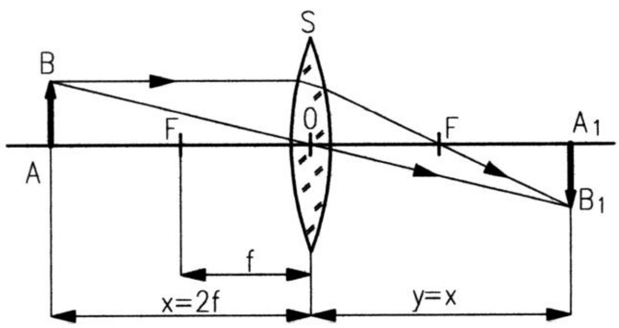
Fizyka sztuki cyrkowej i iluzjonistycznej – magiczna soczewka

Stanisław Bednarek, Jerzy Krysiak
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej Uniwersytetu Łódzkiego

Młody iluzjonista ubrany w czarny garnitur stał przed białą, pionową tablicą. W ręku trzymał magiczną różdżkę w postaci długiego, przezroczystego i grubego pręta o przekroju kołowym. Na tablicy napisane były drukowanymi literami słowa MAMA, OKO, TATA, KOKI i szereg innych. Iluzjonista poprosił jednego z widzów, żeby podszedł i stanął bardzo blisko przed tablicą. Końcem różdżki wskazał jedno ze słów i polecił je głośno odczytać zaproszonemu uczestnikowi pokazu swoich magicznych umiejętności. Zaproszony człowiek poradził sobie z tym bez trudu. Następnie iluzjonista zbliżył różdżkę do siebie, wypowiedział pierwsze magiczne zaklęcie i ustawił ją między słowem MAMA a oczyma uczestnika pokazu, stojącego przed tablicą. Polecił odczytać to słowo. Uczestnik stwierdził, że ma z tym trudności, ponieważ widzi słowo do góry nogami. Iluzjonista powtórzył te czynności dla słowa OKO wypowiadając inne zaklęcie. Tym razem uczestnik stwierdził, że odczytuje słowo bez problemu, ponieważ jest ono nieodwrócone. Dla kolejnych słów było podobnie – zaklęta różdżka jedne z nich odwracała, a inne nie, w zależności od wypowiedzianego zaklęcia. Na zakończenie iluzjonista stwierdził. „Moja różdżka jest czarodziejska – rozumie wypowiedziane zaklęcia i w zależności od ich treści jedne słowa odwraca, a inne nie”.

Opisana historia zdarzyła się naprawdę podczas jednego z przedstawień cyrkowych. Zastanówmy się jednak, czy żeby spowodować opisany efekt trzeba odwoływać się do magicznych zaklęć i „mocy tajemnych”, czy też można w umiejętny sposób wykorzystać w tym celu znane od dawna prawa fizyki? Z optyki geometrycznej wiadomo, że kiedy umieścimy przedmiot AB przed soczewką skupiającą S w odległości x dwa razy większej niż jej ogniskowa f, to soczewka wytworzy po drugiej stronie rzeczywisty i odwrócony obraz A_1B_1 tego przedmiotu. Wielkość wytworzonego obrazu jest taka sama, jak wielkość przedmiotu (rys. 1). Soczewki, z którymi spotykamy się najczęściej, stanowią przezroczyste bryły o małej grubości, ograniczone przynajmniej jedną, zakrzywioną powierzchnią – zwykle fragmentem powierzchni kulistej. Są to cienkie soczewki sferyczne, ale nie zawsze tak musi być. Zamiast powierzchni kulistej soczewka może być utworzona, np. przez powierzchnię cylindryczną, a grubość soczewki wcale nie musi być mała w porównaniu z jej średnicą i promieniami krzywizny ograniczających ją powierzchni. Taka soczewka nazywana jest grubą soczewką asferyczną.



