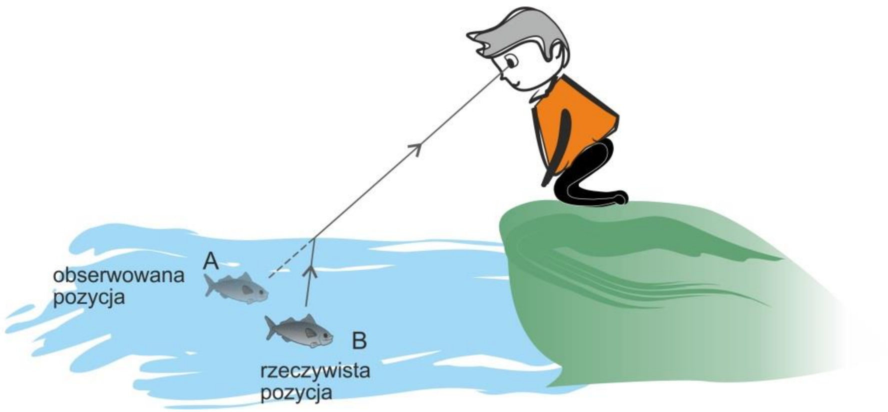
Gdzie widać rybę?

Marcin Braun
Autor podręczników szkolnych

Jednym z najbardziej znanych przykładów załamania światła jest fakt, że gdy znad wody patrzymy na przepływającą rybę, to zwykle widzimy ją nieco wyżej i dalej niż znajduje się ona w rzeczywistości (rys. 1).

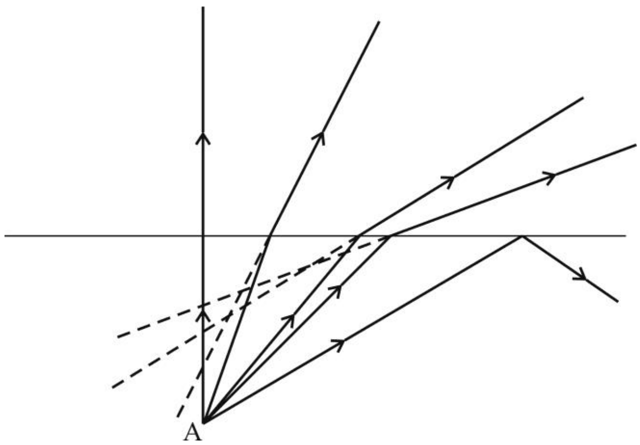


Rys. 1

Na hasło „ryba załamanie światła" Google wyświetla ponad 112 tysięcy stron, a po angielsku (*fish refraction*) jest ich ponad 400 tysięcy.

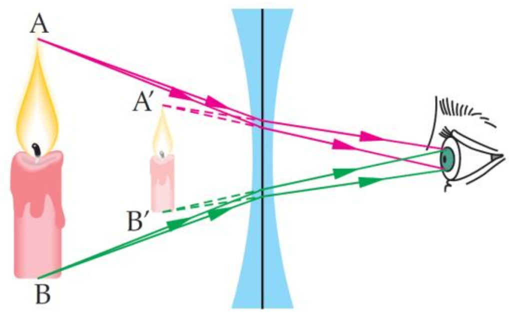
Czy jednak zwrócili Państwo uwagę, że tak dobrze zapowiadający się temat nie jest rozwijany w podręcznikach dla starszych uczniów? Tymczasem możliwość kontynuacji narzuca się właściwie sama. Przecież uczeń zakresu rozszerzonego może – a nawet powinien – zadać sobie pytanie, dlaczego właściwie twierdzimy, że ryba znajduje się pozornie w punkcie A, a nie w którymkolwiek z pozostałych punktów na przerywanej linii. W końcu „miejsce, gdzie coś widać, chociaż tam tego nie ma" zwykle nazywamy w optyce „obrazem pozornym". Żeby takie miejsce znaleźć, kreślimy co najmniej **dwa** promienie i znajdujemy przecięcie ich przedłużeń. Uczniom powtarzamy, że wystarczą dwa, bo przedłużenia pozostałych i tak przetną się w tym samym miejscu.

