O oszczędnym ogrzewaniu domu – rozważania teoretyka

Piotr Białas
Instytut Fizyki UJ

Często spotykałem się z opinią, że wychodząc z domu na krótko nie warto wyłączać pieca, ponieważ więcej potrzeba energii do ponownego ogrzania domu niż się jej oszczędzi. Wydawało mi się to niezgodne z moją intuicją, więc w końcu postanowiłem to sprawdzić.

Określmy najpierw założenia. Niech na zewnątrz domu temperatura wynosi T_{out}, a w domu będziemy się starali utrzymać temperaturę T_{in}. Przez $T = T(t)$ będę oznaczał aktualną temperaturę wewnątrz domu. Dom traci ciepło z prędkością proporcjonalną do różnicy temperatur wewnątrz i na zewnątrz:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = A(T - T_{out}) \tag{1}$$

gdzie A jest pewną stałą tym mniejszą, im lepiej nasz dom jest izolowany. Żeby więc utrzymać stałą temperaturę, piec musi pracować z mocą:

$$W_{eq} = A(T_{in} - T_{out}) \tag{2}$$

W czasie Δt trzeba więc dostarczyć

$$\Delta Q_{eq} = \Delta t\, A(T_{in} - T_{out}) \tag{3}$$

ciepła. Przy okazji proszę zauważyć, że przy różnicy temperatur równej 20 stopni obniżając temperaturę w domu o jeden stopień oszczędzamy 5% energii.

Rozważmy teraz co się stanie, jeżeli temperatura nie będzie stała. Powiedzmy, że zaczynamy w stanie o temperaturze T_{in} i po czasie Δt znów mamy temperaturę T_{in}. Żeby tak się stało musimy dostarczyć przez ten okres dokładnie tyle samo ciepła ile uciekło przez ściany. Tę wielkość możemy obliczyć korzystając ze wzoru (1):

$$\Delta Q = \int_0^{\Delta t} \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\Delta t} A\big(T(t) - T_{out}\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\Delta t} A\,T(t)\,\mathrm{d}t - T_{out}\Delta t \tag{4}$$

Porównując to z poprzednimi obliczeniami dostajemy:

$$\Delta Q_{eq} - \Delta Q = \int_0^{\Delta t} A\big(T_{in} - T(t)\big)\,dt \tag{5}$$

Widać teraz, że jeśli $T(t)$ jest zawsze mniejsze od T_{in}, to ilość ciepła potrzebna w tym wypadku jest mniejsza niż w przypadku utrzymania stałej temperatury T_{in}.

Możemy to sobie przedstawić graficznie. Narysujmy wykres zależności temperatury od czasu. Wtedy całka (4) jest proporcjonalna do pola obszaru zawartego pomiędzy wykresem $T(t)$ i linią $T = T_{out}$ (zob. rysunek). Widać więc, że jakiekolwiek obniżenie temperatury w tym czasie powoduje zmniejszenie zużytej ilości ciepła. Należy tu podkreślić, że chodzi o obniżenie temperatury poprzez normalne chłodzenie domu i że zakładamy, że współczynnik A jest w tym czasie stały. Otworzenie okien spowoduje obniżenie temperatury, ale i też ucieczkę większej ilości ciepła niż założona we wzorze (4).

Żeby określić, ile naprawdę możemy oszczędzić, musimy obliczyć zależność temperatury od czasu. W tym celu potrzebujemy jeszcze jednej wielkości: całkowitej cieplnej pojemności domu C.

Zaczniemy więc od wyłączenia pieca na czas t_c (*cooling*). Zmiana temperatury jest związana ze zmianą ciepła wzorem:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

Łącząc to ze wzorem (1) dostajemy:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{A}{C}(T - T_{out}) \tag{7}$$

Podstawiając pomocniczą zmienną $x = T - T_{out}$ dostajemy proste równanie różniczkowe:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{A}{C}x \tag{8}$$

którego rozwiązaniem jest funkcja:

$$x(t) = K\exp\left(-\frac{A}{C}t\right) \tag{9}$$

Stałą K wyznaczamy z warunku początkowego $x(0) = T_{in} - T_{out}$. Oznaczając $\Delta T = T_{in} - T_{out}$ i $\tau_c = C/A$ dostajemy:

$$T(t) = \Delta T e^{-t/\tau_c} + T_{out} \tag{10}$$

Z tego wzoru widać, że wielkość τ_c jest czymś w rodzaju „stałej stygnięcia” i określa czas, po którym różnica temperatur wewnątrz i na zewnątrz domu zmniejszy się e razy. Po czasie t_c temperatura osiągnie więc wartość

$$T_{min} = \Delta T e^{-t_c/\tau_c} + T_{out} \tag{11}$$

Teraz ponownie włączymy piec, aby podgrzać dom z powrotem do temperatury T_{in}. Zakładamy, że piec będzie działał cały czas z mocą W. Moc W musi być większa od W_{eq}. Wtedy wzór (7) przybiera postać:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{W}{C} - \frac{A}{C}(T - T_{out}) = \frac{A}{C}\left(T - T_{out} - \frac{W}{A}\right) \tag{12}$$

Oznaczając $\Delta T_{max} = W / A$ i podstawiając $x = T - T_{out} - \Delta T_{max}$ dostajmy rozwiązanie:

$$T(t) = \left(T_{min} - (\Delta T_{max} + T_{out})\right) e^{-t/\tau_c} + \Delta T_{max} + T_{out} \tag{13}$$

