

Homologia we włoskiej kuchni i astrofizyce

Radosław A. Kycia¹

*Faculty of Science, Masaryk University, Kotlářská 2,
602 00 Brno, Czechy.*

*Instytut Fizyki, Politechnika Krakowska im. Tadeusza
Kościuszki, Podchorążych 1, 30-084 Kraków, Polska.*

Czy zastanawialiście się kiedyś, jak odróżnić dwie powierzchnie? Jak udowodnić, że są one różne? W przypadku prostych dwuwymiarowych powierzchni wystarczy się dobrze przypatrzeć, jednak czasami jest to trudne zadanie – szczególnie, gdy mamy do czynienia z wielowymiarowymi przestrzeniami.

Żeby ten cel osiągnąć, matematycy na przestrzeni lat skonstruowali wiele obiektów zwanych „niezmiennikami”, które są powiązane z cechami charakterystycznymi powierzchni. Działają one na zasadzie kontrapozycji – jeżeli dwie powierzchnie (przestrzenie) mają różne wartości tych niezmienników, to możemy z całą pewnością powiedzieć, że są różne. Jednak, jeżeli powierzchnie mają takie same wartości niezmienników, to zazwyczaj nie upoważnia nas to do stwierdzenia, że są takie same – musimy szukać innych niezmienników, które potrafią „rozdzielić” te powierzchnie lub to my musimy udowodnić, że są one takie same. Jest to bardzo nieprecyzyjne stwierdzenie, gdyż nie powiedzieliśmy co oznacza „takie same”, czym jest „niezmiennik” i względem jakich przekształceń jest niezmienny. Postaramy się to naprawić, prezentując poniżej jedną z prostszych klas niezmienników zwanych grupami homologii.

Jednym z najbogatszych źródeł takich niezmienników jest topologia algebraiczna. Skupimy się na jednej z klas niezmienników zwanych grupą homologii dla rozważanej przestrzeni topologicznej. Żeby jednak wytłumaczyć ideę, należy rozpocząć od rozszyfrowania terminu „topologia algebraiczna”. Rozpocznijmy od słowa „topologia” – jest to nauka o własnościach obiektów, które nie zmieniają się pod wpływem przekształceń zwanych homeomorfizmami. Są to przekształcenia ciągłe, które posiadają przekształcenia odwrotne, które również są ciągłe. Mówiąc prościej, są to takie przekształcenia, które zachowują bliskość punktów i są bijektywne (tzn. odwzorowanie posiada odwzorowanie odwrotne). Takie przekształcenia nie rozrywają przestrzeni (nie generują dziur) oraz nie zaklejają ich – bliskie punkty po takim przekształceniu pozostają bliskie.

Bardzo znany matematyczny żart mówi, że dla Topologa kubek z uchem i precel są nierozróżnialne. Wynika to z faktu, że kubek z uchem możemy przekształcić przy użyciu homeomorfizmów (zdeformować jak model z plasteliny bez rozrywania powierzchni i zaklejania dziur w niej) w precel² (czyli kubek jest homeomorficzny z precelem) – zobacz rys. 1.

¹ Adres elektroniczny: kycia.radoslaw@gmail.com

² Z czym homeomorficzny jest człowiek? – zauważ, że układ pokarmowy i oddechowy to dziury których nie możesz rozrywać i sklejać. Dla uproszczenia możesz zaniedbać na początku naczynia krwionośne i inne, które też są dziurami.



Rys. 1. Dla topologa kubek i precel to to samo

Ta anegdota idealnie pokazuje to jak „czuła” jest topologia i do czego możemy jej użyć. Wskutek ciągłej deformacji może się zmienić pole powierzchni czy objętość (możemy obiekt rozciągnąć lub ścisnąć bez rozrywania i sklejanego), więc takie wielkości nie są niezmiennie z punktu widzenia topologii – nie są jej niezmiennikami. W naszych rozważaniach skupimy się tylko na niezmiennikach homeomorfizmów.

Kolejnym słowem jest „algebraiczna”. Algebra potocznie rozumiana kojarzy nam się z operacjami na wyrażeniach zawierających symbole, np. liczby i litery. W ogólnym przypadku te symbole reprezentują abstrakcyjne obiekty. Dla przykładu – używając znanych reguł dodawania, możemy obliczyć z równania

$$a+b=c, \quad (1)$$

czemu równe jest a , tzn. $a=c-b$.

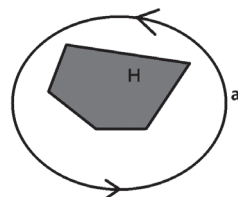
Zatem połączenie słów „topologia algebraiczna” oznacza naukę pozwalającą badać niezmienniki topologiczne przy użyciu metod rachunkowych znanych nam z algebry.

W tym momencie Czytelnik zapewne zastanawia się, co to za niezmienniki topologiczne, które można „dodawać”. Otóż jest ich cała gama. My skupimy się na jednym z nich, który nazywany jest grupą homologii. Jest ona jednym z głównych niezmienników topologii algebraicznej i jest matką innych niezmienników, jak np. zdefiniowana przez nas wkrótce charakterystyka Eulera. Inną dużą klasą niezmienników, które ma nam do zaoferowania topologia algebraiczna są grupy homotopii.

W przykładzie z kubkiem i precelem zauważyliśmy, że homeomorfizm nie zmieniał liczby dziur – ucho i środek precla. Dlatego dobrze byłoby skonstruować niezmiennik który informuje nas (między innymi) o liczbie wielowymiarowych dziur w powierzchni. Ten niezmiennik nazwiemy pierwszą grupą homologii i oznaczymy H_1 . Pierwsza grupa homologii jest bardzo podobna do pierwszej grupy homotopii. Ta druga bada możliwość ciągłego ściągnięcia krzywej zamkniętej („pętelki”) do punktu nie wychodząc poza przestrzeń. Takiemu ściągnięciu może przeszkadzać właśnie dziura którą pętelka otacza. Grupy homotopii to temat na osobny artykuł.

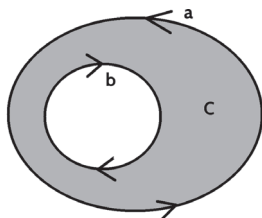
2. Pierwsza grupa homologii

Skupmy się na początku na dwumiarowej powierzchni, np. na płaszczyźnie i wytnijmy w niej dziurę oznaczoną na rys. 2 przez H .



Rys. 2. Płaszczyzna z dziurą H oraz krzywą zorientowaną a otaczającą dziurę

Otocza ją krzywa zamknięta a na płaszczyźnie, a strzałki na niej określają jej orientację – przeciwną do ruchu wskazówek zegara. W przypadku krzywej zamkniętej na płaszczyźnie orientację „dodatnią” (przeciwnie do wskazówek zegara) wybieramy tak, że idąc wzdłuż krzywej zgodnie z kierunkiem wskazanym przez tę orientację, wewnątrz obszaru ograniczonego przez krzywą mamy po stronie lewej. Przeciwna definicja (orientacja „ujemna”) jest z matematycznego punktu widzenia równoważna poprzedniej i równie dobrze możemy ją wybrać jako domyślną. Żeby więc ustalić jedną z nich stosujemy wskazanie „spoza matematyki” – kierując się sercem, a dokładniej, jego asymetrycznym położeniem w naszym ciele. Wracając do rys. 2, cechą charakterystyczną tej krzywej zamkniętej jest to, że nie można na niej rozpiąć powierzchni, która leży całkowicie w płaszczyźnie – przeszkodą jest dziura H . Jednocześnie krzywa zamknięta nie ma brzegu/końców. Takie krzywe, które nie mają brzegu nazywamy **cyklami** i jak zauważyliśmy pozwalają nam wykryć dziurę H .



Rodzi się więc naturalne pytanie – czy jest inna krzywa, która również opisuje H , a jeżeli tak, to czym się różni od a ? Spójrzmy na rys. 3.

Rys. 3. Zorientowane krzywe zamknięte a oraz b , które rozpinają brzeg powierzchni C

Widzimy dwie krzywe zamknięte a oraz b , które rozpinają/są brzegiem powierzchni C . Podkreślmy, że taką powierzchnię możemy rozpiąć na dwóch krzywych tylko dlatego, że pomiędzy nimi nie ma dziury, która przeszkodziłaby nam. Jeżeli operację brania brzegu oznaczymy ∂ , wówczas relację opisującą rys. 3 możemy zapisać tak:

$$\partial C = a - b. \quad (2)$$

Interpretacja tego wzoru jest następująca: powierzchnia C składa się z zamkniętej krzywej zorientowanej a przeciwnie do ruchu wskazówek zegara (orientacja „+”) oraz zamkniętej krzywej zorientowanej b zgodnie z ruchem wskazówek zegara (orientacja „-”). Znak minus przed b jest powiązany z orientacją. Możemy również popatrzeć na równanie (2) inaczej – krzywe a oraz b różnią się o brzeg. To jest właśnie to, o co nam chodziło – jeżeli dwie krzywe zamknięte różnią się o brzeg, to znaczy, że można na nich rozpiąć powierzchnię, czyli że pomiędzy nimi nie ma żadnych dziur!