Rys. 1. Konstrukcja obrazu rzeczywistego A_1B_2, odwróconego i tej samej wielkości, co przedmiot AB w soczewce skupiającej *S*; *F* – ognisko soczewki; *f* – ogniskowa soczewki

Szczególnym przypadkiem grubej soczewki asferycznej jest przezroczysty pręt o przekroju kołowym, którym posługiwał się opisany iluzjonista. Krótko mówiąc stanowi on soczewkę walcową. Zobaczmy dokładniej, jak działa taka soczewka. Znalezienie szklanego albo plastikowego, przezroczystego pręta o średnicy kilku cm w naszym najbliższym otoczeniu sprawi zapewne nieco trudności. Można jednak wykorzystać przedmioty codziennego użytku i zastąpić taki pręt okrągłą, przezroczystą butelką o cienkiej i gładkiej ściance bocznej bez rowków i wgłębień. W takich butelkach, wykonanych z plastiku, sprzedawane są m.in. tanie szampony do włosów i niektóre wody mineralne. Okrągła, szklana butelka, np. od octu, mniej nadaje się do tego celu, ponieważ ma znaczne grubsze ścianki, w których nastąpi większe przesunięcie promieni świetlnych, ale też można ją wykorzystać. Opisaną butelkę należy całkowicie napełnić wodą, najlepiej przegotowaną, żeby usunąć pęcherzyki powietrza i szczelnie zamknąć zakrętką.

Mając gotową soczewkę musimy jeszcze przygotować napisy. W tym celu na kartce białego papieru najlepiej jest wydrukować jedno pod drugim wymienione na wstępie słowa używając, jak to mówią poloniści, wielkich liter. Wysokość tych liter nie powinna być jednak większa, niż średnica butelki. Słowa można również napisać grubym pisakiem, ale należy to zrobić bardzo staranie. Kartkę kładziemy na stole lub zawieszamy pionowo. Bierzemy butelkę do rąk, ustawiamy ją równolegle do napisu MAMA i trzymamy w odległości kilku cm od niego. Patrzymy przez butelkę na zapisane słowo i zmieniamy jej odległość od kartki, zachowując równoległe ustawienie, tak żeby zobaczyć ostry obraz słowa o tej samej wysokości, co napis na kartce. Obraz ten jest odwrócony. Trzymając butelkę w poprzedniej odległości od kartki przesuwamy ją nad napis OKO. I tu zdziwienie – okazuje się, że znów widzimy ostry obraz, ale napis jest nieodwrócony.

Spróbujmy wyjaśnić, dlaczego tak się stało, przecież nie wypowiedzieliśmy magicznego zaklęcia? Odpowiedź jest prosta. Wystarczy zauważyć, że napis

OKO ma poziomą oś symetrii, przechodzącą w połowie jego wysokości. Taki napis po obróceniu względem wspomnianej osi symetrii będzie wyglądał identycznie, jak przed obrotem. Matematycy i fizycy mówią, że jest on inwariantny, czyli niezmienniczy, względem przekształcenia przez symetrię osiową. Wynika stąd wniosek, że nasza soczewka walcowa działa bez żadnych zaklęć przez cały czas, ale odwrócenia napisów mających oś symetrii są dla nas niewykrywalne. Nawiasem mówiąc, analogiczna sytuacja występuje często w fizyce cząstek elementarnych. Niektóre cząstki są nieodróżnialne od swoich antycząstek, opisywanych przez zmianę na przeciwne wartości charakteryzujących je liczb kwantowych. Teraz już wiemy, co trzeba zrobić, żeby zadziwić widzów. Te napisy, które mają być nieodwrócone muszą zostać wykonane literami, posiadającymi poziomą oś symetrii, czyli: B, C, D, E, H, I, K, O, X. Przygotowując napisy należy zwrócić uwagę, żeby czcionki tych liter były dokładnie symetryczne względem osi poziomej. Jeżeli używamy edytora pisma Word lub edytora graficznego Corel Draw, to najlepiej jest wybrać czcionkę o nazwie „Tw Cen MT Condensed Extra Bold”. Jest to czcionka bezszeryfowa, tzn. nie ma charakterystycznych rozszerzeń na końcach elementów liter, a poza tym ukośne kreski występujące, np. w literze K, wychodzą dokładnie z połowy wysokości kreski pionowej.

