# Razem raźniej. Spontaniczna synchronizacja oscylatorów

*Student SMP Krzysztof Siekański*
*Instytut Fizyki UJ*

**Abstrakt**

Ogromna liczba obiektów w przyrodzie funkcjonuje na zasadzie oscylacji. Zakres, w jakim obserwuje się tego rodzaju zjawiska, rozciąga się od skali mikroskopijnej (zjawiska atomowe) do astronomicznej (układy ciał niebieskich). Pewne przykłady spotyka się nawet w naukach pozornie tak niematematycznych jak socjologia. Rzadko jednak do dogłębnego poznania działania tychże mechanizmów wystarcza analiza zachowania izolowanego oscylatora – często nie sposób pominąć wpływu wzajemnego oddziaływania elementów układu.

Niniejszy artykuł koncentruje się na szczególnym przypadku spontanicznej (niewymuszonej przez czynniki zewnętrzne) synchronizacji zespołu dużej liczby jednakowych oscylatorów, której matematyczny opis prowadzi do zdumiewającego i niezwykle ważnego wniosku.

## 1. Wstęp

### 1.1. Żywe oscylatory [1]

Park narodowy Great Smoky Mountains, leżący na granicy Stanów Tennessee i Karolina Północna, szczyci się posiadaniem na swym terenie dziewiętnastu gatunków świetlików. W świetle omawianego zjawiska szczególne miejsce zajmuje jednak jeden z nich: *Photinus carolinus*.

Rys. 1. *Photinus carolinus* [1]

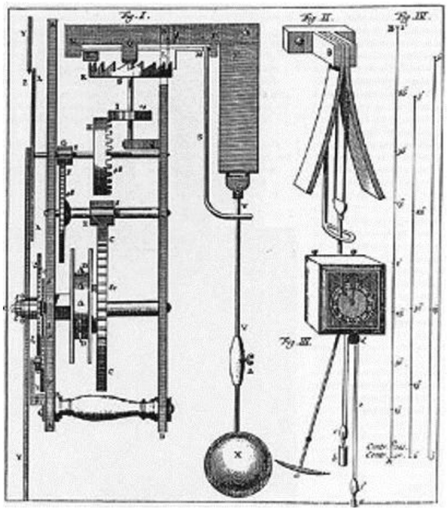
Wyjątkowość tego niewielkiego owada z rodziny *Lampyridae* polega na jego pozornie nieznaczącej właściwości: zaświecenie się odwłoka jednego samca pobudza do świecenia jego sąsiadów. Początkowo więc w grupie tysięcy świetlików powstają, w miarę aktywizowania się kolejnych osobników, skupiska owadów wysyłających zsynchronizowane sygnały świetlne.

Rys. 2. Rój świetlików [2]

Ponieważ są to sygnały przerywane, w stanie wyjściowym świecenie odbywa się w sposób nieregularny, każda z żywych lampek posiada swą własną (niekoniecznie stałą) *częstość*. Jednak powstałe skupiska rozrastają się, aż po pewnym czasie cały rój tworzy zgodną orkiestrę świateł – jeden z najbardziej spektakularnych przykładów spontanicznej synchronizacji.

### 1.2. Zegary Huygensa

Jedno z pierwszych doniesień o interesującym zjawisku samorzutnego uzgadniania się drgań sparowanych oscylatorów pochodzi jednak z dziedziny o wiele bardziej technicznej, a podał je wybitny holenderski fizyk i wynalazca Christiaan Huygens (1629–1695). Zaobserwował on mianowicie, że w jednym ze skonstruowanych przez niego specjalnych zegarów (posiadających z pewnych przyczyn dwa wahadła) po odpowiednio długim czasie zawsze dochodziło do sytuacji, w której oba wahadła oscylowały z przeciwnymi fazami, *niezależnie* od początkowej różnicy tychże faz. Zjawisko to pozostało niewyjaśnione przez ponad trzysta lat.



