejenia końców sprężystych pasków s_1 , s_2 . Szerokość każdego paska wynosiła 1 cm, a jego długość 11 cm. Długość ta w ogólnym przypadku powinna wynosić ok. $4/3$ promienia membrany głośnika, tak żeby pasek po wsunięciu jego końców w nacięcia kostek miał kształt łuku pokazanego na rys. 3. Paski zostały wycięte z folii poliestrowej o grubości 1 mm. Można też wykonać paski z innego, dostatecznie sprężystego i sztywnego tworzywa sztucznego. Wtedy ich grubość i szerokość należy dobrać doświadczalnie. W prawidłowo dobranych paskach nie powinny wzbudzać się drgania o wyższych częstotliwościach harmonicznych, podczas pracy głośnika i kąt odchylnia zwierciadła powinien być liniową funkcją przesunięcia membrany dla małych wartości tych przesunięć.



Rys. 3. Przekrój osiowy zaadaptowanego głośnika pionowego; f_1 , f_2 – kostki mocujące pasek folii odpowiednio do brzegu kosza i środka membrany (kopułki) głośnika, pozostałe litery mają takie same znaczenia, jak w opisie rys. 2

Z punktu widzenia mechaniki pasek stanowi zakrzywioną belkę, zginaną w pobliżu punktów zamocowania do brzegu głośnika. Zwierciadła z_1 , z_2 zostały przycięte z plastikowej, metalizowanej płytki wyjętej z uszkodzonego kalejdoskopu. Można też zastosować folię odbijającą światło w sposób lustrzany, albo bardzo cienkie zwierciadła szklane. Zwierciadło z_2 na głośniku pionowym l_2 miało kształt prostokąta o rozmiarach 30×20 mm, a rozmiary zwierciadła z_1 na

głośniku poziomym l_1 wynosiły 30×20 mm. Oba zwierciadła przyklejono do pasków s_1 , s_2 obok kostek f_2 , przy czym dłuższy bok zwierciadła z_1 ustawiono równolegle do paska s_1 , natomiast dłuższy bok zwierciadła z_2 był prostopadły do paska s_2 . Na tym zakończono adaptację głośnika poziomego l_1 .

Do tylnej powierzchni rdzenia głośnika pionowego l_2 przyklejono jeszcze okrągłą tarczę r , wyciętą z blachy aluminiowej o grubości 1,5 mm (można też wykonać tarczę z innego, dostatecznie sztywnego materiału). Tarczę umieszczono mimośrodowo względem osi głośnika, przesuwając ją do brzegu kosza w kierunku zwierciadła. Do tarczy przyklejono prostopadle śrubę n , tak umieszczoną, żeby jej oś przechodziła przez środek zwierciadła z_2 . Dzięki mimośrodowemu ustawieniu tarczy i śruby, wiązka światła po obrocie głośnika pionowego o dowolny kąt, będzie zawsze padała na środek zwierciadła z_2 . To bardzo ułatwia badanie wyników składania drgań, zachodzących w kierunkach ukośnych. Dla lepszego połączenia można wywiercić otwór w tarczy i przełożyć przez niego śrubę. Pozwoli to przykleić zarówno łeb śruby, jak też jej walcową powierzchnię do tarczy. Należy zastosować dostatecznie dużą śrubę, która utrzyma stosunkowo ciężki głośnik po jego przykręceniu do płyty pionowej p_2 . W zbudowanym przyrządzie zastosowano śrubę o średnicy 10 mm (z gwintem metrycznym M 10).

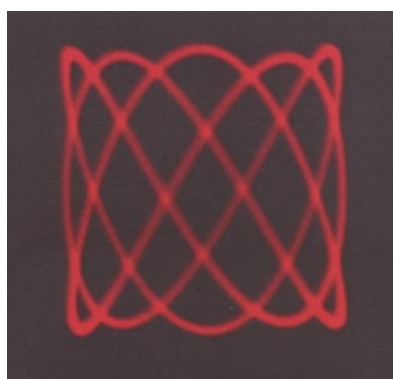
Montaż przyrządu rozpoczyna się od wywiercenia otworu w górnej części płyty pionowej, przeznaczonego do włożenia śruby n , (zob. rys. 2). Otwór powinien być w takim miejscu, żeby głośnik pionowy l_2 wraz z tarczą r można swobodnie obracać wokół osi przechodzącej przez środek zwierciadła z_2 . Po wykonaniu otworu głośnik pionowy przykręca się do płyty nakrętką, najlepiej skrzydełkową. Następnie na płycie poziomej p_1 należy położyć głośnik l_1 , tak żeby pasek s_1 był skierowany wzdłuż tej płyty i środki obu zwierciadeł znajdowały się w jednej płaszczyźnie pionowej. W tej płaszczyźnie trzeba ustawić wskaźnik laserowy l oraz skierować wiązkę światła b na środek zwierciadła z_1 . Wskaźnik powinien być nachylony pod takim kątem, żeby wiązka odbita b_1 trafiła również na środek zwierciadła z_2 , zaś po odbiciu od niego, jako wiązka b_2 dała świecąca plamkę na ekranie t , ustawionym w odległości kilku metrów na wprost przyrządu. Po spełnieniu tych warunków głośnik l_1 należy przykleić do płyty poziomej, a wskaźnik laserowy zamocować w dowolny sposób do wspornika h , połączonego z tą płytą. Wyznaczone pozycje głośnika i wskaźnika powinny być przy tym zachowane. W zbudowanym przyrządzie, jako wspornik zastosowano pręt aluminiowy, połączony z plastikową rurką za pomocą śruby z nakrętką. Użyto nieco stożkowej rurki od grubego pisaka, co pozwalało wygodnie włączać wskaźnik na czas doświadczeń po jego wsunięciu do rurki. (Wewnętrzna powierzchnia rurki utrzymywała wyłącznik wskaźnika w pozycji wciśniętej.) Do końcówek obu głośników przylutowano przewody, które połączono z gniazdami radiowymi g_1 , g_2 , osadzonymi w płytach p_1 , p_2 . Gniazda te pozwalały na łatwe przyłączenie generatorów zasilających głośniki. Przewody