Zatem to nie cykle nas interesują tylko takie zbiory cykli, które (nie)różnią się o brzeg. Chcemy wiedzieć, ile jest nierównoważnych, tzn. nie różniących się o krzywe brzegowe, cykli. Każda taka klasa opisuje jedną dziurę.

Matematycy opisaliby tę konstrukcję w taki oto sposób: wyobraźmy sobie przestrzeń, którą chcemy przeanalizować, np. powierzchnię. Na początku zdefiniujmy zbiór Z_1 wszystkich możliwych cykli, czyli zbiór takich krzywych d , które nie mają brzegu. Następnie zdefiniujmy zbiór wszystkich krzywych będących brzegiem jakiegokolwiek powierzchni zawierającej się w tej przestrzeni, którą rozważamy – nazywamy go B_1 . Innymi słowy krzywa b należy do zbioru B_1 , jeżeli

istnieje taka powierzchnia B , której brzegiem jest ta krzywa, tzn. $\partial B=b$. Ostatni krok to podzielenie zbioru Z_1 na klasy równoważności elementów. W każdej klasie są tylko te cykle, które różnią się o brzeg od siebie – możemy wybrać jednego reprezentanta, gdyż każdego kolejnego z tej samej klasy otrzymamy, dodając odpowiedni brzeg.

Taka operacja podziału oznaczana jest przez matematyków podobnie do operacji dzielenia, a rezultatem takiego „dzielenia” jest tzw. **przestrzeń ilorazowa**. Zatem w przypadku cykli Z_1 i brzegów B_1 jako rezultat otrzymamy **pierwszą grupę homologii H_1** , tzn.

$$H_1 = \frac{Z_1}{B_1}. \quad (3)$$

Podkreślmy jeszcze raz, że elementami zbioru H_1 są zbiory cykli (zwane klasami równoważności lub abstrakcji), które różnią się o brzeg. Dwie takie klasy nie mogą mieć wspólnego cyklu, bo inaczej przez ten cykl można połączyć te dwie klasy w jedną większą klasę. Klasę abstrakcji cyklu c oznaczamy przez $[c]$.

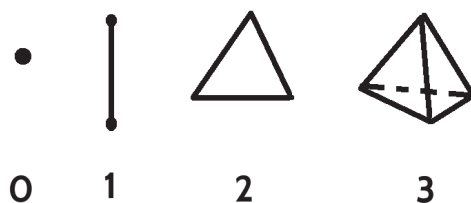
Zauważmy jeszcze, że klasa abstrakcji cyklu zerowego to zbiór wszystkich brzegów B_1 , ($0=[B_1]$), gdyż w H_1 interesują nas tylko te cykle, które się różnią o B_1 .

Czytelnik z pewnością zastanawia się, co oznacza indeks l przy H_l i czy mogą pojawić się inne liczby? Otóż l oznacza, że interesują nas jednowymiarowe cykle i brzegi – krzywe. Możemy jednak zdefiniować podobnie wielowymiarowe cykle i brzegi. Jest to proste, ale wymaga ściślejszych rozważań, które podamy w następnej części.

3. Sympleksy i homologie

Będziemy chcieli zdefiniować grupy homologii dla przestrzeni, które dają się zredukować do prostych tworów zwanych kompleksami symplecjajnymi składającymi się z sympleksów. Takie przestrzenie nazywamy przestrzeniami triangułowalnymi i za chwilę geneza tego terminu stanie się jasna. Nie jest to zbyt ograniczające założenie, gdyż wiele przestrzeni da się opisać w ten sposób.

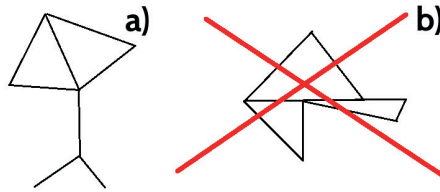
Zacznijmy od sympleksów – są to najprostsze figury geometryczne, które są wypukłe. Zerowymiarowe sympleksy to punkty, jednowymiarowe to odcinki, dwuwymiarowe to trójkąty, a trójwymiarowe to czworościany – zobacz rys. 4.



Rys. 4. Sympleksy różnych wymiarów

Sympleksy możemy ze sobą „kleić” tak, aby „pasowały do siebie”. Takie konstrukcje nazywamy **kompleksami symplecjajnymi** – jest to zbiór sympleksów

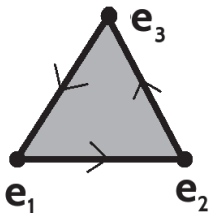
połączonych niżej wymiarowymi sympleksami tak, że przylegają one do siebie dokładnie – dla przykładu zobacz rys. 5.



Rys. 5. a) kompleks symplecjalny; b) figura nie jest kompleksem symplecjalnym, gdyż ściany trójkątów nie przylegają do siebie

Widzimy więc, że kompleksy symplecjalne mogą mieć bardzo skomplikowane kształty. Przestrzenie triangulowalne są takimi, które możemy „triangulować”, czyli odwzorować homeomorficznie na kompleksy symplecjalne. Innymi słowy, dla topologii takie przestrzenie są tożsame z kompleksami symplecjalnymi.

Dzięki sympleksom możemy podać łatwą kombinatoryczną definicję **operacji („operatora”) brania brzegu** ∂ . Popatrzmy na zorientowany dwuwymiarowy sympleks o wierzchołkach e_1 , e_2 oraz e_3 . Orientację/kierunek obiegu oznaczamy przez kolejność wierzchołków w zapisie:



$$[e_1, e_2, e_3], \quad (4)$$

co oznacza, że starujemy z wierzchołka e_1 , następnie poruszamy się do e_2 , a na końcu do e_3 – zobacz Rys. 6.

Rys. 6. Zorientowany sympleks dwuwymiarowy

Operacja brania brzegu jest odpowiednią sumą mniej wymiarowych sympleksów:

$$\partial[e_1, e_2, e_3] = [e_2, e_3] - [e_1, e_3] + [e_1, e_2] = [e_2, e_3] + [e_3, e_1] + [e_1, e_2]. \quad (5)$$

Zauważ, że operacja brania brzegu usuwa wierzchołek z oryginalnego sympleksu i dodaje znak powiązany z ilością przeskoków od początku listy wierzchołków do usuniętego elementu. W tym zapisie $[e_1, e_2]$ oznacza jednowymiarowy sympleks – zorientowany odcinek o orientacji od e_1 do e_2 . Jeżeli odwrócimy kolejność wierzchołków, to zmieni się orientacja, co skutkuje zmianą znaku, czyli $[e_1, e_2] = -[e_2, e_1]$. W ogólności, przestawiając parę wierzchołków, zmieniamy znak stojący przed sympleksem.

Podobnie, dla odcinka $[e_1, e_2]$ jego brzeg to $\partial[e_1, e_2] = e_1 - e_2$, czyli różnica jego punktów brzegowych.

W kolejnym kroku na sympleksach należących do kompleksu symplecjalnego zdefiniujemy operację mnożenia przez liczbę całkowitą oraz ich dodawania. Żeby zrozumieć to pojęcie, na początku zdefiniujemy **grupe**. Jest to zbiór z operacją dwuargumentową (działaniem grupowym) na elementach zbioru, która nie wyprzewadza poza ten zbiór, a także z wyróżnionym elementem, który jest elementem neutralnym operacji. Dodatkowo, każdy element w grupie ma element odwrotny. Przykładem grupy jest zbiór liczb całkowitych z dodawaniem jako operacją, a także zerem jako elementem neutralnym działania, tzn. trójka $(\mathbb{Z}, +, 0)$. Elementem

odwrotnym do danej liczby całkowitej jest liczba przeciwna, np. elementem odwrotnym do liczby 2 jest liczba -2 , gdyż ich suma daje nam element neutralny działania: $2 + (-2) = 0$. Grupa jest przemienne (abelowa³), gdy działanie grupowe jest przemienne – wynik nie zależy od kolejności argumentów. W naszym przykładzie działanie grupowe (dodanie liczb całkowitych) jest przemienne.