W tym momencie wielu Czytelników zada interesujące pytanie, czy soczewkę walcową można zastąpić soczewką sferyczną, ustawioną w odległości dwa razy większej niż jej ogniskowa od napisu? Przecież soczewka sferyczna w tych warunkach również daje obraz rzeczywisty o tej samej wielkości, co przedmiot i odwrócony. Trzeba jednak zwrócić uwagę na drobną, ale istotną różnicę. Soczewka walcowa odwraca obraz wzdłuż poziomej osi symetrii, a soczewka sferyczna wokół środka symetrii. Stosując soczewkę sferyczną otrzymalibyśmy nieodwrócony obraz tylko dla liter mających środek symetrii, to jest: H, I, O, X. Żeby się o tym łatwo przekonać, wystarczy wziąć dowolną soczewkę skupiającą, np. lupę i narysować na kartce papieru literę, np. literę F albo R. Po ustawieniu soczewki w odległości jej podwójnej ogniskowej od litery i obserwacji okiem, znajdującym się także w odległości podwójnej ogniskowej od soczewki zauważymy, że litera jest obrócona wokół osi prostopadłej do kartki o kąt 180°. Oprócz tego soczewki sferyczne mają zwykle kształt okrągły i trzeba by zastosować prostokątny wycinek takiej soczewki o dużej średnicy, żeby obejmował tylko jeden z napisów.

Kolejnym etapem naszych dociekań będzie obliczenie ogniskowej soczewki walcowej, co pozwoli nam wskazać odległość od napisów, w jakiej należy ustawić soczewkę. Nie możemy do tego celu zastosować znanego z podręczników fizyki ogólnej wzoru na ogniskową f soczewki cienkiej o promieniach krzywizny r_1, r_2, wykonanej z materiału o współczynniku załamania światła n względem otaczającego ją ośrodka. Wzór ten – jak pamiętamy – ma postać (rys. 2) [1]:

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right) \tag{1}$$

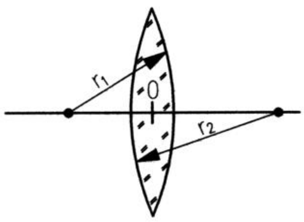
gdzie n – względny współczynnik załamania światła materiału, z którego zrobiono soczewkę.

Powodem tego jest stanowczo za duża grubość g naszej soczewki i dlatego musimy skorzystać z ogólniejszego wzoru na ogniskową soczewki grubej w postaci (rys. 3), [3, 4]:

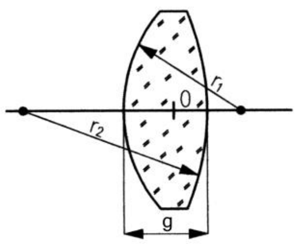
$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)-\frac{(n-1)^2}{n}\frac{g}{r_1 r_2} \tag{2}$$

Ogniskowa soczewki wyrażona zarówno wzorem (1) jak i (2) liczona jest od jej środka optycznego O (rys. 2, 3). Za środek ten przyjmuje się punkt, przez który dowolny promień światła padający na soczewkę przechodzi przez nią bez zmiany kierunku. Zauważmy, że dla walca $r_1 = r_2 = r$ oraz $g = 2r$, (rys. 4). Po podstawieniu tych zależności do równania (2) otrzymujemy wzór:

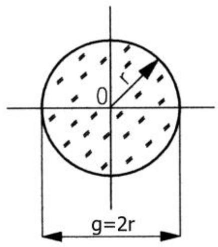
$$f=\frac{nr}{2(n-1)} \tag{3}$$



Rys. 2. Oznaczanie promieni krzywizny r_1, r_2 soczewki cienkiej



Rys. 3. Parametry geometryczne soczewki grubej; r_1, r_2 – promienie krzywizny, g – grubość



Rys. 4. Parametry geometryczne grubej soczewki walcowej; r – promień krzywizny, g – grubość

Ze wzoru (3) wynika, że ogniskowa soczewki walcowej może być większa albo mniejsza niż promień walca r, czyli ognisko może leżeć na zewnątrz lub wewnątrz soczewki. Zależy to od wartości współczynnika załamania światła n materiału soczewki względem otoczenia. Zbadajmy, dla jakiej wartości n ognisko leży na zewnątrz soczewki, czyli zachodzi $f > r$. W tym celu zastępujemy równanie (3) przez poniższą nierówność