Rys. 3. Zegar Huygensa [2]

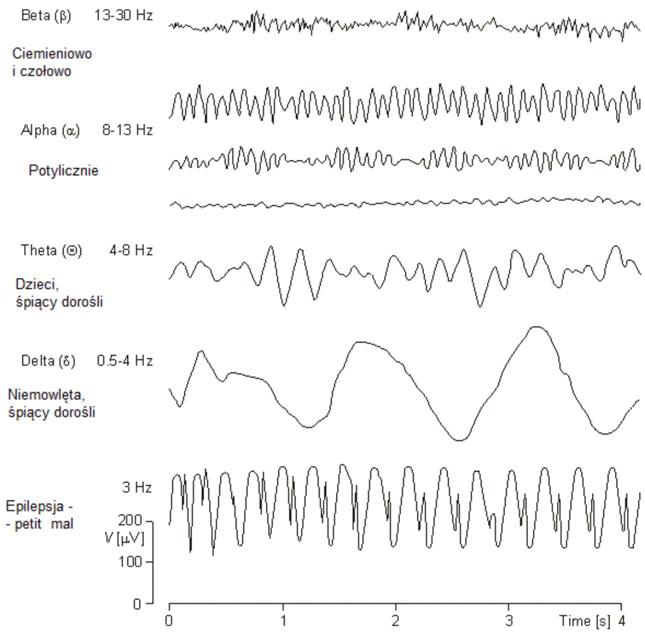
Obecnie wiadomo, iż komunikacja między wahadłami zachodziła za sprawą przekazywania energii mechanicznej poprzez statyw, na którym wisiały, a jej zaobserwowanie przypadkowo umożliwiły proporcje elementów zegara.

### 1.3. Bliższe spojrzenie

Skoro o zegarach mowa, przyjrzyjmy się własnym organizmom i tak zwanym zegarom biologicznym, jak bicie serca, fale mózgowe, reakcje odpowiadające za przemianę materii itd. oraz gruczoły hormonalne i cykle życiowe poszczególnych komórek.

Skojarzenia z synchronizacją nasuwają się same, choć należy zaznaczyć, iż w przypadku tak złożonych układów jak ludzkie ciało, synchronizacja oznacza nie tyle ujednolicenie, co raczej utrzymanie odpowiednich relacji miedzy poszczególnymi częstotliwościami. Istnieją wręcz sytuacje, gdy nadmierne dopasowanie drgań prowadzi do destrukcyjnych efektów, czego ilustracją niech będzie diagram na rysunku 4, obrazujący zależność napięcia od czasu dla fal mózgowych, w kilku różnych sytuacjach.

Pierwsze sześć (nieregularnych) wykresów dotyczy zwykłych sytuacji życiowych. Ostatni, prezentujący niemal idealną synchronizację, przedstawia atak epilepsji (*petit mal*).




Rys. 4. Zależność $U(t)$ dla fal mózgowych [3]

## 2. Bardziej ścisły opis [4, 5]

Wobec tak wielkiej powszechności opisywanego zjawiska, nie dziwi fakt, iż jego matematycznym wyjaśnieniem zainteresowało się wielu naukowców, przede wszystkim fizyków. Nie sposób oczywiście wymienić w tym miejscu wszystkich rozważanych koncepcji, skoncentrujemy się więc, jak to zapowiedziano na początku, na pewnym podstawowym przypadku, opisywanym przez *model Kuramoto*, będący szczególnym przypadkiem tak zwanego *modelu średniego pola*. Jego autorem jest – jak sama nazwa mówi – japoński fizyk Yoshiki Kuramoto.

### 2.1. Model matematyczny

Rozważmy układ $N$ oscylatorów, z których $i$-ty drga z częstotliwością własną $\omega_i$ i fazą $\theta_i$. Przy tych oznaczeniach Kuramoto, wychodząc od wcześniejszego ogólnego modelu Winfree, zaproponował następujący wzór:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \sum_{j=1}^{N} \Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i) \tag{1}$$

Lewa strona równości oznacza zmianę fazy $i$-tego oscylatora w nieskończenie krótkim czasie. $\Gamma_{ij}$ to pewna funkcja definiująca wzajemne oddziaływanie elementów o indeksach $i$ oraz $j$.

W najprostszym przypadku sparowanie jest czysto sinusoidalne, czyli $\Gamma_{ij} = \frac{K_{ij}}{N}\sin(\theta_j - \theta_i)$. Dla każdej pary elementów układu określa się wówczas *stałą sprzężenia* $K_{ij}$ informującą o tym, jak silnie na siebie wzajemnie wpływają.

