Średnia odległość planety od Słońca i III prawo Keplera

Andrzej Majhofer
Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

Johannes Kepler (1571–1630)

Studiowanie podręczników jest bardzo pouczające, a czasami może nawet zainspirować do własnych badań. Weźmy na przykład prawa Keplera. Co do dwóch pierwszych podręczniki są zgodne – planety obiegają Słońce po torach eliptycznych (I prawo), przy czym odcinek łączący planetę ze Słońcem w równych odcinkach czasu zakreśla równe pola – inaczej mówiąc prędkość polowa jest w tym ruchu stała (II prawo). Kłopoty zaczynają się, gdy czytamy o III prawie Keplera.

Co do pierwszej części sformułowania panuje zgoda: dla wszystkich planet stosunek

$$\frac{D^3}{T^2}$$

ma tę samą wartość, przy czym T oznacza okres, w jakim Planeta* obiega Słońce. Co do D, to zdania są już jednak podzielone: w części podręczników D to średnia odległość Planety od Słońca, a w pozostałych D oznacza długość większej półosi eliptycznej orbity. Kto ma rację? A może oba określenia są równoważne? To trzeba wyjaśnić. Zacznijmy od zapisania I prawa Keplera we współczesnym języku: Planeta obiega Słońce po orbicie eliptycznej – to znaczy, że odległość r Planeta–Słońce, jako funkcja kąta φ między promieniem wodzącym planety i kierunkiem Słońce–peryhelium planety, dana jest równaniem

$$r(\varphi) = \frac{p}{1+e\cdot\cos(\varphi)},$$

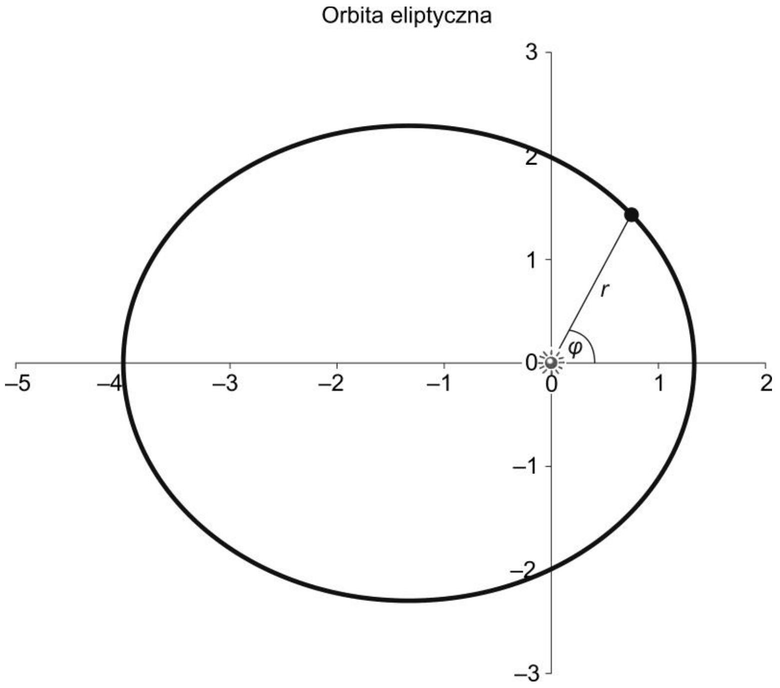
w którym p i e są dodatnimi stałymi oraz $0 < e < 1$. Stała e nazywana jest mimośrodem orbity. Maksymalna odległość od Słońca (aphelium) wynosi więc

$$r_{\max} = \frac{p}{1-e},$$

a minimalna (peryhelium):

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e}.$$

* Pisząc „Planeta” dużą literą Autor ma na myśli którąś z planet Układu Słonecznego.



Równanie opisuje elipsę o półosiach:

dłuższej $$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{1}{2}\left(r_{\min} + r_{\max}\right)$$

oraz krótszej $$b = a\sqrt{1-e^2}\ .$$

Sprawdźmy, ile wynosi średnia odległość Planeta–Słońce. Tu musimy zdecydować, jaka średnia nas interesuje: względem kąta, czy względem czasu. Te dwie wydają się jedynymi sensownymi, bo dostępnymi obserwacji. Obliczmy obie. Zacznijmy od średniej względem kąta:

$$\langle r \rangle_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(\varphi)\,d\varphi = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = b\,.$$

Niedobrze – otrzymaliśmy długość krótszej półosi elipsy. Może lepiej nam pójdzie z uśrednieniem względem czasu? Musimy w tym celu zmienić zmienną całkowania i dodatkowo wyznaczyć okres obiegu. Bo poszukiwana średnia to:

$$\langle r \rangle_t = \frac{1}{T}\int_0^{T} r(t)\,dt\,.$$

W ostatniej całce musimy zmienić zmienną całkowania z t na φ. Skorzystamy z II prawa Keplera: w równych odcinkach czasu promień wodzący Planety zakreśla jednakowe pola. We współczesnym języku wzorów możemy II prawo zapisać tak:

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C,$$

gdzie C jest pewną stałą. Teraz możemy napisać wynikający stąd wzór na pochodną promienia względem czasu:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{2C}{r^2}.$$

Tym samym czas T, w którym Planeta obiega Słońce, wynosi:

$$T = \int_0^T dt = \frac{1}{2C}\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi,$$

a zatem, uśredniona względem czasu wartość promienia to:

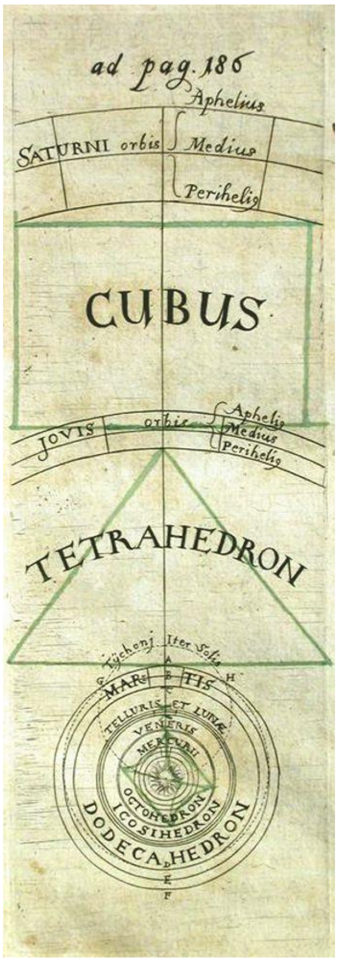
$$\langle r \rangle_t = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} \frac{r^3}{2C} d\varphi = \frac{\int_0^{2\pi} r^3 d\varphi}{\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi}.$$

Po obliczeniu całek i skorzystaniu ze związku a z parametrem p dostajemy:

$$\langle r \rangle_t = a\left(1 + \frac{e^2}{2}\right).$$

Otrzymaliśmy dwie różne wartości średniej i obie różne od dłuższej półosi a: poprzednio mniejszą niż a, a teraz znowu większą niż a. To jak to w końcu jest z III prawem Keplera? Co właściwie stwierdził Kepler? Nie mógł przeprowadzić obliczeń podobnych do naszych, bo rachunek całkowy powstał dopiero kilkadziesiąt lat po jego śmierci. Niektóre fragmenty jego wywodów są dosyć bliskie wprowadzonym później pojęciom analizy – w swoich rozważaniach dzielił np. ruch planety na „dzienne odcinki" – pisał jednak bardzo zawile i badacze jego dzieł do dziś spierają się, czy poprawny wniosek nie był wynikiem popełnienia kompensujących się błędów [1]. Na szczęście ozdobił swoje wywody bardzo czytelnym rysunkiem, na którym łuk odpowiadający „średniemu promieniowi" wypada dokładnie w połowie odległości między łukiem w aphelium i w peryhelium. Oznacza to, że średnia odległość Planeta–Słońce to według Keplera:

$$\langle r \rangle_{\text{Kepler}} = \frac{1}{2}\left(r_{\min} + r_{\max}\right) = a.$$



Geometryczna harmonia brył foremnych w *Harmonices Mundi* (1619)[**]

Nie mógł zresztą inaczej rozumieć średniej, bo samo pojęcie średniej funkcji ciągłej, jakim posługiwaliśmy się powyżej, pojawiło się dopiero wraz z rachunkiem całkowym. Dziś posługiwanie się tym pojęciem jest oczywiste. W wielu podręcznikach fizyki i astronomii nadal jednak można znaleźć „historyczne" sformułowanie III prawa Keplera, co prowadzi do pytania, od którego rozpoczął się ten artykuł. Jak się wydaje, wielu wykładowców mechaniki zaczyna od rozstrzygnięcia tej wątpliwości i z dumą dzieli się swym wyjaśnieniem z kolegami [2–5]. Podczas wykładów z fizyki trzy prawa Keplera pojawiają się jako elementy rozwiązania zagadnienia ruchu dwóch ciał o masach M i m przyciągających się (centralną) siłą malejącą z kwadratem odległości. Rozwiązanie pozwala powiązać wartość „stałej" w III prawie Keplera z wielkościami mas obu ciał:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M+m)}{4\pi^2}.$$

W tym miejscu dyskusję kończy zwykle krótka uwaga, że masa całego Układu Słonecznego jest bardzo nieznacznie większa od masy Słońca – oznaczonej w powyższym wzorze jako M, a dla każdej z planet jej masa m jest tak mała w porównaniu z M (dla najmasywniejszej z planet, Jowisza, $m/M < 0{,}001$), że można ją pominąć otrzymując III prawo Keplera. Sądzę, że warto poświęcić więcej czasu na refleksję, na ile rozwiązanie zagadnienia dwóch ciał „wyjaśnia" prawa Keplera sformułowane wyłącznie na podstawie obserwacji. Poza ogromem masy Słońca obserwacyjne sformułowanie praw Keplera było możliwe także dzięki szczególnemu wzajemnemu położeniu planet – odległości każdej z nich od wszystkich pozostałych jest tak duża, że ich wzajemne przyciąganie powoduje bardzo niewielkie zaburzenia ich „keplerowskich" ruchów. Dążenie do wyjaśnienia obserwowanych niewielkich odchyleń od praw Keplera przez

[**] Napisy pomiędzy trójkami łuków i nazwami planet odnoszą się do spekulacji Keplera o związku rozmiarów orbit z bryłami platońskimi (opublikował te spekulacje, no może hipotezy, w *Tajemnica Kosmosu* – jest tłumaczenie polskie).

ponad 200 lat stymulowało rozwój mechaniki, a po drodze umożliwiło odkrycie Neptuna i Plutona – planet znalezionych dokładnie w miejscach, w których obliczenia wskazywały na obecność ciał zaburzających ruchy znanych wcześniej planet Układu Słonecznego. Ale to już całkiem inna historia...

Literatura

[1] E.J. Aiton, *Isis*, **60**, 75 (1969) i cytowana tam literatura.
[2] R.A. Aziz, *American Journal of Physics*, **34**, 538 (1966).
[3] J.E. Prussing, *American Journal of Physics*, **45**, 1216 (1977).
[4] M. Bucher, D.P. Siemens, *American Journal of Physics*, **66**, 88 (1998).
[5] M. Bucher, D. Elm, D.P. Siemens, *American Journal of Physics*, **66**, 929 (1998).