$$r<\frac{nr}{2(n-1)} \tag{4}$$

Po prostych przekształceniach z nierówności (4) wynika warunek $n < 2$. Korzystając z tablic wielkości fizycznych możemy przekonać się, że tylko nieliczne materiały mają współczynniki załamania światła względem próżni $n > 2$. Są to m.in. diament ($n = 2{,}42$) i stężony roztwór dwujodku rtęci w anilinie ($n \approx 2{,}2$) [5]. Soczewka otoczona jest powietrzem, mającym z bardzo dobrym przybliżeniem taki sam współczynnik załamania światła jak próżnia, czyli 1. Wynika stąd, że podana wartość współczynnika załamania względem próżni może być przyjęta również dla powietrza. Nasze soczewki walcowe utworzone są z wody otoczonej ścianką butelki wykonanej z przezroczystego plastiku lub szkła. Ponieważ ścianka jest cienka, to jej wpływ na ogniskową można pominąć. Istotne znaczenie ma wówczas zawarta w butelce woda, dla której współczynnik załamania względem próżni ($n = 1{,}33 \approx 4/3$). Podstawiając $n = 4/3$ do wzoru (3) otrzymujemy $f = 2r$. Ponieważ ogniskowa liczona jest od osi walca, to odległość ogniska od powierzchni butelki o cienkich ściankach napełnionej wodą wynosi r, czyli równa jest promieniowi butelki. Żeby zobaczyć napisy odwrócone i w naturalnej wielkości, należy w przypadku użycia butelki napełnionej wodą umieścić kartkę z napisami w odległości równej średnicy butelki od jej osi, czyli w odległości promienia od jej powierzchni. Dla różnych gatunków szkła i przezroczystych tworzyw sztucznych współczynniki załamania są większe, niż dla wody, (wynoszą one $n = 1{,}46 - 1{,}92$) i odległości napisów powinny być jeszcze mniejsze. Teraz rozumiemy, dlaczego iluzjonista polecił patrzeć uczestnikowi pokazu na napisy z małej odległości.

Używając suwmiarki albo linijki możemy zmierzyć średnicę zastosowanej butelki i obliczyć jej promień, a następnie ze wzoru (3) wyliczyć ogniskową soczewki walcowej, którą stanowi ta butelka. Po tym ustawiamy butelkę równolegle do wybranego napisu, w takiej odległości, żeby otrzymać jego obraz o niezmienionej wielkości i mierzymy odległość osi lub powierzchni butelki od kartki z napisem. W ten sposób możemy sprawdzić poprawność naszych obliczeń ogniskowej.

Oglądając uważnie obrazy napisów wytwarzanych przez soczewkę, zauważymy, że są one nieco zniekształcone i nieostre. Widać to szczególnie w częściach górnych i dolnych napisów, czyli bardziej odległych od osi optycznej soczewki. Powodem tego jest aberracja soczewki, wynikająca z jej kształtu. Zwykle soczewki ograniczone są powierzchniami kulistymi i mówi się o aberracji sferycznej. W naszym przypadku występuje powierzchnia cylindryczna i należałoby mówić o aberracji cylindrycznej lub ogólniej – geometrycznej. Aberracja spowodowana jest tym, że promienie równoległe, przechodzące dalej od osi optycznej padają na soczewkę pod większym kątem i załamują się bardziej w kierunku tej osi, niż promienie przechodzące bliżej osi. W wyniku tego promienie równoległe do osi optycznej tworzą ognisko soczewki, które nie jest punktem, lecz rozmytym obszarem o określonych rozmiarach. Maksymalne rozmiary tego obszaru liczone wzdłuż osi oraz w kierunku do niej prostopadłym są miarą podłużnej i poprzecznej aberracji geometrycznej. Podobnie rozmyte są obrazy dowolnych punktów napisu i stąd nieostrość całego jego obrazu.

Trzeba dodać, ze wzór na ogniskową soczewki grubej (2) jest również przybliżony i został wyprowadzony przy wykorzystaniu równania opisującego załamanie się na przezroczystej sferze lub walcu promieni biegnących blisko osi optycznej [6, 7]. W dostępnej literaturze nie udało się znaleźć dokładnego wzoru na ogniskową grubej soczewki walcowej ani sferycznej. Żmudne obliczenia własne, przeprowadzone bez żadnych przybliżeń, w których wykorzystano jedynie prawo załamania światła i podstawowe zależności dla figur geometrycznych, doprowadziły do otrzymania skomplikowanego wzoru na ogniskową soczewki walcowej. Wzór ten pozwala obliczyć ogniskową f dla dowolnego promienia, biegnącego równolegle w odległości d od osi optycznej walca o współczynniku załamania n i ma następującą postać:

$$f = r\cos(2\beta - \alpha) + \left[d - 2r\cos\beta\sin(\alpha - \beta)\right]\mathrm{ctg}\,2(\alpha - \beta) \tag{5}$$