Sformułowanie „model średniego pola" oznacza w tym przypadku, iż każdy oscylator jest jednakowo powiązany z każdym z pozostałych. Założenie to pozwala na znaczne uproszczenie modelu, poprzez wprowadzenie jednej stałej sprzężenia (oznaczanej $K$) dla całego układu. Uproszczenie do modelu średniego pola daje więc następujący wynik:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N} \sin(\theta_j - \theta_i)\,, \tag{2}$$

przy dodatkowym założeniu, że rozkład $\omega_i$ jest jednomodalny (posiada tylko jedno ekstremum), a jego średnia wynosi 0 (ostatni warunek można zawsze uzyskać przez jednakowe przesunięcie wszystkich częstości, co nie zmienia sensu modelu).

Uzyskany wzór stanowi najbardziej podstawowy wynik analizy Kuramoto.

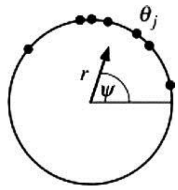
### 2.2. Parametr porządku

Dalsze rozważania wymagają wprowadzenia jeszcze jednego pojęcia: miary zsynchronizowania zwanej *zespolonym parametrem porządku*. Parametr ten dany jest wzorem:

$$re^{i\Psi} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j}\,, \tag{3}$$

gdzie $\Psi$ oznacza średnią faz $\theta_j$.

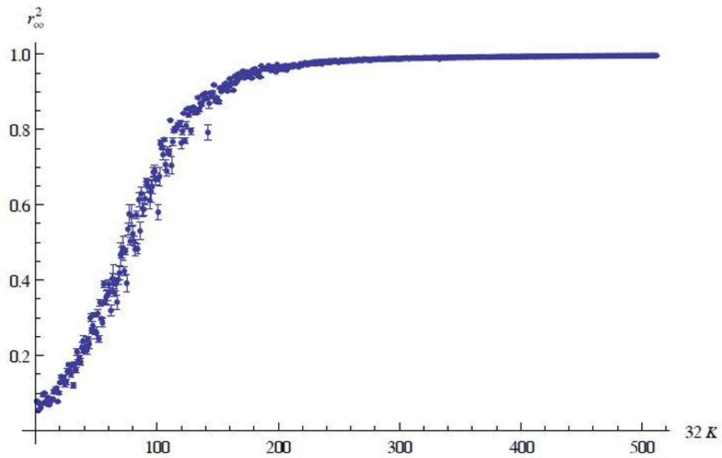
Geometryczną interpretację przedstawia rys. 5, na którym promień okręgu wynosi 1, a punkty symbolizują fazy poszczególnych oscylatorów. Im bliżej siebie na okręgu znajdują się poszczególne fazy, tym bardziej moduł $r$ zbliża się do jedności. I odwrotnie: niskiemu stopniowi synchronizacji odpowiada $r$ bliskie zera. W zrozumieniu idei parametru porządku może pomóc analogia do składania fal równoległych: złożenie drgań o zbliżonych fazach daje falę wypadkową o zwiększonej amplitudzie, natomiast duży rozrzut faz prowadzi do wygaszenia drgań.



Rys. 5. Wizualizacja parametru porządku

### 2.3. Poprawność modelu

Poprawność modelu potwierdzają przede wszystkim symulacje numeryczne. Wykres na rys. 6 przedstawia zależności kwadratu parametru porządku po wirtualnie nieskończonym czasie ( $r_\infty^2$ ) od stałej sprzężenia $K$.



Rys. 6. Zależność synchronizacji od stałej sprzężenia po długim czasie

Symulacja została wykonana przez autora niniejszego artykułu poprzez numeryczne rozwiązanie metodą trapezową [6] układu równań (2). Częstości własne losowano według rozkładu Gaussa, a początkowe fazy – z rozkładu jednorodnego.

## 3. Wnioski

Zaprezentowany powyżej wykres ilustruje kilka niezwykle istotnych wyników teorii Kuramoto. Pierwszy z nich to stwierdzenie, iż teoria istotnie stanowi matematyczne wyjaśnienie mechanizmu synchronizacji. Kolejne są mniej oczywiste.

