Manewr Hohmanna, czyli umieszczenie satelity na orbicie geostacjonarnej

Wiesław Mroszczyk

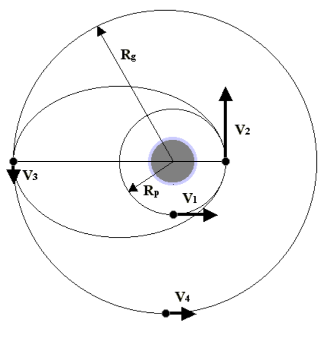
II LO im. Jana III Sobieskiego w Krakowie

Urządzenia telekomunikacyjne umieszcza się na orbicie geostacjonarnej. Satelita umieszczony na takiej orbicie porusza się w płaszczyźnie równika i okrąża Ziemię w tym samym czasie, w jakim nasza planeta obraca się wokół własnej osi. Dzięki temu pozostaje on przez cały czas „zawieszony” nad tym samym punktem równika, czyli w położeniu stacjonarnym względem powierzchni Ziemi.

Umieszczanie satelity na orbicie geostacjonarnej zwykle odbywa się w dwóch etapach. Najpierw umieszcza się satelitę poza zasięgiem atmosfery na tzw. kołowej orbicie parkującej, której promień R_p jest niewiele większy od promienia Ziemi (R_z = 6370 km). Następnie przenosi się satelitę z orbity parkującej na kołową orbitę geostacjonarną o promieniu R_g. Odbywa się to po tzw. orbicie Hohmanna[*], dzięki czemu manewr jest najbardziej ekonomiczny. Orbita ta jest elipsą, w ognisku której znajduje się środek Ziemi. Ruch satelity po elipsie jest zatem ruchem swobodnym (bez udziału silników). Orbita Hohmanna jest styczna zarówno do orbity parkującej (od zewnątrz) jak i do orbity geostacjonarnej (od wewnątrz).

Aby sputnik przeniósł się z orbity parkującej na orbitę Hohmanna musi włączyć silniki rakietowe w celu zwiększenia swojej prędkości (stycznej do obu orbit) z wartości v_1 do wartości v_2. Podczas ruchu po elipsie szybkość satelity maleje osiągając w apogeum (najdalszym punkcie od środka Ziemi) wartość v_3 mniejszą od v_2. Chcąc utrzymać sputnik na orbicie geostacjonarnej należy ponownie włączyć silniki i zwiększyć jego szybkość do v_4.

Naszym zadaniem jest znalezienie promienia R_g orbity geostacjonarnej, prędkości v_1 na orbicie parkującej, prędkości v_2 i v_3 na orbicie Hohmanna oraz prędkości v_4 na orbicie geostacjonarnej. Obliczenie mimośrodu e elipsy pozwoli nam uzyskać informację o spłaszczeniu orbity Hohmanna. Rozważymy przypadek, gdy R_p = 6670 km.



Rozwiązanie zadania rozpoczniemy od sporządzenia rysunku.

Do dalszych rozważań wprowadzamy następujące oznaczenia:

M – masa Ziemi,
G – stała grawitacji,
m – masa satelity,
g – wartość przyspieszenia ziemskiego.

Dla kołowej orbity parkującej siła grawitacji spełnia rolę siły dośrodkowej:

$$G\frac{Mm}{R_p^2}=\frac{mv_1^2}{R_p}, \qquad \text{a więc} \qquad v_1=\sqrt{\frac{GM}{R_p}}\ ; \qquad (1)$$