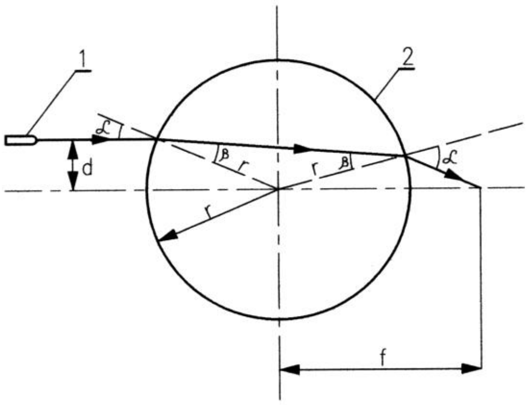
We wzorze (5) kąty padania α promienia na walec i jego załamania β wyrażają się wzorami (rys. 5):

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{d}{r}\right) \tag{6}$$

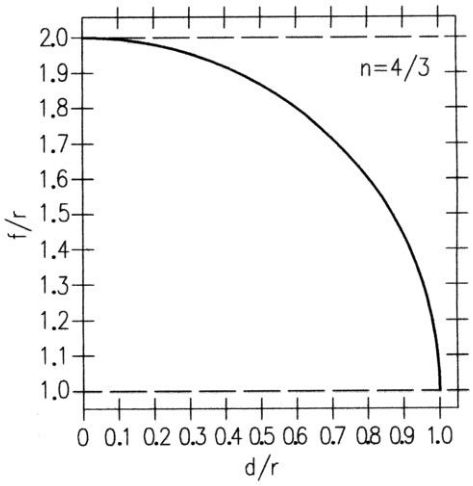
$$\beta = \arcsin\left(\frac{d}{nr}\right) \tag{7}$$

Żeby lepiej zorientować się w wynikach przewidywanych przez wzór (5), przeprowadzono obliczenia numeryczne. Na podstawie ich wyników narysowano wykres, przedstawiający zależność ogniskowej f soczewki walcowej od odległości d między promieniem świetlnym i osią optyczną. Dla większej uniwersalności użyto stosunków ogniskowej f i odległości d do promienia krzywizny walca r. Wykres ten przedstawia rys. 6. Widać z niego wyraźne skracanie się ogniskowej f/r wraz ze wzrostem odległości d/r.

Bieg promienia świetlnego w soczewce walcowej można łatwo uwidocznić za pomocą wskaźnika laserowego i naszej butelki wypełnionej wodą lekko zabarwioną fluoresceiną, rivanolem lub nadmanganianem potasu (rys. 5). Butelkę kładziemy poziomo na stole i kierujemy na jej walcową powierzchnię, również poziomo i prostopadle do podłużnej osi butelki, wiązkę światła laserowego ze wskaźnika. Zmieniając odległość wiązki od powierzchni stołu możemy zbadać wpływ tej odległości na bieg wiązki wewnątrz butelki i ogniskową soczewki walcowej. Doświadczenie to jest bardziej widoczne po zastosowaniu butelki o możliwie dużej średnicy, np. dwulitrowej butelki po „coca coli" lub pięciolitrowego, okrągłego pojemnika po wodzie mineralnej albo przezroczystego krążka o średnicy kilkunastu cm, wyciętego z przezroczystej płytki z tworzywa sztucznego. Krążek taki można też łatwo otrzymać przez zestalenie rozpuszczonej żelatyny w naczyniu cylindrycznym.



Rys. 5. Sposób przeprowadzenia doświadczenia, uwidaczniającego bieg promienia świetlnego w soczewce walcowej i wpływ jego odległości od osi optycznej soczewki na jej ogniskową; 1 – wskaźnik laserowy, 2 – butelka wypełniona lekko zabarwioną wodą, *d* – odległość promienia świetlnego od osi optycznej soczewki, *f* – ogniskowa soczewki, *r* – promień krzywizny walca, *α* – kąt padania, *β* – kąt załamania (Promień wpadający do walca jest prawie niezałamany, a wychodzący wyraźnie załamany. Z tego powodu kąt *α* po lewej stronie jest mniejszy niż po prawej.)