Grupę G , w której każdy element można otrzymać przez działanie grupowe ze skończonego zbioru elementów, nazywamy **grupą skończenie generowaną**. Przykładem takiej grupy jest również wspomniany zbiór liczb całkowitych z dodawaniem, gdyż startując z jedynki, poprzez jej sukcesywne dodawanie i odejmowanie potrafimy utworzyć dowolną liczbę całkowitą.

Do opisu grup homologii potrzebujemy definicji grupy abelowej wolnej. Konstruujemy ją w następujących krokach. Na początku definiujemy operację mnożenia elementu x grupy G przez liczbę całkowitą $n > 0$: $nx = \underbrace{x + \dots + x}_n$, podobnie dla $n < 0$: $nx = \underbrace{(-x) + \dots + (-x)}_{|n|}$, a także $0x = 0$ (po prawej stronie 0 jest elementem neutralnym grupy abelowej G , a nie liczbą całkowitą). Następnie, mówimy, że zbiór elementów x_1, \dots, x_k grupy G jest **liniowo niezależny**, jeżeli nietrywialna kombinacja liniowa tych elementów nie daje rozkładu elementu neutralnego, tzn. jeżeli z warunku $n_1x_1 + \dots + n_kx_k = 0$ otrzymujemy jedynie $n_1 = \dots = n_k = 0$. Jest to warunek analogiczny do liniowej niezależności wektorów dla przestrzeni wektorowych. Wiedząc to, definiujemy **grupę abelową wolną** jako grupę generowaną przez skończoną liczbę liniowo niezależnych elementów.

Mając kompleks symplecjalny K , możemy zdefiniować **grupę łańcuchów** $C(K)$ dla tego kompleksu jako wolną grupę abelową na sympleksach tego kompleksu. Elementy tej grupy nazywamy **łańcuchami**. Innymi słowy, z sympleksów tego kompleksu możemy tworzyć kombinacje liniowe ze współczynnikami będącymi liczbami całkowitymi. Przykładem łańcucha dla grupy $C([e_1, e_2, e_3])$ może być np. $e_1 + 5[e_1, e_2]$.

Operację brania brzegu poprzez liniowość możemy rozszerzyć na łańcuchy, np. $\partial(2[e_1, e_2] + [e_3, e_1]) = 2\partial([e_1, e_2]) + \partial([e_3, e_1])$. Wiedząc to, czytelnik będzie potrafił udowodnić $\partial\partial[e_1, e_2, e_3] = 0$, czyli to, że brzeg brzegu dla łańcucha $[e_1, e_2, e_3]$ jest pusty⁴. Jest to ogólna własność operacji brania brzegu: $\partial\partial = 0$ dla dowolnych wielowymiarowych kompleksów symplecjalnych.

Mamy już wszystkie informacje potrzebne, żeby skonstruować grupy homologii. Daną powierzchnię możemy podzielić na kompleksy złożone z łańcuchów różnych wymiarów, np. C_2, C_1, C_0 . Wówczas operator (brania) brzegu odwzorowuje kompleksy według schematu

$$\dots \xrightarrow{\partial_3} C_3 \xrightarrow{\partial_2} C_2 \xrightarrow{\partial_1} C_1 \xrightarrow{\partial_0} 0, \quad (6)$$

gdzie strzałki wskazują kierunek działania operatora brzegu ∂ . Operatory te są ponumerowane, gdyż działają na różne kompleksy, więc nie są to te same operatory. Ostatnia strzałka wskazuje, że punkt nie ma brzegu, co jest oczywiste.

³ Niels Henrik Abel – matematyk norweski.

⁴ Matematycy powiedzieliby, że jest to operacja nilpotentna.

Spróbujmy teraz powiązać to z cyklami i brzegami. W tym celu dla operatora liniowego A zdefiniujemy jądro (od angielskiego słowa *kernel*) jako zbiór tych elementów, które operator odwzorowuje na element neutralny, tzn. $\ker(A) = \{x, Ax=0\}$. Z kolei obraz tego operatora oznaczany jako $\text{image}(A)$ (od angielskiego słowa *image*), to zbiór wartości tego operatora.

Zdefiniujmy cykl jako taki łańcuch, którego brzeg znika. Matematycy mówią więc, że cykle to elementy jądra operatora ∂ i zapisują je jako zbiór $\ker(\partial)$. Zatem zbiór k -wymiarowych cykli to $Z_k = \ker(\partial_k)$. Z kolei brzeg to taki łańcuch, który jest wynikiem działania operatora brzegu na inny łańcuch o indeksie/wymiarze o jeden większym od wymiaru rozważanego łańcucha. Matematycy powiedzieliby, że taki łańcuch należy do obrazu operatora brzegu oznaczanego przez $\text{image}(\partial)$. Czyli zbiór k -wymiarowych brzegów to $B_k = \text{image}(\partial_{k+1})$.

Teraz k -tą grupę homologii definiujemy uogólniając (3):

$$H_k = \frac{Z_k}{B_k} = \frac{\ker(\partial_k)}{\text{image}(\partial_{k+1})}. \quad (7)$$

Jeszcze raz podkreślamy, że tutaj znak dzielenia nie jest znanym nam dzieleniem liczb, a operacją tworzenia przestrzeni ilorazowej, w której mamy klasy cykli. Takie cykle, jeżeli różnią się o brzeg, czyli dowolny element ze zbioru B_k , należą do tej samej klasy równoważności.

Często sympleksy deformuje się przy użyciu odwzorowań ciągłych („bez rozrywania i bez zaklejania dziur”), np. trójkąt możemy przekształcić w sposób ciągły na okrąg, z kolei odcinek – na fragment krzywej. Dla ciągłego przekształcenia sympleksów również możemy zdefiniować teorię homologii zwaną **homologią singularną**. W podstawowych zastosowaniach, które będziemy rozpatrywać poniżej, nie ma znaczenia, czy będziemy rozpatrywać sympleks, czy jego zdeformowaną wersję, gdyż otrzymamy takie same wyniki.

Jak za chwilę zobaczymy grupy homologii mają następującą strukturę:

$$H_k = \mathbb{Z}[a_1] \oplus \mathbb{Z}[a_2] \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}[a_i] \oplus \mathbb{Z}_p[a_{i+1}] \oplus \mathbb{Z}_{p(n-i)}[a_n]. \quad (8)$$

Wyjaśnijmy ten zapis. Klasy abstrakcji generatorów oznaczane są przez $[a_i]$, a \mathbb{Z} to zbiór liczb całkowitych. Symbol $\mathbb{Z}[a_i]$ oznacza, że generator $[a_i]$ jest mnożony przez dowolną liczbę całkowitą – jeżeli jest to zero, to tego składnika nie piszemy. Symbol \oplus oznacza tzw. sumę prostą, która zachowuje się podobnie do zwykłej sumy – oznacza ona kombinację liniową generatorów. Natomiast \mathbb{Z}_p oznacza liczby całkowite modulo p . Dla przykładu, \mathbb{Z}_2 oznacza zbiór liczb $\{0, 1\}$, gdzie dodawanie „zapętla się”: $0+0=0$, $0+1=1+0=1$, natomiast $1+1=0$ (cykliczność).

Podajmy kilka przykładów elementów z $H_4 = \mathbb{Z}[a_1] \oplus \mathbb{Z}_2[a_2]$, np. $2[a_1] \oplus [a_1]$, $[a_1]$, $5[a_2] = [a_2]$.

Zanim przejdziemy do przykładów obliczeń grup homologii, zdefiniujmy jeszcze dwa ciekawe niezmienniki topologiczne oparte na grupach homologii.

Pierwszym z nich są liczby Bettiego⁵, które są liczbą powtórzeń składników z \mathbb{Z} w grupach homologii. Jeżeli nie ma żadnych wystąpień, to liczba Bettiego

⁵ Od nazwiska włoskiego matematyka Enrico Bettiego, który zajmował się topologią.

dla tej grupy homologii wynosi zero. Dla przykładu weźmy k -tą grupę homologii z równania (8). Widzimy, że mamy l wystąpień \mathbb{Z} , więc k -ta liczba Bettiego b_k wyniesie $b_k = l$.

Stąd już bardzo łatwo obliczymy charakterystykę Eulera⁶ oznaczaną przez grecką literę χ (wymawiaj „chi”). W tym celu musimy wyznaczyć wszystkie niezerowe liczby Bettiego i je odpowiednio zsumować, stawiając przed liczbami Bettiego o nieparzystym indeksie dodatkowy znak minus, czyli

$$\chi = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \dots \quad (9)$$

Ta suma kończy się, gdyż grupy homologii – a wraz z nimi liczby Bettiego – znikają od pewnego miejsca w sumie jeżeli mamy do czynienia z przestrzeniami wymiaru skończonego.