Tak jest w przypadku zwierciadła płaskiego, lupy i zawsze, gdy omawiamy obraz pozorny. Z rybą jednak, jak widzimy na rys. 2, nie jest już tak łatwo.



Rys. 2. Przedłużenia promieni wychodzących z punktu A nie przecinają się w jednym punkcie

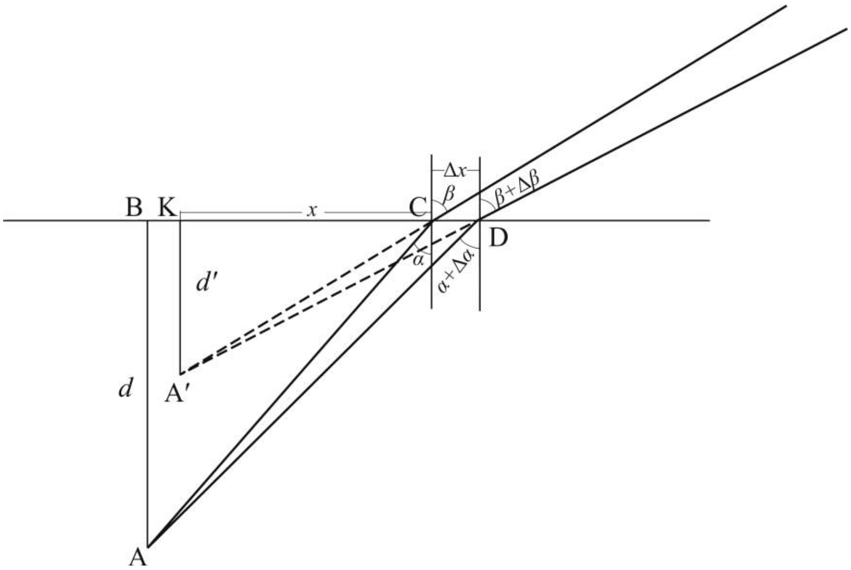
Gdzie w takim razie widzimy rybę? I dlaczego w ogóle widzimy jej ostry obraz, skoro przedłużenia promieni nie przecinają się w jednym punkcie?
Aby odpowiedzieć na te pytania, musimy najpierw przypomnieć sobie, jaki sens ma w ogóle pojęcie obrazu pozornego. Otóż gdy przedłużenia promieni **wpadających do naszych oczu** przecinają się w jednym punkcie A′, to same promienie dochodzą do naszych oczu tak samo, jakby wychodziły z punktu A' (rys. 3). Nasz mózg przystosowany jest do – najczęstszej skądinąd – sytuacji, gdy promienie rozchodzą się po prostych, dlatego wydaje nam się, że przedmiot znajduje się w punkcie A'.



Rys. 3. Źródło: Marcin Braun, Weronika Śliwa, *To jest fizyka*, podręcznik dla gimnazjów, cz. 4, s. 34, Nowa Era, Warszawa 2011 (za zgodą wydawcy)

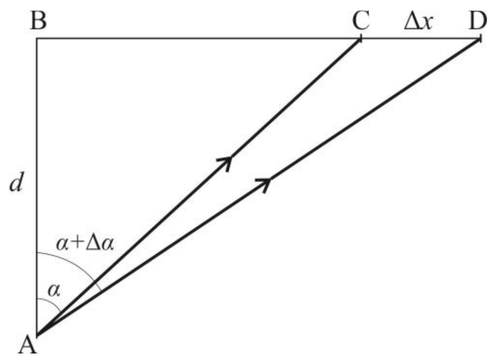
Jednak do naszych oczu nie wpadają promienie rozchodzące się na wszystkie strony, ale tylko te, które biegną dostatecznie blisko siebie, tzn. kąt między nimi jest niewielki. Wystarczy więc zbadać, czy **dostatecznie bliskie** promienie pozornie rozbiegają się z jednego punktu.