GM obliczymy i wstawimy do wzoru (1) korzystając ze związku:

$$mg=G\frac{Mm}{R_z^2}, \qquad \text{skąd} \qquad Gm=gR_z^2\,. \qquad (2)$$

W konsekwencji po podstawieniu (2) do (1) otrzymujemy

$$v_1=R_z\sqrt{\frac{g}{R_p}}\,. \qquad (3)$$

Podstawienie odpowiednich wartości do otrzymanego wzoru prowadzi do wyniku

$$v_1=6370\cdot10^3\mathrm{m}\cdot\sqrt{\frac{9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{6670\cdot10^3\mathrm{m}}}=7725{,}22\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Szybkość satelity krążącego po orbicie geostacjonarnej wyraża się analogicznie do (3)

$$v_4=R_z\sqrt{\frac{g}{R_g}}\,, \qquad (4)$$

W celu obliczenia R_g zauważamy, że okres obiegu satelity geostacjonarnego T = 23 h 56 min, a więc jego szybkość możemy wyrazić następująco:

$$v_4=\frac{2\pi R_g}{T}\,. \qquad (5)$$

Porównując stronami równania (4) i (5) otrzymujemy

$$R_g=\sqrt[3]{\frac{gT^2R_z^2}{4\pi^2}}=g^{1/3}\left(\frac{TR_z}{2\pi}\right)^{2/3}.$$

$$R_g=\left(9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)^{1/3}\left(\frac{86160\mathrm{s}\cdot6{,}37\cdot10^6\mathrm{m}}{2\cdot3{,}14}\right)^{2/3}\approx4{,}22\cdot10^4\,\mathrm{km}\,.$$

Korzystając z zależności (4) obliczamy szybkość satelity na orbicie geostacjonarnej

$$v_4=6{,}37\cdot10^6\mathrm{m}\cdot\sqrt{\frac{9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{4{,}22\cdot10^7\mathrm{m}}}\approx3070\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Szybkości v_2 i v_3 obliczymy z układu równań wynikających z zasad zachowania momentu pędu i energii mechanicznej, zastosowanych do ruchu po elipsie (w perygeum i apogeum):

$$v_2R_p=v_3R_g \qquad (6)$$

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{GMm}{R_p} = \frac{mv_3^2}{2} - \frac{GMm}{R_g} \qquad (7)$$

Rozwiązując układ równań (6) i (7) otrzymujemy:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GMR_g}{(R_p + R_g)R_p}} = R_z\sqrt{\frac{2gR_g}{(R_p + R_g)R_p}}\ ,$$

$$v_3 = \frac{R_p}{R_g} v_2 = R_z\sqrt{\frac{2gR_p}{(R_p + R_g)R_g}}\ .$$

Obliczenia prowadzą do następujących wyników

$$v_2 = 6{,}37 \cdot 10^6\mathrm{m} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 4{,}22 \cdot 10^7\mathrm{m}}{(6{,}67 \cdot 10^6\mathrm{m} + 4{,}22 \cdot 10^7\mathrm{m}) \cdot 6{,}67 \cdot 10^6\mathrm{m}}} \approx 10153\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v_3 = 6{,}37 \cdot 10^6\mathrm{m} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 6{,}67 \cdot 10^6\mathrm{m}}{(6{,}67 \cdot 10^6\mathrm{m} + 4{,}22 \cdot 10^7\mathrm{m}) \cdot 4{,}22 \cdot 10^7\mathrm{m}}} \approx 1605\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ .$$

Aby zdać sobie sprawę ze spłaszczenia orbity Hohmanna wyliczymy mimośród elipsy ze wzoru:

$$e = \frac{R_g - R_p}{R_g + R_p} = 0{,}727\ .$$

Taka wartość mimośrodu świadczy o dużym spłaszczeniu elipsy (dla $e = 0$ orbita ma kształt okręgu).

Przedstawione obliczenia dotyczą sytuacji, w której nie uwzględnia się oddziaływania grawitacyjnego z innymi planetami. W rzeczywistości zagadnienie jest o wiele bardziej skomplikowane i wymaga użycia zaawansowanych metod obliczeniowych.

---

[*] **Hohmann Walter (1880-1943)**, niemiecki matematyk i mechanik, pionier astronautyki, jeden z twórców astrodynamiki (teorii ruchów sztucznych obiektów kosmicznych). W 1904 ukończył politechnikę w Monachium. Od 1914 zajmował się teorią lotów międzyplanetarnych. Wyniki obliczeń orbit obiektów międzyplanetarnych zawarł w pracy *Osiągalność ciał niebieskich* (1925), wprowadzając koncepcje orbit Hohmanna (elips przejściowych Hohmanna).