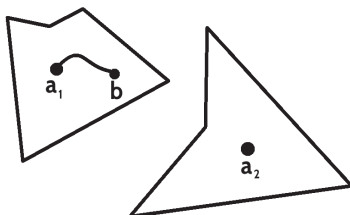
Definicje zawarte w tym rozdziale wyglądają dosyć abstrakcyjnie, dlatego dobrze jest przyjrzeć się kilku przykładom.

3.1 H_0

Na rozgrzewkę sprawdźmy, jak wygląda zerowa grupa homologii.

Wiemy już, że C_0 jest zbiorem punktów i ich kombinacji ze współczynnikami będącymi liczbami całkowitymi. Wiemy również, że punkty nie mają brzegu, więc jądro operatora ∂_0 jest całą przestrzenią C_0 . Pozostaje nam jedynie sprawdzić, jaki jest obraz operatora ∂_1 .

Zwróćmy uwagę na fakt, że jeżeli dwa punkty A oraz B możemy połączyć krzywą deformowalną do odcinka $[A, B]$, to różnią się one o brzeg, gdyż $\partial[A, B] = A - B$. Zatem punkt z każdej składowej łukowo spójnej (składnika przestrzeni, w którym każde dwa punkty możemy połączyć krzywą nie wychodzącą poza ten składnik) jest reprezentantem tej składowej – zobacz rys. 7.



Rys. 7. Przestrzeń składająca się z dwóch składowych łukowo spójnych. W pierwszej z nich wybieramy punkt a_1 , który reprezentuje tę samą klasę równoważności co punkt b_1 . W drugiej składowej na reprezentanta wybierzemy punkt a_2

Załóżmy, że mamy przestrzeń składającą się z k składowych spójnych. Wybierzmy w każdej z tych składowych jeden punkt reprezentujący ją a_1, \dots, a_k . Wówczas zerowa grupa homologii to

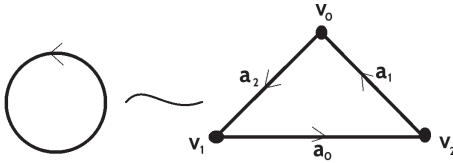
$$H_0 = \mathbb{Z}[a_1] \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}[a_k]. \quad (10)$$

Liczba składników w tej sumie prostej jest równa liczbie składowych spójnych rozważanej przestrzeni. Jest to również ważny niezmiennik topologiczny.

⁶ Leonhard Euler – szwajcarski matematyk, który większą część życia pracował w Prusach i Rosji.

3.2 OKRĄG

Okrąg (który matematycy oznaczają przez S^1) jest przestrzenią spójną i posiada jedną dwuwymiarową dziurę w środku, której cyklem jest cały okrąg. Zatem od razu możemy powiedzieć, jak wyglądają grupy homologii.



Rys. 8. Deformacja okręgu do sympleksu

Przyjmijmy jednak bardziej edukacyjne podejście i spróbujmy obliczyć homologię przy wykorzystaniu sympleksów. Zatem okrąg to zdeformowany trójkąt pusty w środku – rys. 8.

Mamy więc trzy wierzchołki v_0, v_1 oraz v_2 stanowiące bazę C_0 oraz trzy odcinki

$$a_0 = [v_1, v_2], a_1 = [v_2, v_0], a_2 = [v_0, v_1], \quad (11)$$

stanowiące bazę C_1 . C_2 oraz wyższe kompleksy są puste, gdyż nie ma sympleksów wyższego wymiaru niż 1. Możemy więc zapisać formalne kombinacje w poszczególnych łańcuchach jako

$$C_0 = \mathbb{Z}v_0 \oplus \mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2, \quad (12)$$

$$C_1 = \mathbb{Z}a_0 \oplus \mathbb{Z}a_1 \oplus \mathbb{Z}a_2.$$

Sytuacja z braniem brzegu wygląda następująco

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0. \quad (13)$$

Na początek obliczmy brzegi krawędzi trójkąta (1-sympleksy):

$$\partial_1 a_0 = v_2 - v_1, \partial_1 a_1 = v_2 - v_0, \partial_1 a_2 = v_1 - v_0. \quad (14)$$

Chcemy teraz powiedzieć, jakie jest jądro operatora ∂_1 . Jest algorytmiczny sposób na jego obliczenie, który działa dla dowolnie skomplikowanych przypadków, wymagałby on jednak pewnego dłuższego wprowadzenia do algebry liniowej, więc rozważmy prostsze podejście. Zauważmy, że jeżeli odpowiednio dodamy stronami te trzy równania (14), to po kilku próbach dojdziemy do wniosku, że

$$\partial_1(a_0 - a_1 + a_2) = (v_2 - v_1) - (v_2 - v_0) + (v_1 - v_0) = 0, \quad (15)$$

więc kombinacja $a_0 - a_1 + a_2$ jest elementem jądra operatora: $\ker(\partial_1)$. Możemy również sprawdzić (co bez znajomości algebry liniowej jest trudniejsze), metodą prób i błędów, że to jedyna kombinacja, która pod wpływem brania brzegu zeruje się. Zatem jądro zawiera tylko ten element i jego całkowite wielokrotności, tzn. $\ker(\partial_1) = \mathbb{Z}(a_0 - a_1 + a_2)$.

Widzimy również, że operator ∂_2 jest tu nieistotny, gdyż nie ma łańcuchów wymiaru 2, ponieważ trójkąt ma dziurę w środku. Zatem korzystając z naszej definicji homologii, $\text{image}(\partial_2) = \emptyset$ (zbiór pusty):

$$H_1 = \ker(\partial_1) = \mathbb{Z}[a_0 - a_1 + a_2]. \quad (16)$$

W celu obliczenia H_0 musimy znaleźć $\text{image}(\partial_2)$, gdyż wiemy już, że operator ∂_0 zeruje wszystkie łańcuchy (kombinacje linowe punktów) z C_0 , czyli $\ker(\partial_0) = C_0 = \mathbb{Z}(a_0 - a_1 + a_2)$. Spójrzmy na $\ker(\partial_1) = \mathbb{Z}(a_0 - a_1 + a_2)$. To równanie

mówi, że jeden spośród sympleksów a_0, a_1, a_2 jest zależny od pozostałych (bo suma trzech ma zerowy brzeg, a dowolna kombinacja dwóch nie). Zatem możemy wybrać dowolne dwa spośród trzech i będą one stanowiły bazę obrazu $image(\partial_1)$, gdyż ich brzegi (a także ich kombinacja) nie zerują się. Zatem $image(\partial_1) = \mathbb{Z}\partial_1 a_1 \oplus \mathbb{Z}\partial_1 a_2 = \mathbb{Z}(v_2 - v_1) \oplus \mathbb{Z}(v_2 - v_0)$. Możemy więc napisać

$$H_0 = \frac{ker(\partial_0)}{image(\partial_1)} = \frac{\mathbb{Z}v_0 \oplus \mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2}{\mathbb{Z}(v_2 - v_1) \oplus \mathbb{Z}(v_2 - v_0)}. \quad (17)$$

Żeby uprościć notację, musimy zrobić małą dygresję. Załóżmy, że mamy $\mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2$. Zapis ten mówi, że jest to zbiór wszystkich kombinacji, w których v_1 i v_2 mnożone są przez liczby całkowite i dodawane do siebie, np. $2v_1 \oplus 4v_2$. Możemy to również zapisać jako $2(v_1 - v_2) \oplus 6v_2$ i wówczas jest to element $\mathbb{Z}(v_1 - v_2) \oplus \mathbb{Z}v_2$. Zatem generatory v_1, v_2 możemy dowolnie ze sobą dodawać, odejmować i mnożyć przez liczby całkowite, ale ważne jest to, żeby ich w tych operacjach nie „gubić” – żeby zawsze można było odtworzyć ich oryginalny zapis $\mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2$, robiąc operacje odwrotne. Matematycy nazwaliby to „zakazem” zmiany wymiaru bazy przestrzeni rozpiętej na v_1 i v_2 .