Dwa takie promienie widzimy na rys. 4. Zbadamy położenie punktu A′. Jeśli okaże się, że dla dostatecznie bliskich promieni (to znaczy dla dostatecznie małego $\Delta\alpha$) nie zależy ono od $\Delta\alpha$, to będzie znaczyło, że wszystkie dostatecznie bliskie promienie przecinają się w tym punkcie.

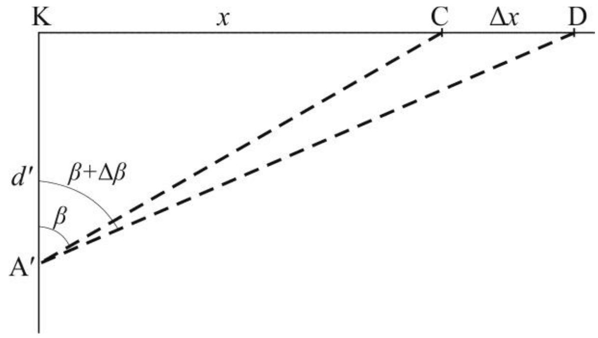


Rys. 4. Przedłużenia dwóch wybranych bliskich promieni wychodzących z punktu A przecinają się w punkcie A′

Dla przejrzystości narysujmy osobno promienie biegnące od punktu A do powierzchni wody (rys. 5), a osobno przedłużenia promieni załamanych (rys. 6).



Rys. 5. Fragment rys. 4: promienie biegnące z punktu A do powierzchni wody



Rys. 6. Fragment rys. 4: przedłużenia promieni załamanych

Analizując rys. 5, otrzymujemy:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\mathrm{BC}}{d}$$

$$\mathrm{tg}\,(\alpha + \Delta\alpha) = \frac{\mathrm{BC} + \Delta x}{d},$$

a stąd

$$\Delta x = d\,(\mathrm{tg}(\alpha + \Delta\alpha) - \mathrm{tg}\alpha).$$

Natomiast z rys. 6 wynika:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{x}{d'}$$

$$\mathrm{tg}(\beta + \Delta\beta) = \frac{x + \Delta x}{d'}.$$

Stąd:

$$\Delta x = d'(\mathrm{tg}(\beta + \Delta\beta) - \mathrm{tg}\beta).$$

Porównując oba wzory na Δx, po przekształceniach dostajemy

$$d' = d\,\frac{\mathrm{tg}(\alpha + \Delta\alpha) - \mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}(\beta + \Delta\beta) - \mathrm{tg}\beta}.$$

Przy małym $\Delta\alpha$ i $\Delta\beta$ możemy zapisać to wyrażenie za pomocą pochodnych

$$d' = d\,\frac{\mathrm{tg}'\alpha \cdot \Delta\alpha}{\mathrm{tg}'\beta \cdot \Delta\beta}. \qquad (*)$$

Skorzystajmy teraz z prawa Snelliusa

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = n = \frac{\sin(\beta + \Delta\beta)}{\sin(\alpha + \Delta\alpha)}.$$

Wobec tego

$$\sin\alpha\sin(\beta+\Delta\beta)=\sin\beta\sin(\alpha+\Delta\alpha)$$

$$\sin\alpha(\sin\beta\cos\Delta\beta+\cos\beta\sin\Delta\beta)=\sin\beta(\sin\alpha\cos\Delta\alpha+\cos\alpha\sin\Delta\alpha).$$

Ponieważ kąty $\Delta\alpha$ i $\Delta\beta$ są małe, można przyjąć, że cosinusy tych kątów są równe 1. Pozwala to uprościć wzór do postaci:

$$\sin\alpha(\sin\beta+\cos\beta\sin\Delta\beta)=\sin\beta(\sin\alpha+\cos\alpha\sin\Delta\alpha).$$