łączące głośnik pionowy z gniazdami g_2 powinny być dłuższe, żeby pozwalały na swobodny obrót tego głośnika.

Zbudowany według podanego opisu przyrząd przedstawia fot. 1, natomiast jeden z przykładów figury Lissajous otrzymanej przy jego użyciu pokazuje fot. 2. Głośniki mogą być zasilane z dwóch oddzielnych generatorów albo z jednego. Zastosowanie dwóch generatorów daje bardzo szerokie możliwości zmiany wszystkich parametrów drgań (częstotliwości, amplitud i faz). Trudniejsze może okazać się wtedy zachowanie stałej różnicy faz.



Fot. 1. Ogólny widok zbudowanego przyrządu



Fot. 2. Przykład jednej z figur Lissajous, otrzymanych za pomocą zbudowanego przyrządu

W przypadku użycia jednego generatora różne częstotliwości drgań zwierciadeł można uzyskać przez zastosowanie dzielnika częstotliwości, do którego przyłączony będzie drugi głośnik, natomiast różne amplitudy drgań daje zastosowanie dzielnika napięcia. Cyfrowy dzielnik częstotliwości pozwala na bardzo dokładne utrzymanie stałego stosunku częstotliwości, wyrażającego się liczbami całkowitymi. Można wtedy uzyskać dobrej jakości obrazy najprostszych i najczęściej podawanych figur Lissajous. Rysunki tych figur znajdują się w wielu podręcznikach fizyki ogólnej i doświadczalnej [5, 6]. W przypadku użycia jednego generatora i przesuwника fazy można łatwo utrzymać stałą różnicę faz przez długi czas, nawet przy wyższych częstotliwościach (najprostszym przesuwnikiem fazy może być kondensator lub cewka). Przed rozpoczęciem doświadczeń należy sprawdzić prawidłowość działania przyrządu na najprostszych figurach Lissajous. Na przykład, podczas zasilania obu głośników bezpośrednio z tego samego generatora powinien pojawić się na ekranie odcinek prostoliniowy, nachylony do poziomu pod kątem 45° . Uogólnione figury Lissajous otrzymuje się po obrocie i zamocowaniu głośnika pionowego l_2 w pozycji z paskiem s_2 ustawionym ukośnie do poziomu. Zbudowany przyrząd działał prawidłowo do częstotliwości 320 Hz i umożliwiał otrzymanie figur Lissajous o rozmiarach dochodzących do 1,5 m.

Podstawy teoretyczne

Kształt otrzymanych w ogólnym przypadku figur Lissajous można porównać z wynikami obliczeń teoretycznych. Żeby wyprowadzić potrzebne do tego celu wzory zostanie przeanalizowane składanie drgań harmoniczych w układzie odniesienia przedstawionym na rys. 4, który odpowiada sytuacji występującej w przyrządzie. Amplitudy drgań składowych oznaczone zostaną przez A_1 , A_2 , ich częstości kątowe przez ω_1 , ω_2 , początkowa różnica faz przez ϕ , a wychylenia drgających punktów przez z_1 , z_2 . Zależności tych wychyleń od czasu t wyrażają się wtedy standardowymi wzorami:

$$z_1 = A_1 \sin(\omega_1 t), \quad (1)$$

$$z_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \phi) \quad (2)$$

Współrzędne x , y wychyleń wypadkowego wyrażają się wzorami:

$$x = A_1 \sin(\omega_1 t) \cos \alpha, \quad (3)$$

$$y = A_1 \sin(\omega_1 t) \sin \alpha + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi). \quad (4)$$