Po tej dygresji możemy wrócić do obliczeń H_0 . W liczniku wyrażenia (17) zamiast v_0 użyjemy $-v_0 + v_2$ (zauważmy, że pomnożyliśmy v_0 przez -1 , co jest również liczbą całkowitą, a następnie dodaliśmy v_2), a zamiast v_1 użyjemy $-v_1 + v_2$, czyli otrzymamy

$$H_0 = \frac{ker(\partial_0)}{image(\partial_1)} = \frac{\mathbb{Z}(v_2 - v_0) \oplus \mathbb{Z}(v_2 - v_1) \oplus \mathbb{Z}v_2}{\mathbb{Z}(v_2 - v_1) \oplus \mathbb{Z}(v_2 - v_0)}. \quad (18)$$

Zauważmy teraz, że w liczniku i mianowniku znajdują się dwa te same elementy: $\mathbb{Z}(v_2 - v_0)$ oraz $\mathbb{Z}(v_2 - v_1)$. Operacja brania przestrzeni ilorazowej („dzielenie” w tym wzorze) mówi, że te kombinacje licznika, które występują również w mianowniku, są nieistotne (gdyż są brzegami), zatem upraszczając, mamy

$$H_0 = \mathbb{Z}[v_2]. \quad (19)$$

Uważny czytelnik zauważy, że zmieniając nasze wybory w powyższym rachunku, moglibyśmy równie łatwo dostać, że $H_0 = \mathbb{Z}v_1$ lub, że $H_0 = \mathbb{Z}v_0$. To tak naprawdę nie jest istotne, gdyż interesuje nas tylko liczba generatorów (w tym przypadku jeden), a nie jego dokładna postać. Ten rachunek mówi, że niezależnie od wyboru podczas obliczeń, zawsze skończymy z jednym generatorem. Odzwierciedla to fakt, że brzeg naszego trójkąta jest spójny – każde dwa punkty można połączyć krzywą leżącą na brzegu. Z tego powodu matematycy często pomijają generatory i piszą w skrócie

$$H_1 \cong \mathbb{Z}, H_0 \cong \mathbb{Z}. \quad (20)$$

Teraz możemy wyznaczyć liczby Bettięgo, licząc wystąpienia \mathbb{Z} w grupach homologii. Mamy więc zerową liczbę Bettięgo $b_0 = 1$ oraz pierwszą $b_1 = 1$, czyli charakterystyka Eulera okręgu S^1 to

$$\chi(S_1) = 1 - 1 = 0. \quad (21)$$

Warto zauważyć, że dla wielokątów wpisanych w okrąg różnica pomiędzy liczbą wierzchołków (zerowymiarowych sympleksów) oraz krawędzi (jedno-

wymiarowych sympleksów) daje zero, czyli obliczoną właśnie charakterystykę Eulera. Dla trójkąta dowód tego faktu przedstawia rys. 8 i powyższe obliczenia. Dla wielokątów z większą liczbą wierzchołków dowód przeprowadza się zauważając, że podział okręgu na większą liczbę sympleksów (w tym przypadku dodajemy kolejne punkty podziału boków trójkąta, czyli sympleksu z rys. 8, a każdy dodatkowy punkt generuje dodatkową krawędź podziału) nie zmienia niezmienników topologicznych – sposób liczenia nie wpływa na wynik.

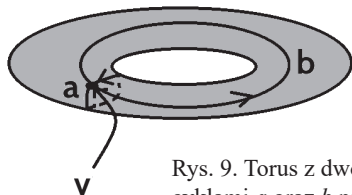
Dla wielościanów opisanych na sferze zachodzi podobny wynik pod nazwą *Twierdzenia Eulera o wielościanach*, które wiąże sumę odpowiednich sympleksów (liczba wierzchołków minus liczba krawędzi plus liczba ścian) z charakterystyką Eulera równą dla sfery 2. Wynika ono z analogicznych rozważań dla sfery, jak te podane wyżej dla okręgu.

Przykład ten był długi, ale dzięki niemu poznaliśmy większą część technik używanych w obliczeniach grupy homologii. Przejdźmy więc do bardziej skomplikowanych przykładów.

3.3 TORUS

Spróbujmy naszych sił na torusie. Możemy go sobie wyobrażać jako nadmuchiwaną oponę (np. samochodową, rowerową) lub obwarzanek pusty w środku (tylko jego brzeg).

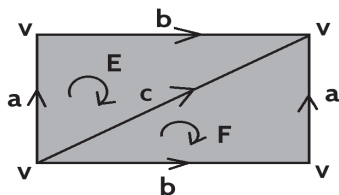
Na początku zastanówmy się co nam podpowiada intuicja na temat grup homologii. Z pewnością przestrzeń jest spójna (jeden kawałek), więc podejrzewamy, że $H_0 = \mathbb{Z}$. Zastanówmy się teraz, ile możemy znaleźć krzywych zamkniętych, których nie można przeprowadzić jedna w drugą i nie są brzegami obszaru zawartego na torusie? Po chwili zastanowienia możemy wskazać, że to te dwie oznaczone na rys. 9 przez a oraz b .



Rys. 9. Torus z dwoma jednowymiarowymi cyklami a oraz b przecinającymi się w punkcie v

Zatem podejrzewamy, że $H_1 = \mathbb{Z}[a] \oplus \mathbb{Z}[b]$. Torus jest powierzchnią dwuwymiarową, ale nasza intuicja nie podpowie nam, ile wynosi H_2 , więc musimy przejść do obliczeń.

W celu wyłuskania kompleksu symplecjajnego rozetniemy torus wzdłuż cykli a i b . Otrzymamy prostokąt widoczny na rys. 10,



gdzie mamy cztery kopie punktu v oraz dwie kopie a oraz b , które musimy skleić. Ze względu na to, że używamy sympleksów, prostokąt ten musieliśmy podzielić krzywą c i zorientować.

Rys. 10. Rozcięty torus. Orientacja jest zadana przez strzałki

Na początek zapiszmy, jakie mamy zbiory łańcuchów:

$$\begin{aligned} C_0 &= \mathbb{Z}v, \\ C_1 &= \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c, \\ C_2 &= \mathbb{Z}E \oplus \mathbb{Z}F. \end{aligned} \tag{22}$$

Mamy więc następującą sytuację

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0 \tag{23}$$

Sprawdźmy teraz, jak działa operator ∂_1 . Otrzymujemy bardzo prosto

$$\partial_1 a = v - v = 0, \partial_1 b = v - v = 0, \partial_1 c = v - v = 0. \tag{24}$$

To zerowanie wynika z faktu, że musieliśmy rozciąć torus, żeby zrobić z niego kompleks symplecjalny, a wynikowy prostokąt ma wierzchołki, które po sklejeniu dają ten sam punkt v . Zatem jądro $\ker(\partial_1) = \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c$, a ponieważ wykorzystaliśmy już wszystkie jednowymiarowe sympleksy, obraz jest pusty: $\text{image}(\partial_1) = \emptyset$.

Teraz zobaczymy, jak działa ∂_2 na E oraz F . Aby obliczyć brzegi tych dwóch zorientowanych trójkątów, musimy iść po brzegu zgodnie z orientacją, notując krawędzie ze znakami w zależności, czy orientacja krawędzi jest zgodna z obiegiem (+1) lub przeciwna (-1):

$$\partial_2 E = a + b - c, \partial_2 F = c - a - b \tag{25}$$

Zauważmy, że $\partial_2(E+F) = 0$ i jest to jedyna kombinacja E oraz F , która się zeruje. Zatem $\ker(\partial_2) = \mathbb{Z}(E+F)$, natomiast do obrazu możemy wybrać jeden z brzegów (gdyż drugi dodany do pozostałego jest w jądrze), np. $\text{image}(\partial_2) = \mathbb{Z}(a+b-c)$.

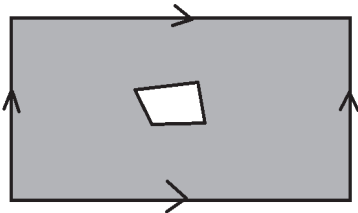
Mamy więc, analogicznie jak poprzednio,

$$\begin{aligned} H_2 &= \ker(\partial_2) = \mathbb{Z}[E+F] \cong \mathbb{Z}, \\ H_1 &= \frac{\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c}{\mathbb{Z}(a+b-c)} = \frac{\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}(a+b-c)}{\mathbb{Z}(a+b-c)} = \mathbb{Z}[a] \oplus \mathbb{Z}[b] \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \\ H_0 &= \ker(\partial_0) = \mathbb{Z}[v] \cong \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{26}$$

Możemy teraz wyznaczyć liczby Bettiego $b_0 = 1$, $b_1 = 2$ oraz $b_3 = 1$, więc charakterystyka Eulera torusa to

$$\chi(T^2) = 1 - 2 + 1 = 0.$$

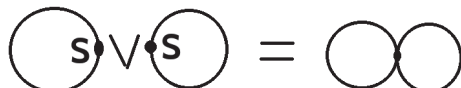
3.4 TORUS Z DZIURĄ I „BUKIET” OKRĘGÓW



Chcielibyśmy teraz zobaczyć, jak wyglądają grupy homologii dla torusa z dziurką przedstawionego w „rozciętej” formie na rys. 11, który oznaczmy sobie jako $T^2 \setminus D$ (torus minus mały dysk deformowalny do kształtu naszej dziurki). W tym celu musimy uzupełnić naszą wiedzę.