Po wymnożeniu i uproszczeniu:

$$\sin\alpha\cos\beta\sin\Delta\beta=\sin\beta\cos\alpha\sin\Delta\alpha,$$

czyli

$$\frac{\sin\Delta\alpha}{\sin\Delta\beta}=\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\beta},$$

a ponieważ dla małych kątów sinus jest w dobrym przybliżeniu równy mierze kąta, możemy przyjąć

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta\beta}=\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\beta}.$$

Po porównaniu z wzorem (*) dostajemy:

$$d'=d\frac{\mathrm{tg}'\alpha}{\mathrm{tg}'\beta}\cdot\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\beta}.$$

Wynika stąd, że gdy $\Delta\alpha$ dąży do zera, d' dąży do pewnej skończonej wielkości (przejście graniczne ukryte zostało we wcześniejszych przybliżeniach). Również x dąży do skończonej wielkości, bo $x = d'\mathrm{tg}\beta$.

Tak więc choć nie wszystkie przedłużenia promieni wychodzących z danego punktu ryby przecinają się w jednym punkcie, dzieje się tak dla **wszystkich promieni w słabo rozbieżnej wiązce**. W punkcie przecięcia ich przedłużeń widać rybę **z danego punktu nad wodą**. Jednak z innych miejsc widać ją gdzie indziej. Pewnie dlatego obserwowanego położenia ryby nie nazywa się obrazem pozornym. Słowa „obraz” używamy wtedy, gdy jego położenie nie zależy od tego, skąd patrzymy.

Im dalej, tym płyciej

Zobaczmy, co się dzieje, gdy oddalamy się od ryby, to znaczy, gdy kąt α rośnie. Nie może on oczywiście rosnąć w nieskończoność, ale tylko do wartości kąta granicznego. Wzór na d' możemy przekształcić do postaci:

$$d' = d\frac{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{1}{\cos^2\beta}}\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = d\frac{\sin\alpha\cos^3\beta}{\sin\beta\cos^3\alpha} = d\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\left(\frac{1-\sin^2\beta}{1-\sin^2\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{d}{n}\left(\frac{1-n^2\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Wówczas zobaczymy, że jeśli α dąży do kąta granicznego, czyli jeśli $\sin\alpha \to \frac{1}{n}$, to $d' \to 0$, czyli ryba znajduje się pozornie na coraz mniejszej głębokości.

Dla uczniów? To zależy

Kiedy zaczynałem wykonywać te obliczenia, sądziłem, że będę je mógł wykorzystać w podręczniku dla zakresu rozszerzonego. Po godzinie pracy – że przydadzą się w zadaniu z gwiazdką. Jednak i ten poziom trudności szybko trzeba było przekroczyć. Teraz sądzę, że problem ryby w wodzie stanowi dobry przykład tego zapasu umiejętności, którym nauczyciel powinien górować nad swoimi uczniami. Dlatego właśnie napisałem o nim w czasopiśmie skierowanym przede wszystkim dla nauczycieli.

Sądzę też, że przynajmniej niektórzy z Państwa mogą polecić zbadanie tego problemu swoim uczniom, choćby tylko w jakiejś części. Od naszych rozważań z pochodnymi i tożsamościami trygonometrycznymi łatwiejsze jest zastosowanie obliczeń numerycznych. Arkusz kalkulacyjny* obliczy nam dla danego α i $\Delta\alpha$ wszystkie interesujące wielkości po kolei. Zamiast obliczać granicę, sprawdzamy po prostu, jak zmienia się d' przy coraz mniejszych wartościach $\Delta\alpha$ i jak małe $\Delta\alpha$ można przyjąć, aby dalsze zmniejszanie nie powodowało zauważalnych zmian d'. Wówczas można sprawdzić, co się dzieje przy rosnącym α. Wynik wychodzi taki sam, jak metodą analityczną.

Marcin Braun jest współautorem podręczników do przyrody dla szkoły podstawowej (*Na tropach przyrody*) oraz fizyki dla gimnazjum (*To jest fizyka*) i szkoły ponadgimnazjalnej (*Odkryć fizykę*, *Zrozumieć fizykę*).

* W wersji internetowej *Fotonu*.