Przede wszystkim wart uwagi jest fakt, iż przy zachowaniu podanych wcześniej założeń $r_\infty$ *nie zależy* od warunków początkowych, a jedynie od stałej sprzężenia. Co więcej, powyżej pewnej wartości synchronizacja staje się niemal zupełna. Z kolei przy niewielkim $K$ oscylatory działają praktycznie niezależnie. Ponieważ pasmo niepełnej synchronizacji jest dość wąskie, nasuwa się pytanie, czy da się określić pewną krytyczną wartość, nazwijmy ją $K_C$, powyżej której synchronizacja staje się możliwa.

Odpowiedź podał sam Kuramoto. Dalszy ciąg jego analizy prowadzi do obliczenia tej wartości wynikającej, jak się okazuje, jedynie z rozkładu częstości własnych oscylatorów. Dokładniejsze symulacje ilustrują poprawność zastosowania tej stałej jeszcze dobitniej.

Stąd zaś wypływa zapowiedziana, niezwykle ważka obserwacja: populacja sparowanych oscylatorów posiada dwie fazy*, które obrazowo porównać można do faz substancji chemicznych! W języku tej analogii $K_C$ odpowiada parametrowi krytycznemu w termodynamice, a synchronizacja – przejściu fazowemu. Innymi słowy proces, w którym parametr porządku rośnie do 1, można nazwać odpowiednikiem czasowym przejścia fazowego II rodzaju (jak między paramagnetykiem a ferromagnetykiem).

## 4. Współczesne badania. Perspektywy

Tak interesujący wynik, jak i rzecz jasna, rozpowszechnienie w przyrodzie zjawiska synchronizacji, motywują do dalszych badań, często z pogranicza wielu dziedzin nauki. Na szczególną uwagę zasługują neurobiologiczne zastosowania teorii synchronizacji ze względu na fakt, iż w badaniach mózgu coraz większą rolę odgrywają modele matematyczne i symulacje komputerowe. Teoria ta stała się dla nich niejednokrotnie punktem wyjścia i podstawą pozwalającą wyjaśnić znaczenie wcześniej niezinterpretowanych danych eksperymentalnych.

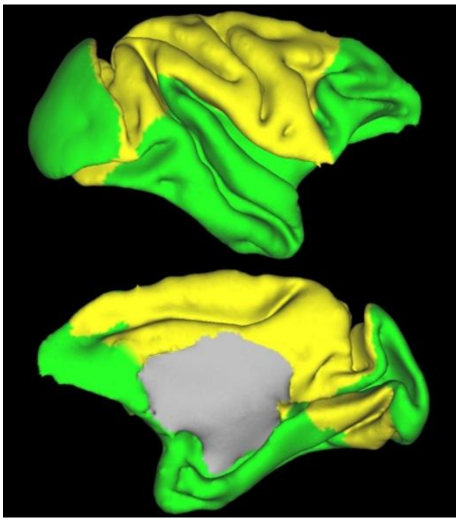
### 4.1. Default-mode mózgu i neurorezonans [7]

Za ilustrację neurobiologicznych zastosowań teorii Kuramoto (i innych osiągnięć fizyki statystycznej) niech posłużą wyniki uzyskane niedawno przez międzynarodowy zespół badaczy zajmujących się symulacjami „domyślnej" aktywności mózgu, to jest aktywności wykazywanej pod nieobecność konkretnego zadania (np. w czasie snu lub biernego czuwania). W artykule *Key Role of Coupling, Delay and Noise in Resting Brain Fluctuations* przedstawiono analizę opartą na uproszczonym modelu kory mózgowej, złożonym z 38 oscylatorów (z których każdy odpowiada określonemu realnemu obszarowi).

* Słowo „faza" posiada, z przyczyn historycznych, dwa znaczenia. O ile we wcześniejszych częściach artykułu używane było w kontekście oscylacji, w tym akapicie służy jako analogia stanu skupienia materii (przyp. aut.).

Za wzajemne sprzężenie poszczególnych oscylatorów odpowiada architektura połączeń neuronalnych miedzy nimi. Z kolei za wskaźnik aktywności danego obszaru przyjęto zmienną zależną od (możliwego do eksperymentalnego zmierzenia) lokalnego poziomu tlenu we krwi (*blood oxygen level-dependent signal*).