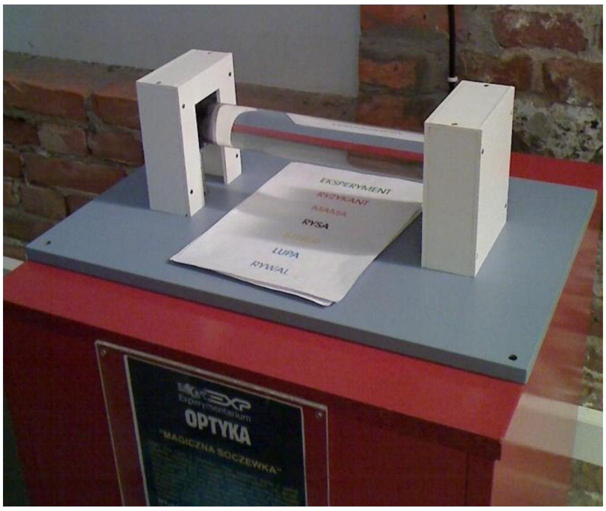
Rys. 6. Zależność względnej ogniskowej *f/r* grubej soczewki walcowej od względnej odległości *d/r*, gdzie *d* – odległość między promieniem świetlnym, a osią optyczną soczewki, *r* – promień krzywizny soczewki (walca), *n* – względny współczynnik załamania światła materiału soczewki, (w naszym przypadku wody)

Z rys. 6 łatwo wywnioskować, że w celu zmniejszenia aberracji należy ograniczyć szerokość wiązki światła, przechodzącej przez soczewkę (zmniejszyć *d*) i wtedy różnice ogniskowej będą niewielkie. Można to zrobić za pomocą podłużnej przesłony równoległej do soczewki albo wykonać napisy o wysokości kilka razy mniejszej od promienia walca, ewentualnie dla ustalonej wysokości napisów zwiększyć promień walca. W naszym przypadku najlepiej i najłatwiej jest wybrać to pierwsze rozwiązanie. Oprócz dyskutowanej aberracji geometrycznej soczewka walcowa ma też aberrację chromatyczną. Wynika ona stąd, że obserwujemy napisy oświetlone światłem białym, które jest mieszaniną fal o różnych długościach i współczynniki załamania dla poszczególnych długości fal są różne. Większe współczynniki są dla światła o krótszych falach – fioletowego i niebieskiego, a mniejsze dla światła o falach dłuższych – czerwonego i pomarańczowego. Stąd też różne są ogniskowe dla każdej z tych fal. Aberracja chromatyczna przejawia się wąską, tęczową obwódką wokół otrzymanego obrazu. W przypadku naszych soczewek wypełnionych wodą aberracja ta może być trudniejsza do zaobserwowania, ponieważ dla wody różnica współczynników załamania dla fal o skrajnych długościach (czerwonego i fioletowego), wchodzących w skład światła białego wynosi tylko 0,014 [5].

Naszą magiczną soczewkę można wykonać jako magiczną szpulkę, przeznaczoną dla osób, które nie mają cierpliwości do ustawiania jej w odpowiedniej odległości od napisów. W tym celu, należy wyciąć ze sztywnego materiału, np. ze sklejki lub grubej tektury, dwa pierścienie z otworami o promieniu takim samym jak promień butelki i promieniu zewnętrznym dwa razy większym od promienia butelki. Oba pierścienie nakładamy na butelkę w pobliżu końców jej cylindrycznej części i przyklejamy szybkowiążącym klejem cyjanoakrylowym w rodzaju „super glue", „kropelka" albo silikonem do uszczelnień. Taką magiczną szpulkę wykonaną z kawałka szklanego pręta przedstawia fot. 1. Wystarczy tę szpulkę przetoczyć po kartce papieru z odpowiednimi napisami, obserwując jej przezroczystą część, żeby uzyskać pożądany efekt.