Z tego wzoru widać, że ΔT_{max} to maksymalna różnica temperatur, o jaką piec może ogrzać nasz dom w stosunku do temperatury otoczenia. Dom osiągnie temperaturę T_{in} po czasie t_h (*heating*) równym:

$$t_h = \tau_c \log \frac{\Delta T_{max} + T_{out} - T_{min}}{\Delta T_{max} + T_{out} - T_{in}} \tag{14}$$

Podstawiając do tego wzoru T_{min} otrzymujemy:

$$t_h = \tau_c \log \frac{\Delta T_{max} - \Delta T e^{-t_c/\tau_c}}{\Delta T_{max} - \Delta T} \tag{15}$$

Do ogrzania domu zużyjemy więc $t_h W$ energii. Ostatecznie więc energia oszczędzona wynosi:

$$W_{eq}(t_c + t_h) - t_h W = A\left(t_c \Delta T - (\Delta T_{max} - \Delta t)\tau_c \log \frac{\Delta T_{max} - \Delta T e^{-t_c/\tau_c}}{\Delta T_{max} - \Delta T} \right) \tag{16}$$

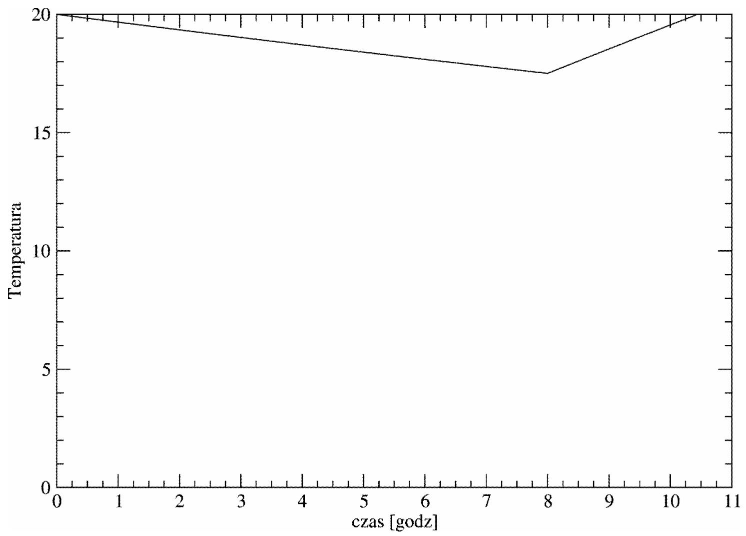
Żeby pozbyć się parametru A występującego w powyższym wzorze obliczmy ile procentowo zaoszczędzimy energii:

$$\frac{W_{eq}(t_c + t_h) - t_h W}{W_{eq}(t_c + t_h)} = \frac{t_c}{t_c + t_h} - \left(\frac{\Delta T_{max}}{\Delta T} - 1\right)\frac{\tau_c}{t_c + t_h} \log \frac{\Delta T_{max} - \Delta T e^{-t_c/\tau_c}}{\Delta T_{max} - \Delta T} \tag{17}$$

Postarajmy się teraz oszacować parametry τ_c i ΔT_{max} występujące w wyprowadzonych wzorach. Załóżmy, że temperatura na zewnątrz T_{out} wynosi zero stopni, a docelowa temperatura wewnątrz 20 stopni. Mój piec wyłącza się o godz. 22:30 i włącza z powrotem o godz. 5:30. W tym czasie temperatura w domu spada o ok. 2–3 stopnie. Korzystając ze wzoru (10) dostajemy, że $\tau_c \approx 50$–75 h. Przyjmijmy więc, że $\tau_c = 60$ h. Około godziny 8:00 rano w domu zostaje osiągnięta temperatura 20 stopni, czyli $t_h = 2{,}5$ h. Korzystając ze wzoru (13) dostajemy

$$\Delta T_{\max} = \Delta T \frac{e^{t_h/\tau_c} - e^{-t_c/\tau_c}}{e^{t_h/\tau_c} - 1} \tag{18}$$

Podstawiając t_h = 2,4 h otrzymujemy $\Delta T_{max} \approx 78$ stopni. Przyjmijmy więc, że $\Delta T_{max} = 80$ stopni. Podstawiając otrzymane wartości do wzorów (10) i (13) dostajemy zależność temperatury od czasu przedstawioną na rysunku.



Krzywe temperatury wyglądają tu na proste, jest to spowodowane tym, że rozważane czasy są dużo mniejsze od τ_c i w tym zakresie funkcje ekspotencjalne są w przybliżeniu liniowe. Zgodnie z tym, co napisałem w pierwszej części artykułu o polu pod tym wykresem, możemy się spodziewać, że oszczędności nie będą duże. Podstawiając obliczone wielkości do wzoru (17) dostajemy, że pomiędzy godziną 22:30 a 8:00 rano oszczędziliśmy $\approx 6\%$ energii. Przyznam się, że byłem zaskoczony tym wynikiem, ponieważ spodziewałem się większych oszczędności. Większe oszczędności uzyskamy obniżając na stałe temperaturę w mieszkaniu o x stopni, czyli zamiast 20°C będziemy utrzymywać temperaturę $20 - x$.

Od Redakcji:

Autor pomija fakt, że kaloryfery są zwykle cieplejsze od T_{in} = 20°C, czyli efektywnie mamy układ nie dwóch, lecz trzech ciał o różnych temperaturach. Objętość „cieczy kaloryferowej” zależy od typu instalacji – od kilkudziesięciu do kilkuset litrów – co może być niebagatelnym czynnikiem w równaniach (6) i (12).