Przy tych założeniach wykonano symulację opartą na modelu Kuramoto (oczywiście zaadaptowanym tak, by odpowiadał szczegółom badanego zagadnienia), otrzymując następujący wynik: pomiędzy poszczególnymi obszarami mózgu zachodził podział na dwa klastry (dwie podgrupy oscylatorów), w obrębie których następowała synchronizacja (rys. 7 ilustruje położenie klastrów na przykładzie kory mózgowej makaka). Rezultat okazał się niezwykle obiecujący, gdyż odpowiada zebranym danym eksperymentalnym, co znaczy, iż opisywane zjawisko można wyjaśnić na gruncie teorii Kuramoto.



Rys. 7. Klastry zsynchronizowanych oscylatorów w korze mózgowej [7]

**4.2. Pacemakers – zegary biologiczne** [8]

Opisany wyżej szczególny przykład synchronizacji zachodzącej wewnątrz organizmu łączy się z bardziej ogólną dziedziną, której znaczenie biologiczne, a także związek z teorią synchronizacji, nie pozwalają pominąć w tym miejscu nieco szerszego jej opisu.

Zagadnienie dotyczy wspomnianego we wstępie pojęcia zegarów biologicznych regulujących funkcjonowanie większości żywych organizmów, przy czym słowo „zegar" okazuje się tu wyjątkowo trafne nie tylko z językowego, ale i z naukowego punktu widzenia. Ogromna liczba współczesnych badań prowadzi do wniosku, że za regularne funkcjonowanie takich procesów, jak wymiana gazowa (np. sterowanie aparatami szparkowymi u roślin), obieg płynów ustrojowych, zachowanie rytmu dobowego, gospodarka hormonalna i wielu innych, odpowiadają różnego rodzaju *cykliczne* reakcje chemiczne. Nie sposób oczywiście wykluczyć wpływu czynników zewnętrznych (jak ilość światła, rodzaj pożywienia, lokalne zanieczyszczenia powietrza itp.), jednak ich wpływ dotyczy zwykle stosunkowo powolnych i długotrwałych zmian, nie zmienia więc faktu, iż u podstaw procesów życiowych leżą *cykle*.

Cykl zaś posiada swoją *częstotliwość* (w przypadku reakcji biochemicznych często względnie stałą), co sprawia, iż w wielu przypadkach można stosować do niego modele matematyczne właściwe dla oscylatorów. Naturalna zatem staje się hipoteza, iż za zachowanie homeostazy odpowiadają zjawiska synchronizacji. Hipoteza, którą – jak wspomniano – potwierdzają wyniki niezliczonych eksperymentów i symulacji publikowane na bieżąco w najbardziej prestiżowych czasopismach naukowych.

## 5. Podsumowanie

W ramach podsumowania podkreślenia wymaga pewien niezwykle ważny wniosek płynący z przedstawionej wyżej teorii oraz eksperymentów. Otóż – poza oczywiście wartością praktyczną – teoretyczny model synchronizacji stanowi piękną ilustrację najbardziej podstawowego stwierdzenia nauki, to jest: matematyczności Wszechświata. Fakt, iż nawet tak uproszczona analiza, jak rozważenie modelu średniego pola i sparowania sinusoidalnego, znajduje odzwierciedlenie w tak wielu dziedzinach przyrody, pozwalając zrozumieć ogromną liczbę niewyjaśnionych wcześniej zjawisk z niemal wszystkich obszarów badań, stanowi przecież pokrzepiającą motywację do dalszego rozwoju nie tylko fizyki, ale nauk ścisłych *in genere*.

### Literatura

[1] http://www.nps.gov/grsm/naturescience/fireflies.htm
[2] Google Graphics, pod hasłami: photinus carolinus, Huygens clock
[3] www.macalester.edu/psychology
[4] S.H. Strogatz, *From Kuramoto to Crawford: Exploring the Onset of Synchronization in Populations of Coupled Oscillators*, Physica D 143, 2000
[5] S.H. Strogatz, *SYNC: the Emerging Science of Spontaneous Order*, Hyperion, NY, 2003
[6] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Third Edition, 1235 pp. + xxi (New York: Cambridge University Press, 2007)
[7] G. Deco, V. Jirsa, A.R. McIntosh, O. Sporns, R. Kötter, *Key Role of Coupling, Delay, and Noise in Resting Brain Fluctuations*, PNAS, July 21, 2009
[8] M.U. Gilette, T.J. Sejnowski, *Biological Clocks Coordinately Keep Life on Time*, Science, August 19, 2005