Rys. 11. Dziura w torusie

Pierwsza informacja, która jest nam potrzebna to definicja operacji zwanej po angielsku *wedge sum*, a w języku polskim przetłumaczona jako **bukiet**. Wyobraźmy sobie dwie przestrzenie, np. dwa okręgi S^1 z wyszczególnionymi punktami. Bukiet tych przestrzeni $S^1 \vee S^1$ polega na sklejeniu ich w tych wyszczególnionych punktach – otrzymujemy przestrzeń w kształcie cyfry 8, zobacz rys. 12.



Rys. 12. Bukiet dwóch okręgów

Analogicznie dla większej ilości przestrzeni – w każdej z nich wybieramy punkt, a następnie tworzymy bukiet sklejąc wszystkie te punkty w jeden (utożsamiając je). Czytelnik może przećwiczyć takie tworzenie bukietów na modelach z plasteliny.

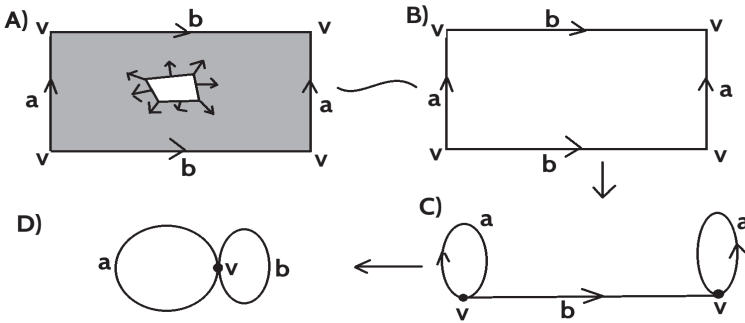
Drugą ważną informacją, którą wkrótce wykorzystamy, jest zachowanie grupy homologii pod wpływem deformacji. Jeżeli w sposób homeomorficzny (przypominamy, że to oznacza ciągle, czyli bez rozrywania i sklejanego, a także w sposób odwracalny) przekształcamy jedną przestrzeń w drugą, to grupa homologii jest zachowana. Co więcej, jeżeli ustalimy sobie parametr, który pokazuje, jak taka ciągła deformacja zmienia przestrzeń – rodzina takich ciągłych odwzorowań zadana przez parametr nazywa się homotopią – to również grupa homologii jest taka sama na każdym etapie deformacji. Homotopie możemy sobie wyobrazić patrząc na lot ptaka – w każdej chwili czasu jego położenie jest zadane przez wskazanie zegara, a jego kształt w tej chwili jest dany przez kształt w poprzedniej chwili oraz deformację jego ciała w czasach pośrednich. Cofając się w czasie otrzymujemy operację odwrotną. Jeżeli przestrzeń X jest homotopijna z przestrzenią Y to oznaczać to będziemy przez $X \sim Y$.

Ostatnią użyteczną dla nas własnością jest to, jak grupy homologii zachowują się na bukietach. Otóż dla grup homologii począwszy od pierwszej mamy

$$H_k(X \vee Y) = H_k(X) \oplus H_k(Y), k \geq 1. \quad (28)$$

Co natomiast zachodzi dla H_0 ? Musimy zauważyć, że operacja tworzenia bukietu z kilku kawałków (składowych spójnych) tworzy jeden. Zatem, ze względu na to, że H_0 numeruje liczbę składowych spójnych, to tę grupę musimy obliczyć niezależnie od wyższych grup, po utworzeniu bukietu. Dowód tych faktów jest trudny, a literatura, w której mogą być takie dowody znalezione, zostanie podana na końcu. Są to jednak podstawowe własności grup homologii.

Wyposażeni w te narzędzia wróćmy do naszego torusa z dziurką – rys. 11. Na początku zdeformujemy go, rozszerzając dziurę do brzegu i wykorzystując fakt, że jeżeli robimy to homotopijnie („bez rozrywania i sklejanego” i wzajemnie jednoznacznie), to grupa homologii nie zmienia się – przedstawia to rys. 13.



Rys. 13. Sekwencja operacji prowadząca od torusa z dziurką do bukietu dwóch okręgów – $S^1 \vee S^1$.
 A) oryginalny torus z dziurką (rozcięty); B) homotopia polegająca na rozszerzeniu dziury do krawędzi prostokąta; C) sklejenie krawędzi a ; D) sklejenie krawędzi b

Czytelnik proszony jest o wykonanie takiego eksperymentu na modelu z plasteliny lub innego „deformowalnego” materiału.

Teraz możemy już przystąpić do liczenia grup homologii. Na początek druga grupa homologii:

$$H_2(T^2 \setminus D) = H_2(S^1 \vee S^1) = H_2(S^1) \oplus H_2(S_1) \cong 0 \oplus 0 = 0, \quad (29)$$

gdyż okręgi są tworami jednowymiarowymi. W pierwszej równości wykorzystaliśmy fakt, że $T^2 \setminus D \sim S^1 \vee S^1$, więc grupy homologii tych dwóch przestrzeni są takie same. Wykorzystaliśmy również wzór (28) w drugiej równości.

Kolejna grupa

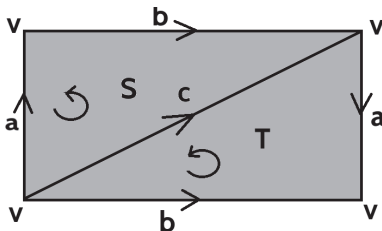
$$H_1(T^2 \setminus D) = H_1(S^1 \vee S^1) = H_1(S^1) \oplus H_1(S_1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}. \quad (30)$$

Ostatnia grupa homologii $H_0(T^2 \setminus D) \cong \mathbb{Z}$, gdyż $S^1 \vee S^1$ ma tylko jedną składową spójną. Kolejny nasz punkt to liczby Bettiego $b_1 = 2$, $b_0 = 1$, zatem charakterystyka Eulera $\chi(T^2 \setminus D) = 1 - 2 = -1$.

Czytelnik może wykonać prosty rachunek, próbując obliczyć grupy homologii dla torusa z dwoma lub większą liczbą dziur – rozwiązanie zostanie podane w dalszej części.

3.5 BUTELKA KLEINA

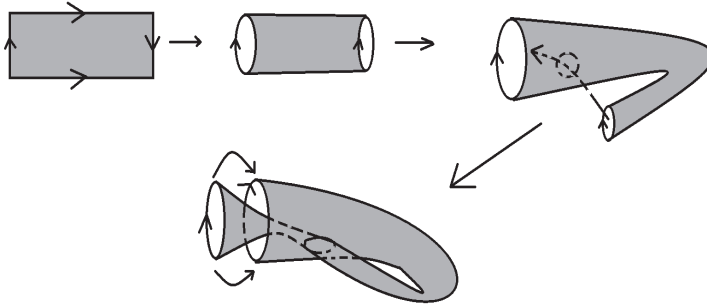
Nasz ostatni przykład jest odrobinę na uboczu, gdyż nie wykorzystamy go po-



Rys. 14. Butelka Kleina

nijej. Pokazuje on jednak, że oprócz współczynników całkowitych w sumie prostej dla grupy homologii mogą występować inne, „cykliczne”, np. wspomniane wcześniej \mathbb{Z}_2 . Zaprezentujemy butelkę Kleina oznaczaną przez K . „Rozcięty” model (analogiczny do powierzchni torusa) jest zaprezentowany na rys. 14.

Powierzchni tej nie możemy skleić bez samoprzecięć w trójwymiarowej przestrzeni, ale jeżeli dodamy jeden dodatkowy wymiar, to możemy to zrobić. Czytelnik jest proszony o sklejenie tego modelu w wyobraźni. W przypadku problemów rozwiązanie zostało podane na rys. 15.