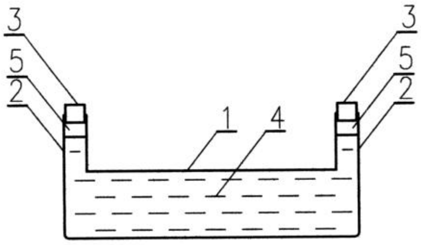
Fot. 1. Wygląd magicznej szpulki, spełniającej rolę soczewki

Zamiast przesuwać lub przetaczać soczewkę nad kartką z napisami, możemy także zamocować soczewkę nieruchomo w odpowiedniej odległości i przesuwać tylko kartę. Przykład wykonania magicznej soczewki według podanej koncepcji przedstawia fot. 2. Jest to soczewka dużych rozmiarów (jej długość wynosi 50 cm, a średnica 5 cm), przeznaczona do samodzielnego przeprowadzania doświadczeń z fizyki na interaktywnej wystawie w Eksperymentarium, działającym w Łódzkiej Manufakturze. Ponieważ uzyskanie jednorodnego, przezroczystego pręta ze szkła lub tworzywa sztucznego o takich rozmiarach byłoby trudne i kosztowne, zastosowano cienkościenną rurę szklaną, wypełnioną wodą. Ponadto ruchoma rura lub pręt o tych rozmiarach byłyby ciężkie oraz narażone na rozbicie.



Fot. 2. Wygląd magicznej soczewki o dużych rozmiarach z kompensatorem ciepła, używanej w Łódzkim Eksperymentarium

Opisana soczewka musi działać w różnych temperaturach, bowiem pomieszczenie Eksperymentarium jest słabo ogrzewane zimą a w lecie znacznie nagrzewa się z powodu braku klimatyzacji. Wiadomo też, że woda ma większy współczynnik rozszerzalności cieplnej, niż szkło. Wynika stąd, iż w niższych temperaturach doszłoby do nadmiernego zmniejszenia objętości wody i pojawienia się pęcherzy powietrza, utrudniających obserwację. Z kolei w wyższych temperaturach groziłoby to pęknięciem rury rozpychanej przez ciśnienie zbyt rozszerzającej się wody. Żeby tego uniknąć, musiano zastosować kompensator cieplny w postaci częściowo wypełnionych wodą rurek szklanych, skierowanych ku górze i połączonych z rurą przy jej górnych krawędziach (rys. 7). Rurki te są ukryte we wnętrzu wsporników, mocujących soczewkę do płyty, po której przesuwane są kartki z napisami. W przypadku podniesienia temperatury otoczenia woda wchodzi do rurek zawierających powietrze, które jest tylko nieznacznie sprężane i nie powoduje zbyt dużych naprężeń szkła. Ilość wody i objętość rurek są odpowiednio dobrane do zaplanowanego zakresu temperatur pracy soczewki. Dzięki temu przy maksymalnej temperaturze z tego zakresu woda całkowicie nie wypełnia rurek, a przy minimalnej jest jej w rurkach jeszcze tyle, że nie tworzą się pęcherzyki powietrza w poziomej rurze.



Rys. 7. Budowa soczewki walcowej z kompensatorem rozszerzalności cieplnej; 1 – rura szklana, 2 – cienka rurka, 3 – korek, 4 – woda, 5 – powietrze

Przeprowadzona dyskusja właściwości optycznych grubej soczewki walcowej w postaci pręta i ujawnione szczegóły techniczne pokazują, jak w umiejętny sposób można wykorzystać zjawiska i prawa fizyki, żeby uzyskać zadziwiające wyniki i je zoptymalizować. Właśnie takie wyniki często oglądają widzowie w postaci sztuczek cyrkowych i efektów iluzjonistycznych.

Literatura

[1] M. Skorko, *Fizyka*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1973.
[2] C. Bobrowski, *Fizyka, Krótki kur*s, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1993.
[3] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki, cz. 4*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 2007.
[4] H. Stöcker, *Nowoczesne kompendium fizyki*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 2010.
[5] W. Mizerski, *Tablice fizyczno-astronomiczne*, Wydawnictwo Adamantan, Warszawa 2002.
[6] S. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna, cz. IV. Optyka*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1963.
[7] A. Stojecki, *Optyka, Podręcznik dla liceum zawodowego*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1985.

Redakcja poleca również artykuł Grzegorza Karwasza i Mirosława Brozisa *Soczewki grubasy*, zamieszczony w *Fotonie* 86/2004.