We wzorach (3), (4) czas t spełnia rolę parametru, natomiast α oznacza kąt nachylenia do poziomu paska głośnika pionowego. Żeby otrzymać ogólne równie krzywej Lissajous we współrzędnych x , y należy pozbyć się zależności od czasu. Najpierw wyznacza się czas ze wzoru (3) i otrzymuje

$$t = \frac{1}{\omega_1} \arcsin\left(\frac{x}{A_1 \cos \alpha}\right). \quad (5)$$

Czas wyrażony wzorem (5) podstawia się następnie do (4) i otrzymuje równanie

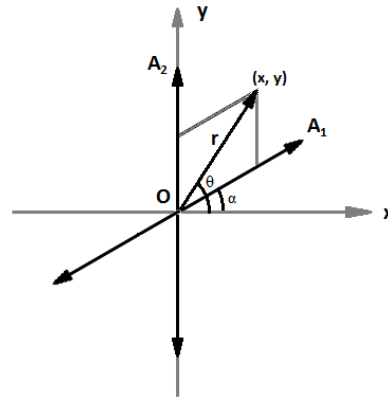
$$y = x \tan \alpha + A_2 \sin\left[\frac{\omega_2}{\omega_1} \arcsin\left(\frac{x}{A_1 \cos \alpha}\right) + \phi\right]. \quad (6)$$

Łatwo zauważyć, że dla: $A_1 = A_2$, $\omega_1 = \omega_2$, $\alpha = 0$, $\phi = 0$ z równania (6) otrzymuje się

$$y = x, \quad (7)$$

czyli równanie prostej nachylonej pod kątem 45° do półosi Ox , co jest prawidłowym wynikiem.

Korzystając z wzorów (1) i (2) można również otrzymać ogólne równania krzywej Lissajous we współrzędnych biegunowych r , θ . Promień r oblicza się



Rys. 4. Układ odniesienia do analizy wyników składania drgań, odbywających się wzdłuż kierunków ukośnych; A_1 , A_2 – amplitudy drgań, α – kąt nachylenia do poziomu paska głośnika pionowego l_2

z twierdzenia Pitagorasa, jako długość wektora o składowych x , y . Otrzymuje się wtedy

$$r = \sqrt{A_1^2 \sin^2(\omega_1 t) + A_2^2 \sin^2(\omega_1 t + \phi) + 2A_1 A_2 \sin(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t + \phi) \sin \alpha}. \quad (8)$$

Kąt, który tworzy ten wektor z dodatnim kierunkiem półosi Ox , czyli kąt azymutalny θ wyraża się wzorem

$$\theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right). \quad (9)$$

Po podstawieniu wzorów (3) i (4) do wzoru (9) otrzymuje się dla kąta θ następujący wzór

$$\theta = \arctg\left[\operatorname{tg} \alpha + \frac{A_2 \sin(\omega_1 t + \phi)}{A_1 \sin(\omega_2 t) \cos \alpha}\right]. \quad (10)$$

Łatwo zauważyć, że dla: $A_1 = A_2 = A$, $\omega_1 = \omega_2$, $\alpha = 0$, $\phi = \pi/2$, z równania (8) otrzymuje się, $r = A$, co oznacza, że krzywa Lissajous jest okręgiem i stanowi prawidłowy wynik dla tego przypadku. Wyprowadzone wzory ogólne można wykorzystać do numerycznego wyznaczania uogólnionych krzywych Lissajous, np. za pomocą programu Mathematica.

Podsumowanie

Na zakończenie warto dodać, że opisany przyrząd pozwala też dokładnie i łatwo badać rezultaty składnia drgań, których zależność wychylenia od czasu nie jest funkcją sinusoidalną. Wystarczy w tym celu zasilać głośniki z generatorów funkcyjnych i wybrać sygnał inny niż sinusoidalny, np. trójkątny albo prostokątny [7]. Miniaturyzacja i coraz powszechniejsze zastosowanie urządzeń elektronicznych powoduje, że takie generatory czy np. dzielniki częstotliwości stają się tańsze i łatwiej dostępne. Obserwacje tych uogólnionych figur Lissajous są interesujące nie tylko ze względów poznawczych. Obserwacje te mogą też dostarczyć inspirujących doznań estetycznych.

Literatura

- [1] T. Dryński, *Doświadczenia pokazowe z fizyki*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1964, 241
- [2] *Demonstration experiments in physics*, R.M. Sutton Editor, McGraw-Hill Book Company, New York and London 1938, 146
- [3] G.D. Freier, F.J. Anderson, *Demonstration handbook for physics*, American Association of Physics Teachers, College Park, Madison 1996, 253
- [4] D. Tokar, B. Tokar, B. Pędzisz, *Doświadczenia fizyki dla szkoły podstawowej z wykorzystaniem przedmiotów codziennego użytku*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1990, 63
- [5] A.H. Piekara, *Mechanika ogólna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1975, 84
- [6] W. Demtröder, *Fizyka doświadczalna I, Mechanika i ciepło*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń 2011, 340
- [7] J. Olejniczak, *Fourier analysis of the mechanical rectangular signal*, Eur. Jour. Phys. Vol. 10 (1989), 42–44