Rys. 15. Butelka Kleina

Policzmy teraz grupy homologii. Ze względu na to, że już znamy ogólną ideę, będziemy to robić sprawniej. Łańcuchy mają następującą postać

$$C_0 = \mathbb{Z}v$$

$$C_1 = \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c \quad (31)$$

$$C_2 = \mathbb{Z}T \oplus \mathbb{Z}S$$

Podobnie jak w przypadku torusa otrzymamy

$$\partial_1 a = v - v = 0, \partial_1 b = 0, \partial_1 c = 0, \quad (32)$$

co daje $\ker(\partial_1) = \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c$, a także $\text{image}(\partial_1) = \emptyset$. Kolejny operator ∂_2 daje

$$\partial_2 T = b - a - c, \partial_2 S = c - b - a. \quad (33)$$

Zauważmy, że żadna kombinacja $\partial_2 T$ z $\partial_2 S$ nie daje nam zera, więc $\ker(\partial_2) = \emptyset$. Teraz obliczamy grupy homologii:

$$H_0 = \ker(\partial_0) = \mathbb{Z}[v] \cong \mathbb{Z}; \quad (34)$$

Druga grupa homologii znika, gdyż $\ker(\partial_2) = \emptyset$, tzn.

$$H_2 = 0 \quad (35)$$

Skupmy się teraz dokładniej na pierwszej grupie homologii. Korzystając z definicji otrzymujemy

$$H_1 = \frac{\ker(\partial_1)}{\text{image}(\partial_2)} = \frac{\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c}{\mathbb{Z}(b-a-c) \oplus \mathbb{Z}(c-b-a)}. \quad (36)$$

W mianowniku tego wyrażenia od pierwszego składnika sumy odejmiemy drugi i użyjemy go zamiast drugiego

$$H_1 = \frac{\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c}{\mathbb{Z}(b-a-c) \oplus \mathbb{Z}(2b-2c)}. \quad (37)$$

Teraz w liczniku zamiast pierwszego składnika użyjmy $b-a-c$ i uproścmy z mianownikiem

$$H_1 = \frac{\mathbb{Z}(b-a-c) \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c}{\mathbb{Z}(b-a-c) \oplus \mathbb{Z}(2b-2c)} = \frac{\mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c}{\mathbb{Z}(2b-2c)}. \quad (38)$$

Kolejna oczywista operacja daje nam

$$H_1 = \frac{\mathbb{Z}(b-c) \oplus \mathbb{Z}c}{\mathbb{Z}(2b-2c)}. \quad (39)$$

Zastanówmy się teraz, jak uprościć licznik i mianownik. Operacja brania przestrzeni ilorazowej $\frac{\mathbb{Z}a}{\mathbb{Z}2a}$ oznacza, że parzysta wielokrotność a jest brzegiem, czyli cyklem zerowym, np. $2[a]=0$. Innymi słowy, te wielokrotności $[a]$, które różnią się o parzystą liczbę, utożsamiamy. Zatem jeżeli mamy nieparzysty cykl, to możemy go sprowadzić do takiego, który jest mnożony przez liczbę całkowitą zero, lub jeden, np. $3[a]=(1+2)[a] = [a] + 2[a] = [a]$. Możemy to zgrabniej zapisać używając \mathbb{Z}_2 , ze standardowym dodawaniem modulo 2, tzn.: $1+1=0$. Dlatego $\frac{\mathbb{Z}a}{\mathbb{Z}2a} = \mathbb{Z}_2[a]$.

Wracając do wzoru (39), otrzymamy

$$H_1 = \mathbb{Z}_2(b-c) \oplus \mathbb{Z}c. \quad (40)$$

Pojawienie się składnika z \mathbb{Z}_2 jest związane z nieorientowalnością powierzchni. Butelka Kleina oraz wstęga Möbiusa są klasycznymi przykładami powierzchni nieorientowalnych. Spróbuj znaleźć w Internecie informacje na ich temat.

Obliczmy teraz liczby Bettię: $b_0 = 1$, $b_1 = 1$ (uwzględniamy tylko czynniki postaci $\mathbb{Z}[\dots]$) oraz $b_2 = 0$, co daje charakterystykę Eulera $\chi(K) = 0$.

Czytelnik, który chciałby się sprawdzić, może odwrócić zwrot jednego z odcinków b z rys. 14, oraz zmienić nazwę pary punktów po jednej ze stron, np. z v na w . Taki twór nazywa się rzeczywistą przestrzenią rzutową i jest oznaczany przez matematyków jako $\mathbb{R}P^2$. Ma on niezwykle ciekawe własności, które zasługiwałyby na osobny artykuł.

4. Przykłady grup homologii w przyrodzie

Przykładów i zastosowań teorii naszkicowanej powyżej jest wiele – zawsze, gdy w grę wchodzi charakterystyka powierzchni/przestrzeni, topologia może być użyta do jej opisu. My jednak, ze względu na ograniczone miejsce, skupimy się na kilku wybranych. Zakładając, że apetyt czytelnika na zastosowania po przebrnięciu przez poprzednie punkty wzrósł, skupimy się na początku na włoskiej kuchni.

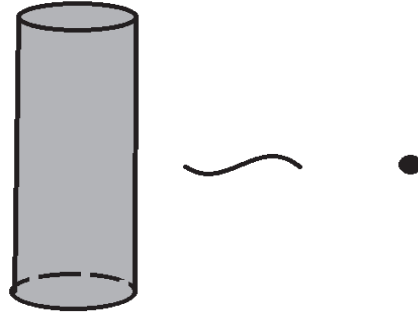
4.1 KUCHNIA WŁOSKA

Rozpocznijmy od włoskiej kuchni. Spróbujmy obliczyć grupy homologii dla dwóch przykładów zaprezentowanych na rys. 16.

Zacznijmy od spaghetti. Wyobraźmy je sobie jako wypełnione walce, które możemy homotopijnie zdeformować do punktu – rys. 17.



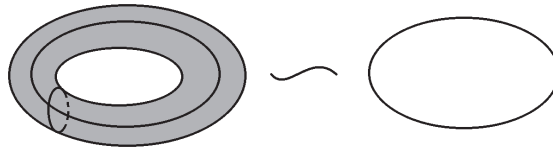
Rys. 16. Przykładowe włoskie makarony: spaghetti oraz tortellini



Rys. 17. Deformacja spaghetti do punktu

Zatem jedyna niezerowa grupa homologii to $H_0 \cong \mathbb{Z}$.

Tortellini możemy uważać za wypełniony torus, przedstawiony na rys. 18.



Rys. 18. Deformacja tortellini (wypełnionego torusa) do okręgu

Grupy homologii dla zdeformowanego tortellini – S^1 – obliczyliśmy w poprzedniej części.

Są to bardzo proste przykłady, jednak Czytelnik, mając zestaw podstawowych narzędzi, może spróbować obliczyć grupy homologii innych potraw.

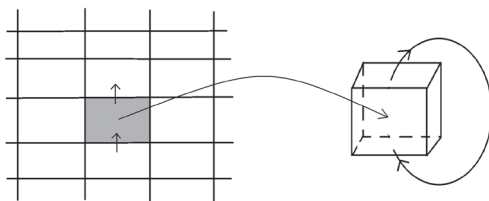
4.2 MATERIA W GWIAZDACH NEUTRONOWYCH

Przyjrzyjmy się teraz materii w gwiazdach neutronowych. Są to obiekty powstające w ostatnich etapach życia gwiazdy o wadze w odpowiednim zakresie, gdy traci ona możliwość produkcji energii w reakcjach syntezy termojądrowej cięższych pierwiastków z lżejszych. Wówczas grawitacja zaczyna ścisnąć gwiazdę do tego stopnia, że atomy tracą swoje elektrony i materia nie jest już zbudowana z atomów, tylko z materii jądrowej i swobodnych elektronów. Grawitacja, a co za tym idzie – ciśnienie, jest, oczywiście, największa w centrum gwiazdy i zmniejsza się, gdy poruszamy się w kierunku jej brzegu.

Rozpoczynając od środka gwiazdy mamy jądro, które składa się z jednorodnej materii jądrowej z domieszką elektronów. Jest to wynik zlania się jąder atomowych pod wpływem ciśnienia. Poruszając się w kierunku brzegu natrafiamy na ciekłą warstwę przejściową, które składa się z mieszaniny neutronów, protonów i swobodnych elektronów. Jeżeli zwrócimy uwagę na protony, to grupują się one w ciekawe kształty przypominające włoskie dania. To będzie nasz główny cel analizy. Struktury te mogą odpowiadać za tempo stygnięcia gwiazdy, gdyż są przeszkodą w transferze energii przez neutrino od jądra do jej powierzchni, a następnie w przestrzeń kosmiczną. Kolejne warstwy to wewnętrzna i zewnętrzna skorupa (ang. crust), gdzie możemy spotkać mieszaninę jąder atomowych, neutronów i elektronów. Oddziaływanie pomiędzy ładunkami uporządkowuje składniki w strukturę krystaliczną, tzw. kryształy kulombowskie. Idąc w kierunku brzegu, widzimy że maleje liczba swobodnych nukleonów, a napotykamy coraz więcej jąder. Najbardziej zewnętrzną warstwą jest ocean swobodnych jąder i gazu elektronów. Jest to oczywiście bardzo uproszczony opis.

Niedawne symulacje komputerowe wykazały (zobacz podsumowanie w [4]), że w warstwie pomiędzy jądrem a skorupą występują fazy przypominające twory znane z włoskiej kuchni – gnocchi, spaghetti czy inny rodzaj makaronu w zależności od gęstości materii. W symulacjach wykorzystano modele oddziaływań w materii jądrowej pod dużym ciśnieniem.

W takich symulacjach wykorzystuje się periodyczne warunki brzegowe. Oznacza to, że symulacja materii jest wykonywana w ograniczonej objętości, np. sześcianu, a wrażenie nieskończonej/dużej objętości, z której tę komórkę wycięto, uzyskuje się nakładając na komórkę warunki periodyczne na brzegach. Dla przykładu, jeżeli użyjemy sześcianu, to dla periodycznych warunków brzegowych materia, która wypłynie przez górną ścianę, wpłynie także przez dolną i analogicznie przy pozostałych parach przeciwległych: lewa-prawa i przednia-tylna – zobacz rys. 19.



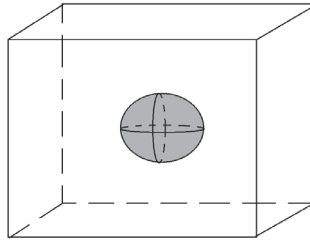
Rys. 19. Periodyczne warunki brzegowe tworzą wrażenie nieskończonej objętości

Taki trójwymiarowy wypełniony sześcian ze sklejonymi przeciwległymi ścianami to trójwymiarowy odpowiednik torusa – T^3 . Sklejenie przeciwległych ścian nie może być wykonane w trójwymiarowej przestrzeni bez samoprzecięć – musimy dodać przynajmniej jeden dodatkowy wymiar.

Omówimy wybrane przykłady takich struktur i policzymy ich grupy homologii. Wszystkie fazy opisane są w [4], a ich analiza topologiczna w [3]. Nasz

opis opiera się na [3]. Kolejność faz jest podana zgodnie ze wzrastającą gęstością materii jądrowej.

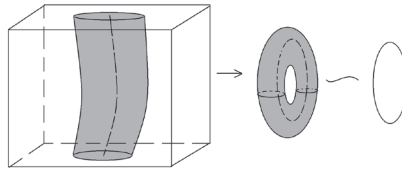
Rozpoczniemy od gnocchi przedstawionego na rys. 20.



Rys. 20. Faza gnocchi

Są to kulki materii protonowej (ciemniejsze obszary) pływającej w materii neutronowej (jaśniejsze). Skupiając się na pojedynczej kulce, możemy ją zdeformować homeomorficznie do punktu. Grupy homologii punktu zostały podane poprzednio – jedyna niezerowa grupa to $H_0 \cong \mathbb{Z}$.

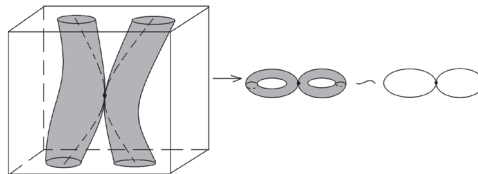
Kolejna faza to spaghetti, która składająca się z wypełnionych rurek. Jedna taka tuba została przedstawiona na rys. 21.



Rys. 21. Faza spaghetti i jej deformacja

W sześciennym, w którym odbywa się symulacja, mamy struktury w postaci wypełnionych rurek. Te rurki dotykają ścian (na rys. 21 górnej i dolnej). Ze względu na okresowe warunki brzegowe musimy skleić górną i dolną część rurki. Jako wynik otrzymamy wypełniony w środku torus, który poprzez homotopijną deformację możemy ścisnąć do okręgu S^1 , którego grupy homologii również zostały podane wcześniej.

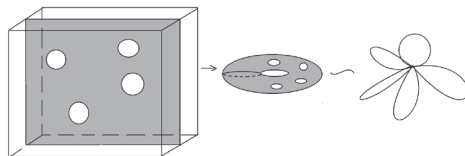
Gdy gęstość materii rośnie, rurki mogą się łączyć. Każde takie sklejenie zmienia topologię. Weźmy najprostszyp przypadek – założmy sklejenie dwóch rurek w jednym punkcie, jak to przedstawia rys. 22.



Rys. 22. Łączenie się dwóch elementów typu spaghetti

Jak widzimy na rysunku, takie połączone wypełnione rurki, ze względu na okresowe warunki brzegowe tworzą bukiet dwóch wypełnionych torusów, które możemy zdeformować do bukietu dwóch okręgów $S^1 \vee S^1$. Homologia takiej struktury była wyznaczona powyżej.

Jako ostatni przykład weźmy fazę o nazwie wafel, która składa się z równoległych warstw z dziurami. Jedną taką warstwę przedstawia rys. 23.



Rys. 23. Faza wafła i jej deformacja do bukietu sfer

Prostokąt z czterema dziurkami ze względu na utożsamienie przeciwległych ścian sześcianu daje nam torus z tymi dziurami. Rozszerzając te dziury, podobnie jak w przykładzie z torusem z jedną dziurą, otrzymamy bukiet pięciu okręgów. Zatem grupy homologii to

$$\begin{aligned} H_2(S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1) &= 0, \\ H_1(S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1) &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (41)$$

Natomiast $H_0 \cong \mathbb{Z}$, ponieważ bukiet jest przestrzenią spójną. Jak nietrudno zauważyć, dla n dziur otrzymamy bukiet $n+1$ okręgów.

4.3 BIOLOGIA

W biologii również występuje wiele struktur, w których topologia odgrywa szczególną rolę. Możemy wspomnieć o bakteriach i organizmach bardziej złożonych, które często formują struktury o unikalnych kształtach, a topologia może nam pomóc w ich klasyfikacji.

Również podstawowe składniki naszych organizmów – białka mają nietrywialną strukturę, a ich kształt często związany jest z ich funkcjami. Tutaj charakterystyki topologiczne również mogą pełnić ważną funkcję klasyfikacyjną. Innym przykładem, który może być klasyfikowany przy użyciu metod topologii, są tkanki występujące w naszym organizmie.

5 Co dalej?

Jeżeli drogi Czytelniku chciałbyś kontynuować tę ciekawą podróż w świat topologii algebraicznej, tutaj znajdziesz kilka porad.

Jedną z lepszych (moim zdaniem) książek opisujących w bardzo ciekawy i nieskomplikowany sposób topologię algebraiczną jest (niestety nie wznawiana) książeczka [1]. Jest to idealny wstęp do tego zagadnienia dla osób nie mających zbyt dużego przygotowania matematycznego.

Czytelnik posiadający odpowiednie przygotowanie matematyczne może sku-
sić się na lekturę książki [2], opisującej w szczegółach klasyczną topologię alge-
braiczną.

Osoby zainteresowane zastosowaniem topologii do symulacji materii we-
wnątrz gwiazd neutronowych (lub kuchni włoskiej) mogą rozpocząć od [3],
a szczegóły fizyki procesów we wnętrzu tych gwiazd opisane są w [4].

Młodym i obecnie szybko rozwijającym się obszarem badań jest topologia
stosowana (ang. applied topology) do szerokiej gamy zjawisk fizycznych, pro-
blemów techniki, informatyki oraz biologii. Opis wielu takich zastosowań zawie-
ra książka [5].

Topologia algebraiczna korzysta bardzo silnie z aparatu teorii kategorii i funk-
torów – homologia jest generowana przez taki „funktor”, który przekształca prze-
strzeń topologiczną w jej grupę homologii. Jest to bardzo abstrakcyjny dział,
obecnie przebudowujący podstawy całej matematyki. Pięknym i prostym wpro-
wadzeniem do tego tematu jest książka [6].

Literatura

- [1] W.G. Bołtiański, W.A. Jefremowicz, *Zarys podstawowych pojęć topologii*, Biblioteczka Matematyczna PZWS, 1965
- [2] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 1st edition (2001); książka jest dostępna na stronie: <https://www.math.cornell.edu/~hatcher/>
- [3] R.A. Kycia, S. Kubis, W. Wójcik, *Topological analysis of nuclear pasta phases*, Physical Review C (2017)
- [4] M. E. Caplan, C. J. Horowitz, *Astromaterial Science and Nuclear Pasta*, arXiv:1606.03646 [astro-ph.HE]
- [5] R. Ghrist, *Elementary Applied Topology*, CreateSpace Independent Publishing Platform (2014)
- [6] F.W. Lawvere, S. H. Schanuel, *Conceptual Mathematics*, Cambridge University Press (1997)